MANUEL COVEÑAS NAQUICHE

Editorial COVEÑAS
¡Sí que enseña!!!

COVEMATIC

TEXTO DE GRADO

EDICICÓN 2020

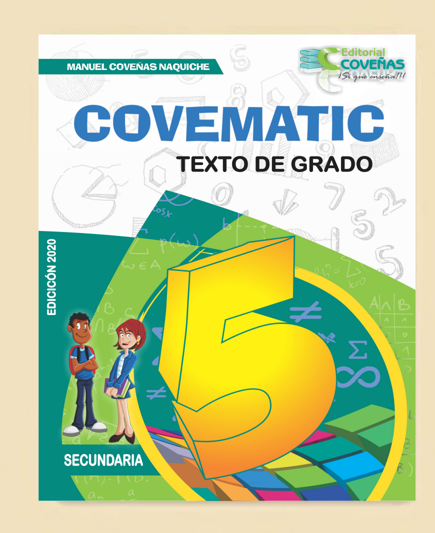
5

SECUNDARIA

PRESENTACIÓN



El **Libro de Texto** de matemática te proporciona los conocimientos matemáticos que desarrollarán tus capacidades y competencias, las que te permitirán afrontar con éxito dificultades de la vida cotidiana



APERTURA

La unidad comienza con una binaria que presenta: una Imagen, los temas de la unidad por competencias, el enfoque transversal y los saberes previos.

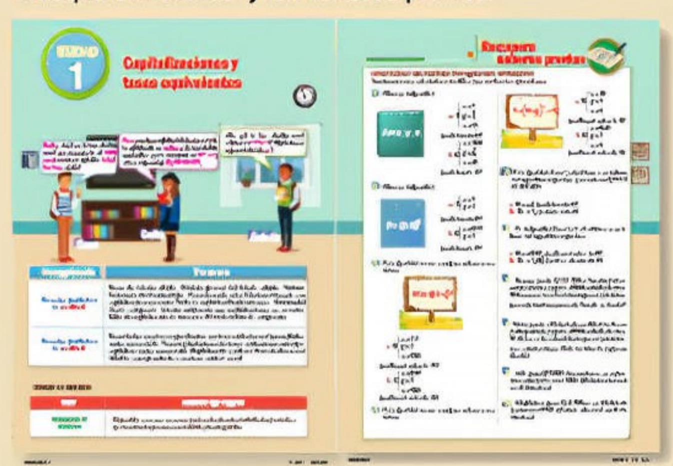


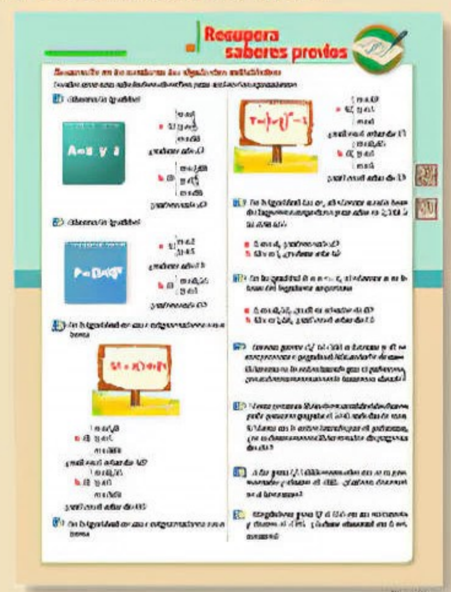
IMAGEN MOTIVADORA



Muestra a dos compañeros de aula: Corita y Memo, ellos sostienen un diálogo relacionado con los temas de la unidad. Memo preguntando y Corita respondiendo. Pero, hay un tercer estudiante llamado Antonio, que está atento a lo que se dice; él hace un comentario o pregunta advirtiéndonos que hay algo más por averiguar.

RECUPERA SABERES PREVIOS

Son preguntas y/o actividades sencillas, que facilitan la recuperación de saberes previos, para lograr un aprendizaje significativo de los temas de la unidad



COMPETENCIAS Y TEMAS

Al inicio de cada unidad se presentan tres competencias matemáticas, cada una con los temas que le corresponde y que serán desarrollados en la unidad.

Competencia	Temas
Resuelve problemas de cantidad.	Tasas de interés simple. Fórmula general del interés simple. Fórmula factorizada del monto simple. Ecuaciones de valor. Interés compuesto con capitalizaciones anuales. Tabla de capitalización de intereses. Fórmula del monto compuesto. Interés compuesto con capitalizaciones no anuales. Tabla de capitalización de intereses. Fórmula del monto compuesto.
Resuelve problemas de cantidad.	Tasa efectiva anual correspondiente a una tasa nominal anual que capitaliza varias veces al año. Tasas equivalentes entre tasas nominales anuales que capitalizan varias veces al año. Capitalización continua. Tasa efectiva anual máxima correspondiente a una tasa nominal anual.

ENFOQUE TRANSVERSAL

En los enfoques transversales se basa la acción formativa permanente del equipo de docentes y directivos, en coordinación con las familias, cuyo resultado es el desarrollo y logro del perfil de egreso.

ENFOQUE DE DERECHOS

Valor	Actitudes que suponen
[illegible]	[illegible]

COMPETENCIAS, CAPACIDADES Y DESEMPEÑOS

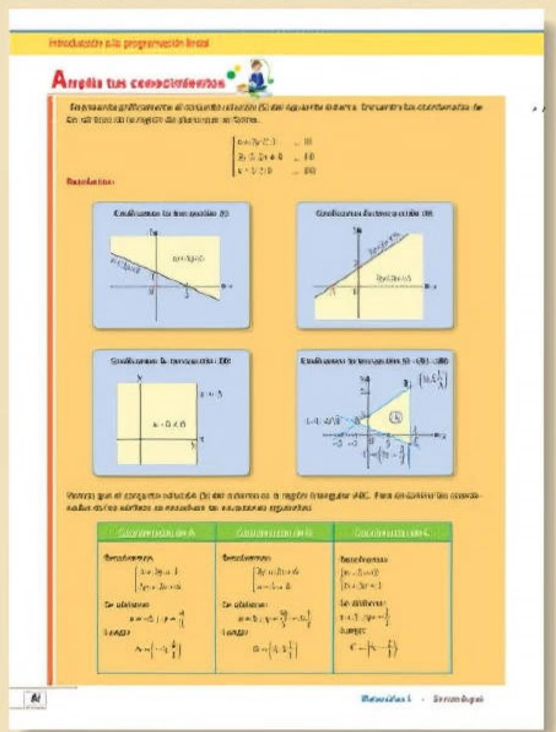
Antes de comenzar el desarrollo de los temas se menciona a qué competencia corresponden, las capacidades y sus desempeños, que apuntan al logro de dicha competencia

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]

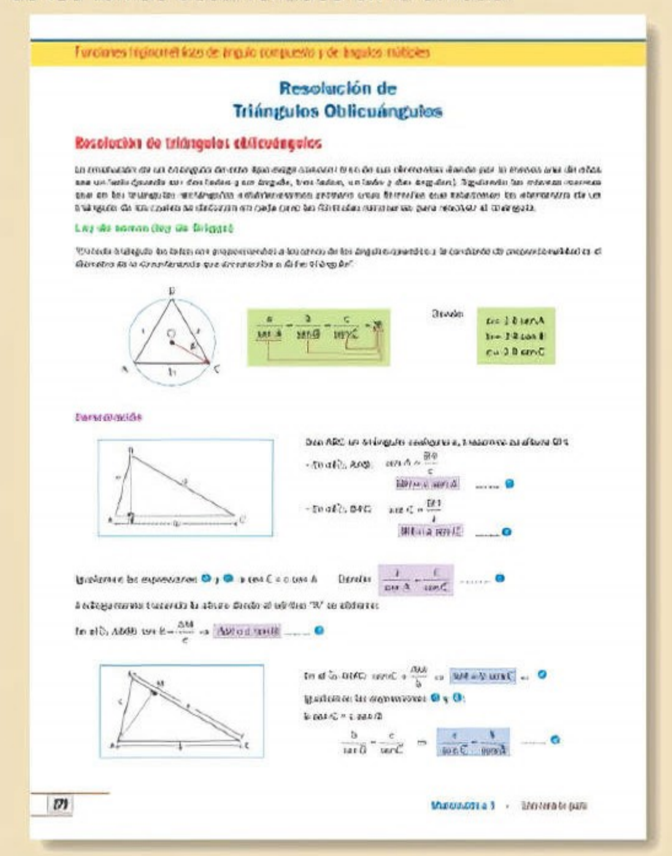
AMPLÍA TUS CONOCIMIENTOS

Esta sección presenta información adicional con respecto a los temas tratados, puede ser una información teórica, hechos históricos, aplicaciones en la vida cotidiana o problemas resueltos de características especiales, donde se utilizan estrategias pertinentes y sencillas, que permiten a los estudiantes comprender, afianzar y ampliar los conocimientos teóricos de la unidad.


Amplía tus conocimientos

TEMAS

Los temas se presentan con abundante y variada información, que sirve a los estudiantes como fundamento teórico para comprender y resolver ejercicios y problemas propuestos en el libro de actividades.
La didáctica empleada esta acorde al grado de estudio y permite a los estudiantes la comprensión fácil y amena de los temas desarrollados en la unidad.


Resolución de
Triángulos Oblicuángulos

BIBLIOGRAFÍA

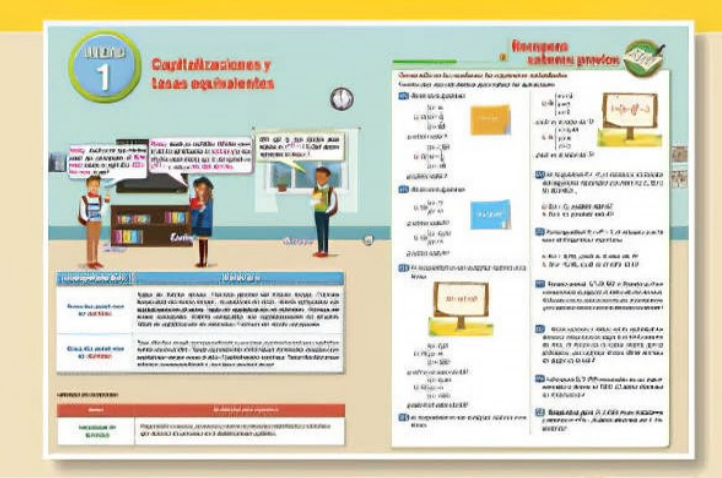
Se presenta una lista de libros con sus respectivos autores y editoriales que pueden ampliar y profundizar los temas tratados, donde también encontrarás anécdotas o hechos históricos relacionados con la matemática.


BIBLIOGRAFÍA

ÍNDICE

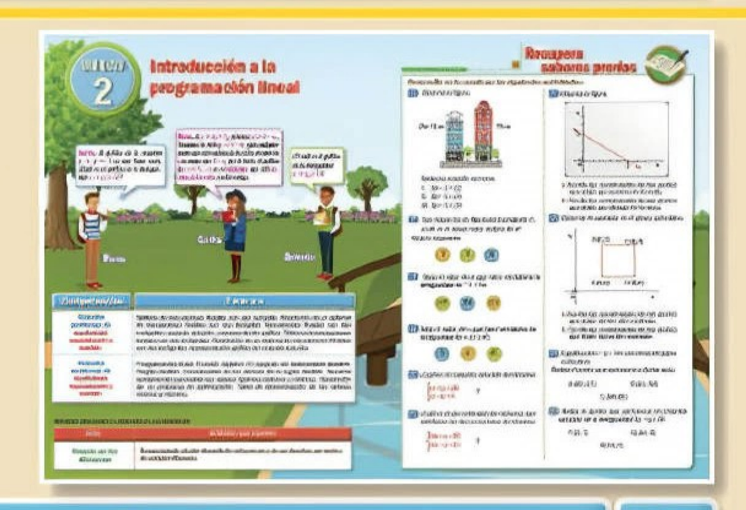


Capitalizaciones y tasas equivalentes





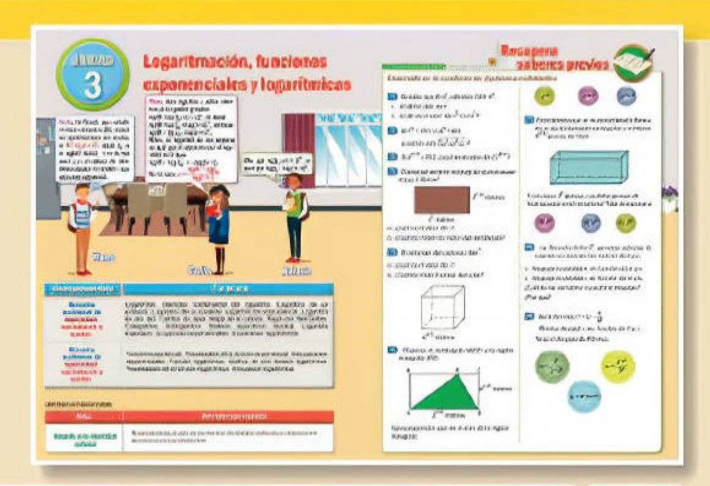
Introducción a la programación lineal





ÍNDICE

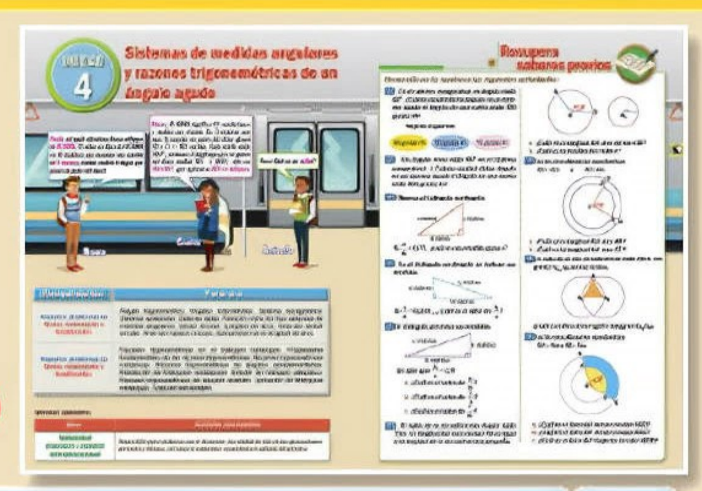




Logaritmación. funciones exponenciales y logaritmicas





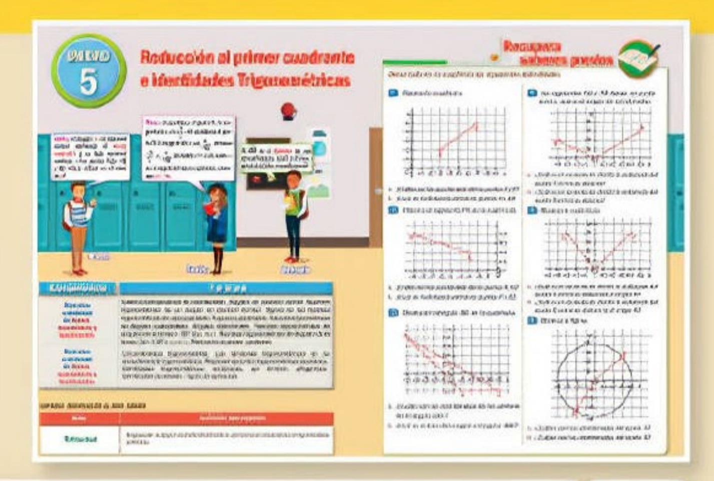


Sistemas de medidas triángulares y razones trigonométricas de un ángulo agudo



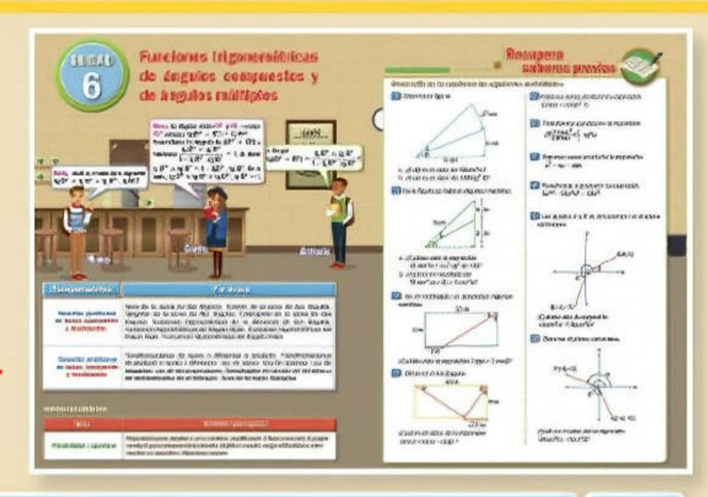
ÍNDICE





Reducción al primer cuadrante e identidades trigonométricas





Funciones trigonométricas de ángulos compuestos y ángulos multiples

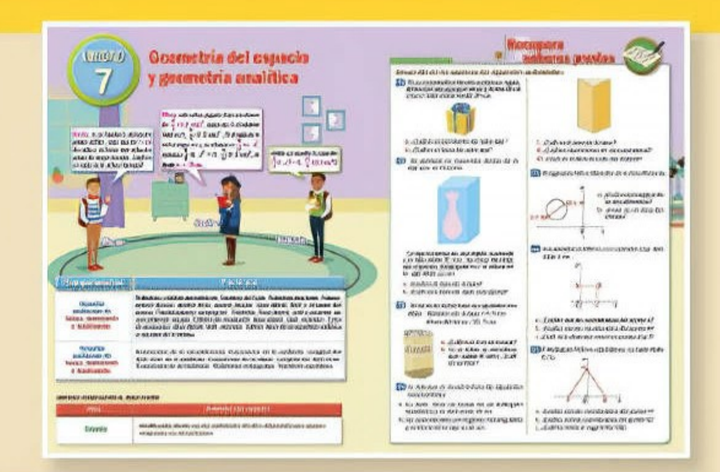




ÍNDICE

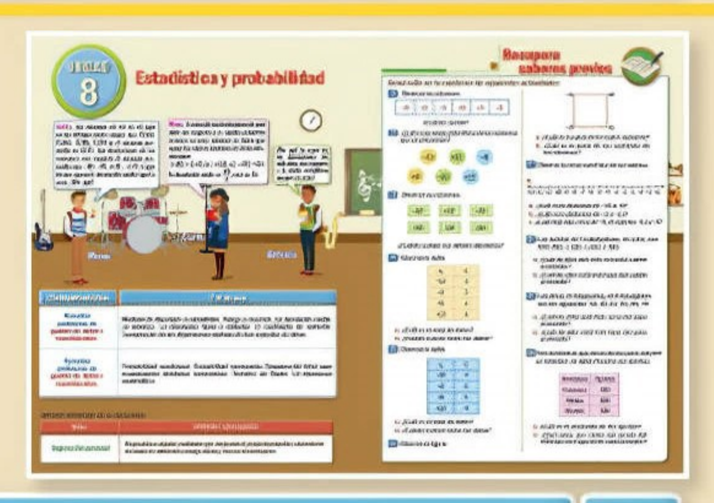


Geometría del espacio y geometría analítica





Estadística y probabilidad







Capitalizaciones y tasas equivalentes





Competencia	Temas
Resuelve problemas de cantidad.	Tasas de interés simple. Fórmula general del interés simple. Fórmula factorizada del monto simple . Ecuaciones de valor. Interés compuesto con capitalizaciones anuales. Tabla de capitalización de intereses. Fórmula del monto compuesto. Interés compuesto con capitalizaciones no anuales. Tabla de capitalización de intereses. Fórmula del monto compuesto.
Resuelve problemas de cantidad.	Tasa efectiva anual correspondiente a una tasa nominal anual que capitaliza varias veces al año. Tasas equivalentes entre tasas nominales anuales que capitalizan varias veces al año. Capitalización continua. Tasa efectiva anual máxima correspondiente a una tasa nominal anual.

ENFOQUE DE DERECHOS

Valor	Actitudes que suponen
Conciencia de derechos	Disposición a conocer, reconocer y valorar los derechos individuales y colectivos que tenemos las personas en el ámbito privado y público.

Recupera saberes previos



Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:

Puedes usar una calculadora científica para realizar las operaciones.

1 Observa la igualdad.



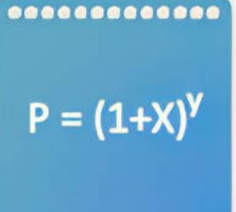
a. Si $\begin{cases} x = 8 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 60 \end{cases}$

¿cuánto vale A?

b. Si $\begin{cases} x = 240 \\ y = \frac{7}{8} \\ z = 48 \end{cases}$

¿cuánto vale A?

2 Observa la igualdad.



a. Si $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

¿cuánto vale P?

b. Si $\begin{cases} x = 0{,}25 \\ y = 3 \end{cases}$

¿cuánto vale P?

3 En la igualdad se van a asignar valores a sus letras.



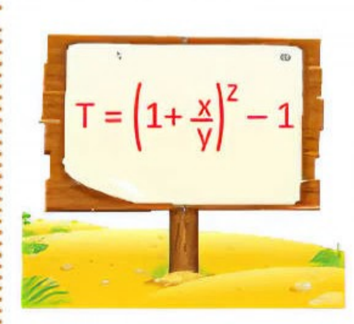
a. Si $\begin{cases} x = 0{,}8 \\ y = 6 \\ z = 300 \end{cases}$

¿cuál es el valor de M?

b. Si $\begin{cases} x = 0{,}36 \\ y = 5 \\ z = 240 \end{cases}$

¿cuál es el valor de M?

4 En la igualdad se van a asignar valores a sus letras.



a. Si $\begin{cases} x = 12 \\ y = 3 \\ z = 6 \end{cases}$

¿cuál es el valor de T?

b. Si $\begin{cases} x = 0{,}48 \\ y = 6 \\ z = 5 \end{cases}$

¿cuál es el valor de T?

5 En la igualdad $A = \mathbf{e}^x$, el número **e** es la base del logaritmo neperiano y su valor es 2,718 2 81 828 459...

a. Si x = 4, ¿cuánto vale A?
b. Si x = 6, ¿cuánto vale A?

6 En la igualdad $B = \mathbf{e}^x - 1$, el número **e** es la base del logaritmo neperiano.

a. Si x = 0,36, ¿cuál es el valor de B?
b. Si x = 0,48, ¿cuál es el valor de B?

7 Susana presta S/ 18 000 a Donato y él se compromete a pagarle el 20% cada fin de mes. Si Susana no le cobra interés por el préstamo, ¿en cuántos meses cancela Donato su deuda?

8 Victor presta a Silvia cierta cantidad de dinero y ella promete pagarle el 25% cada fin de mes. Si Victor no le cobra interés por el préstamo, ¿en cuántos meses Silvia termina de pagar su deuda?

9 Julio gana S/ 3 000 mensuales en un supermercado y ahorra el 18%. ¿Cuánto ahorrará en 4 bimestres?

10 Magdalena gana S/ 4 500 en un ministerio y ahorra el 27%. ¿Cuánto ahorrará en 5 trimestres?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad.	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con tablas de capitalización de intereses y lenguaje númerico su comprensión sobre el interés compuesto y la tasa de interés compuesto para capitalizaciones anuales o en periodos inferiores a un año.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Emplea las propiedades operativas de los logaritmos para despejar el tiempo en la fórmula del monto compuesto cuando se conoce el valor de las otras variables que intervienen.

Interés simple y ecuaciones de valor

Interés simple

Mateo presta S/ 1 000 a Norma con la condición de que ella le pague S/ 1 300 después de un año. ¿Cuál es la tasa de interés?

Por prestar su dinero Mateo ganará S/ 300; esta ganancia con respecto a los S/ 1 000 que prestó es $\frac{S/\ 300}{S/\ 1\ 000}$, que es equivalente a $\frac{S/\ 30}{S/\ 100}$, esto es el 30% y es la tasa de interés anual porque la ganancia se conseguirá en un año.

La tasa de interés se representa por i.

El dinero que presta Mateo se denomina capital y se representa por c.

La ganancia que obtiene Mateo es el interés de un año, entonces

$$\frac{\text{Interés de un año}}{\text{capital}} = \text{tasa anual}$$

se deduce que: Interés de un año = capital x tasa anual

Si el capital se presta por n años, entonces

Interés total = capital x tasa anual x n años

La fórmula es: $I = c \times i_A \times n_A$

Si el tiempo está expresado en meses (n_M), se usa la tasa mensual (i_M) y la fórmula del interés total (I) es

$$I = c \times i_M \times n_M$$

Si el tiempo está expresado en días (n_D), se usa la tasa diaria (i_D) y la fórmula del interés total (I) es

$$I = c \times i_D \times n_D$$

El interés simple es la ganancia que genera una cantidad de dinero cuando se presta, deposita o invierte a una determinada tasa de interés y por un cierto tiempo.
La cantidad de dinero que se presta, deposita o invierte es el capital y se representa por c.
El tiempo es la duración del préstamo y se representa por n, se puede expresar en años, semestres, cuatrimestres, trimestres, bimestres, meses, días.
La tasa de interés es el tanto por ciento o tanto por uno, se representa por i. Por ejemplo, 36% es el tanto por ciento, que significa $\frac{36}{100}$ o "36 por cada 100". Si se divide 36 ÷ 100, se obtiene 0,36 que es el tanto por uno, porque $0{,}36 = \frac{0{,}36}{1}$, que significa "0,36 por cada 1".

La fórmula general para calcular el interés simple (I) es:

Interés = capital x tasa por periodo x número de periodos

que en forma abreviada es: $I = c \times i_p \times n_p$

donde:
I = interés o ganancia
c = capital
i_p = tasa por periodo
n_p = número de periodos

Siempre se debe usar una tasa de interés de acuerdo a la unidad en que esté expresado el tiempo.
Si al capital (c) se suma el interés simple (I), se obtiene el monto a interés simple o monto simple (M).

Monto = capital + interés simple
o $M = c + I$

1 Mónica presta S/ 16 000 a César al 45% anual por 3 años.

a. ¿Cuál es el interés simple que genera dicho préstamo?
b. ¿Cuál es el monto que debe devolver César al final del tercer año?

Resolución

a. Conocemos lo siguiente:

c = S/ 16 000
$i = 45\%$ anual $= \frac{45}{100}$ anual = 0,45 anual
n = 3 años

Aplicamos la fórmula del interés simple.

$I = c \times i_p \times n_p$

Como el tiempo (n) está expresado en años, la tasa (i) debe ser anual.

$I = c \times i_A \times n_A$

I = S/ 16 000 x 0,45 x 3 **I = S/ 21 600**

Rpta. El préstamo genera S/ 21 600 de interés simple.

b. Calculamos el monto (M) a interés simple.

$M = c + I$

M = S/ 16 000 + S/ 21 600 **M = S/ 37 600**

Rpta. César debe devolver S/ 37 600 al final del tercer año.

2 Marco Antonio presta S/ 30 000 a Verónica al 36% anual por 9 trimestres.

a. ¿Cuál es el interés simple que genera dicho préstamo?
b. ¿Cuál es el monto que debe devolver Verónica después de los 9 trimestres?

Resolución

a. Conocemos lo siguiente:

$c = S/\ 30\ 000$

$i = 36\%\ \text{anual} = \frac{36}{100}\ \text{anual} = 0{,}36\ \text{anual}$

$n = 9\ \text{trimestres}$

Aplicamos la fórmula del interés simple.

$$I = c \times i_P \times n_P$$

Como el tiempo (n) está expresado en trimestres , la tasa (i) debe ser trimestral.

$$I = c \times i_T \times n_T$$

$$I = S/\ 30\ 000 \times \frac{0{,}36}{4} \times 9$$

$$I = S/\ 24\ 300$$

Rpta. El préstamo genera S/ 24 300 de interés simple.

b. Calculamos el monto (M) a interés simple.

$$M = c + I$$

$$M = S/\ 30\ 000 + S/\ 24\ 300$$

$$M = S/\ 54\ 300$$

Rpta. Verónica debe devolver s/ 54 300.



a. i_T significa "tasa trimestral"

b. n_T significa "número de trimestres"

c. $\text{tasa trimestral} = \frac{\text{tasa anual}}{4}$

$$i_T = \frac{i_A}{4}$$

$$i_T = \frac{0{,}36}{4}$$

$$i_T = 0{,}09$$

3 Magdalena presta S/ 9 600 a Pilar al 12% trimestral por 14 bimestres.

a. ¿Cuál es el interés simple que genera dicho préstamo?
b. ¿Cuál es el monto que debe devolver Pilar después de los 14 bimestres?

Resolución

a. Conocemos lo siguiente:

$c = S/\ 9\ 600$

$i = 12\%\ \text{trimestral} = \frac{12}{100}\ \text{trimestral} = 0{,}12\ \text{trimestral}$

$n = 14\ \text{bimestres}$

Aplicamos la fórmula del interés simple.

$$I = c \times i_P \times n_P$$

Como el tiempo (n) está expresado en bimestres , la tasa (i) debe ser bimestral.

$$I = c \times i_B \times n_B$$

$$I = S/\ 9\ 600 \times \frac{0{,}12 \times 4}{6} \times 14$$

$$I = S/\ 10\ 752$$

Rpta. El préstamo genera S/ 10 752 de interés simple.

b. Calculamos el monto (M) a interés simple.

$$M = c + I$$

$$M = S/\ 9\ 600 + S/\ 10\ 752$$

$$M = S/\ 20\ 352$$

Rpta. Pilar debe devolver S/ 20 352.



a. tasa anual = tasa trimestral x 4

tasa anual = 0,12 x 4

b. $\text{tasa bimestral} = \frac{\text{tasa anual}}{6}$

$$i_B = \frac{0{,}12 \times 4}{6}$$

Monto a interés simple

El monto a interés simple o monto simple (M) es igual al capital prestado, depositado o invertido, más el interés simple generado por dicho capital.

$$\text{Monto} = \text{capital} + \text{interés simple}$$

$$\text{Monto} = c + \overbrace{c \times i_P \times n_P}$$

En el segundo miembro de la igualdad, tanto el capital como el interés simple tienen como factor común el capital (c), entonces se puede factorizar el segundo miembro.

$$\text{Monto} = c\,(1 + i_P \times n_P)$$

La fórmula factorizada del monto simple es: $M = c\,(1 + i_P \times n_P)$ donde:

M = monto simple

c = capital

i_P = tasa de interés por periodo

n_P = número de periodos

Esta fórmula permite calcular directamente el monto simple (M), sin tener que calcular el interés simple primero.

1 Mercedes prestó S/ 8 400 a Viviana al 45% anual de interés simple, por 10 bimestres. ¿Cuál es el monto que debe devolver Viviana?

Resolución

a. Conocemos lo siguiente:

c = S/ 8 400

$i = 45\%\text{ anual} = \frac{45}{100}\text{ anual} = 0{,}45\text{ anual}$

n = 10 bimestres

Aplicamos la fórmula del monto simple.

$$M = c\,(1 + i_P \times n_P)$$

Como el tiempo (n) está expresado en bimestres , la tasa (i) debe ser bimestral.

$$M = c\,(1 + i_B \times n_B)$$

$$M = \text{S/ } 8\,400 \left(1 + \frac{0{,}45}{6} \times 10\right)$$

$$M = \text{S/ } 14\,700$$

Rpta. El monto que debe devolver Viviana es S/ 14 700.

2 Carlos Alberto prestó S/ 10 500 a Genoveva al 15% trimestral de interés simple, por 14 meses. ¿Cuál es el monto que debe devolver Genoveva?.

Resolución

a. Conocemos lo siguiente:

c = S/ 10 500

$i = 15\%\text{ trimestral} = \frac{15}{100}\text{ trimestral} = 0{,}15\text{ trimestral}$

n = 14 meses

Aplicamos la fórmula del monto simple.

$$M = c\,(1 + i_P \times n_P)$$

Como el tiempo (n) está expresado en meses, la tasa (i) debe ser mensual.

$$M = c\,(1 + i_M \times n_M)$$

$$M = \text{S/ } 10\,500 \left(1 + \frac{0{,}15}{3} \times 14\right)$$

$$M = \text{S/ } 17\,850$$

Rpta. Genoveva debe devolver S/ 17 850 .

Ecuaciones de valor

En algunas ocasiones una persona se compromete a cancelar una deuda en una fecha determinada y con ciertas condiciones, que con el transcurso del tiempo sufren modificaciones, como adelantar el pago de una parte del total; entonces se trata de averiguar el valor de lo que falta cancelar al culminar el plazo inicialmente acordado.

1 Antonio se compromete a cancelar una deuda de S/ 60 000 al 48% anual dentro de 9 meses. Después de 4 meses paga S/ 40 000. ¿Cuánto debe pagar al cumplirse el plazo?.

Resolución

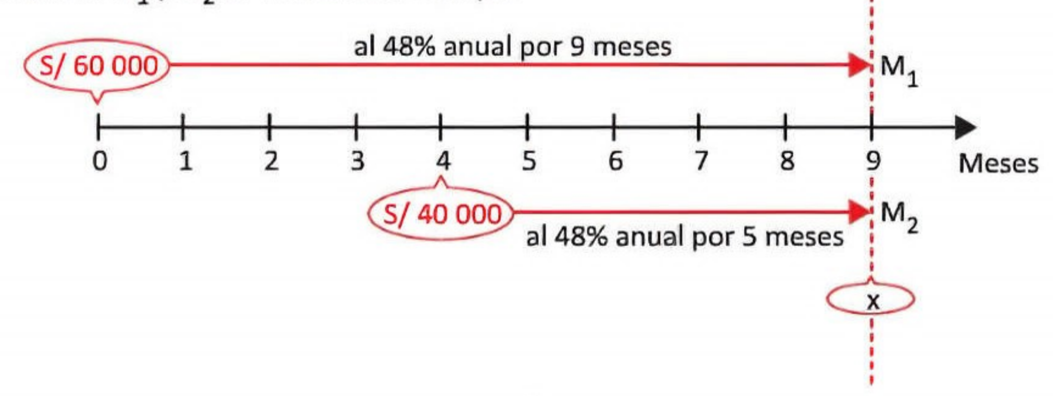
Inicialmente, Antonio dentro de 9 meses debe pagar el monto de S/ 60 000 al 48% por 9 meses.

$$M_1 = c\,(1 + i \times n)$$
$$M_1 = S/\ 60\,000\left(1 + \frac{0{,}48}{12} \times 9\right)$$
$$M_1 = S/\ 81\,600$$

Pero , después de 4 meses paga S/ 40 000, que después de 5 meses se convierte en el monto M_2.

$$M_2 = S/\ 40\,000\left(1 + \frac{0{,}48}{12} \times 5\right)$$

Ubicamos los montos M_1 y M_2 en una línea de tiempo.



La incógnita x representa la cantidad de dinero que Antonio debe pagar al cumplirse los 9 meses.

Se observa en la figura que

$$M_1 = M_2 + x$$

$$S/\ 60\,000\left(1 + \frac{0{,}48}{12} \times 9\right) = S/\ 40\,000\left(1 + \frac{0{,}48}{12} \times 5\right) + x$$

La igualdad anterior se denomina ecuación de valor.

Resolvemos la ecuación de valor.

$$S/\ 81\,600 = S/\ 48\,000 + x$$
$$S/\ 81\,600 - S/\ 48\,000 = x$$
$$S/\ 33\,600 = x$$
$$\therefore \quad x = S/\ 33\,600$$

Rpta.

Al cumplirse el plazo Antonio debe pagar S/ 33 600.

2 Fernando se compromete a cancelar una deuda a Hilda de S/ 80 000 al 30% anual dentro de 8 meses. Después de cierto tiempo, Fernando acuerda con Hilda en cancelar su deuda en dos partes, una de S/ 50 000 el quinto mes y otra al finalizar el año; Hilda aceptó con la condición de que su dinero gane el 36% anual de interés simple. ¿Cuánto debe pagar Fernando al finalizar el año?.

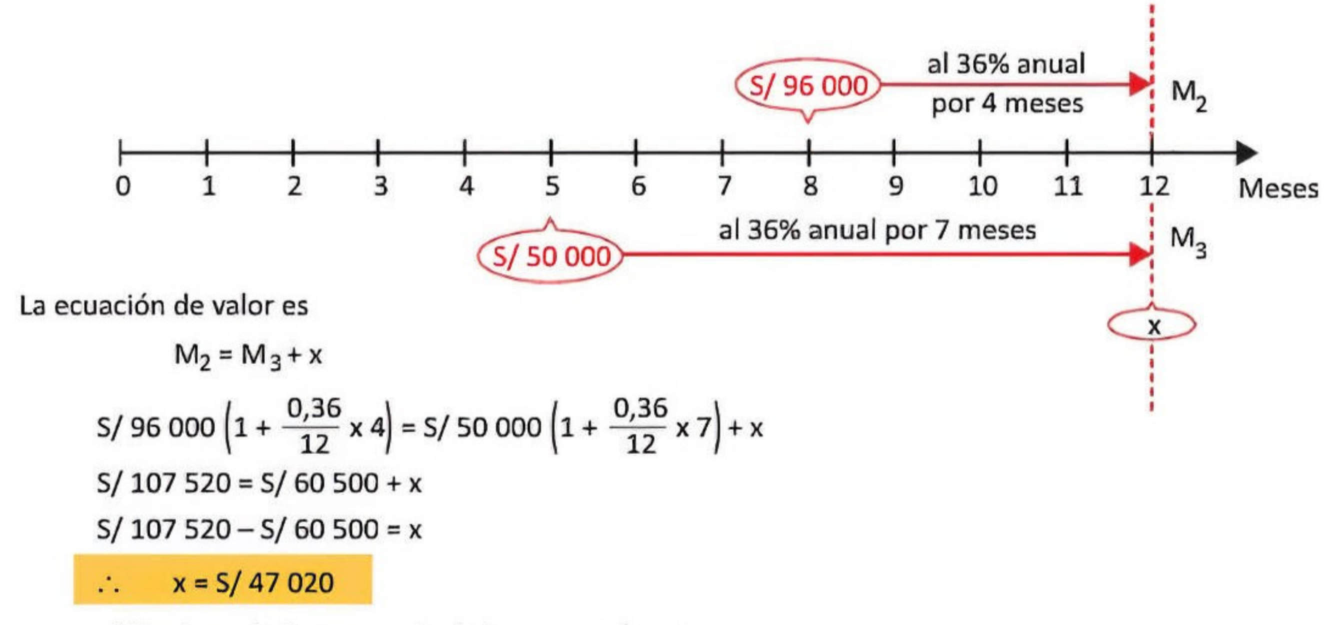
Resolución

Inicialmente, Fernando debe pagar a Hilda, dentro de 8 meses, el monto

$$M_1 = S/\ 80\,000\left(1 + \frac{0{,}30}{12} \times 8\right) = S/\ 96\,000$$

Pero, el quinto mes Fernando paga S/ 50 000 y al finalizar el año paga x.

Ubicamos las cantidades en una línea de tiempo.



La ecuación de valor es

$$M_2 = M_3 + x$$

$$S/\ 96\ 000\left(1 + \frac{0{,}36}{12} \times 4\right) = S/\ 50\ 000\left(1 + \frac{0{,}36}{12} \times 7\right) + x$$

$$S/\ 107\ 520 = S/\ 60\ 500 + x$$

$$S/\ 107\ 520 - S/\ 60\ 500 = x$$

$$\therefore \quad x = S/\ 47\ 020$$

Rpta. Al finalizar el año Fernando debe pagar S/ 47 020.

3 Roxana debe a Gabriela lo siguiente

a. S/ 8 000 a pagar dentro de 4 meses al 45% anual.
b. S/ 12 000 a pagar dentro de 7 meses al 36% anual.

Después de cierto tiempo, Roxana acuerda con Gabriela en cancelar su deuda en dos partes, una de S/ 15 000 al finalizar el quinto mes y otra al finalizar el décimo mes, cantidades que Gabriela espera que ganen el 48% anual de interés simple. ¿Cuánto debe pagar Roxana al finalizar el décimo mes?

Resolución

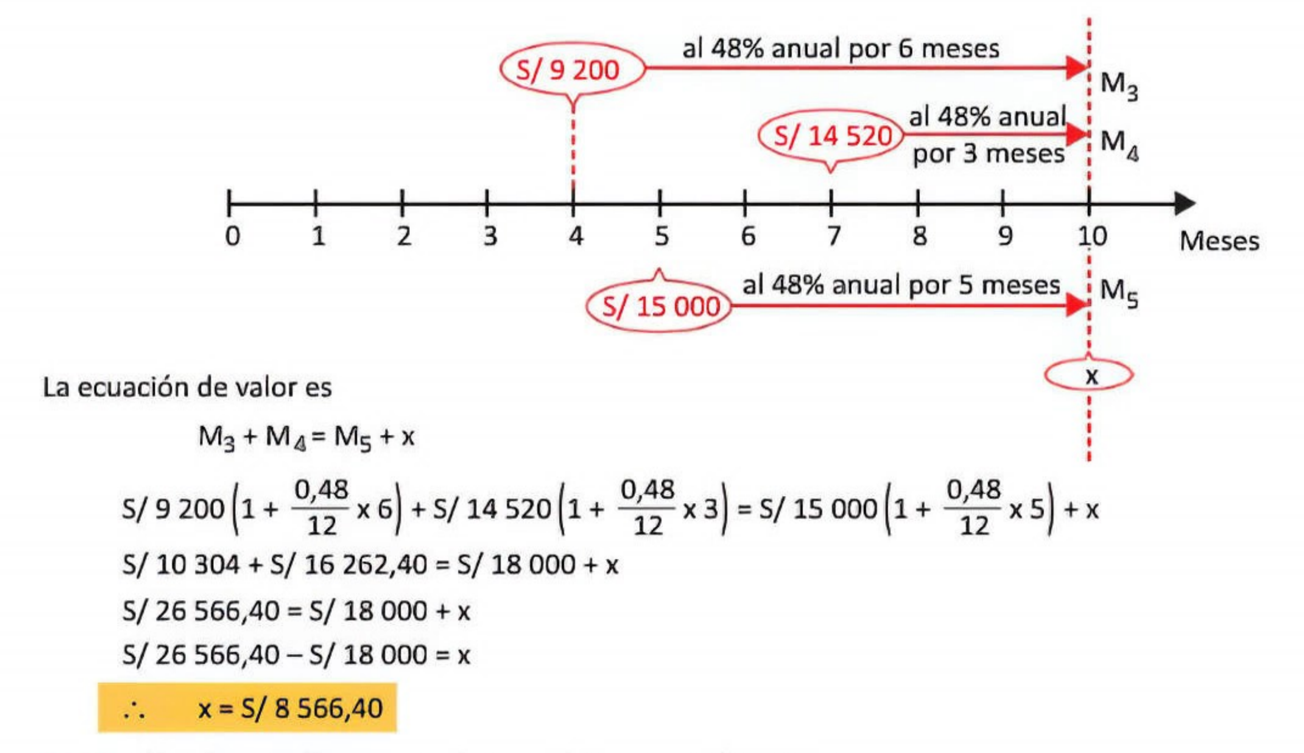
Inicialmente Roxana debe pagar los siguientes montos:

a. $M_1 = S/\ 8\ 000\left(1 + \frac{0{,}45}{12} \times 4\right) = S/\ 9\ 200$

b. $M_2 = S/\ 12\ 000\left(1 + \frac{0{,}36}{12} \times 7\right) = S/\ 14\ 520$

Pero, después de 5 meses Roxana paga S/ 15 000 y al finalizar el décimo mes paga x.

Ubicamos las cantidades en una línea de tiempo.



La ecuación de valor es

$$M_3 + M_4 = M_5 + x$$

$$S/\ 9\ 200\left(1 + \frac{0{,}48}{12} \times 6\right) + S/\ 14\ 520\left(1 + \frac{0{,}48}{12} \times 3\right) = S/\ 15\ 000\left(1 + \frac{0{,}48}{12} \times 5\right) + x$$

$$S/\ 10\ 304 + S/\ 16\ 262{,}40 = S/\ 18\ 000 + x$$

$$S/\ 26\ 566{,}40 = S/\ 18\ 000 + x$$

$$S/\ 26\ 566{,}40 - S/\ 18\ 000 = x$$

$$\therefore \quad x = S/\ 8\ 566{,}40$$

Rpta. Al finalizar el décimo mes Roxana debe pagar S/ 8 566,40.

Interés compuesto con capitalizaciones anuales

El Banco del Desarollo prestó S/20 000 por 3 años a Rubén capitalizable anualmente al 40%. ¿Cuánto debe pagar Rubén al banco después de 3 años?

Para saberlo vamos a realizar las siguientes operaciones:

Año 1

El interés generado es el 40% de S/ 20 000 .

40% de S/ 20 000 = $\frac{40}{100}$ x S/ 20 000 = S/ 8 000

El monto es S/ 20 000 + S/ 8 000 = S/ 28 000 .

Año 2

El capital del segundo año es el monto del primer año (S/ 28 000) ,

el interés generado es el 40% de S/ 28 000 .

40% de S/ 28 000 = $\frac{40}{100}$ x S/ 28 000 = S/ 11 200

El monto del segundo año es S/ 28 000 + S/ 11 200 = S/ 39 200 .

Año 3

El capital del tercer año es el monto del segundo año (S/ 39 200) ,

el interés generado es el 40% de S/ 39 200 .

40% de S/ 39 200 = $\frac{40}{100}$ x S/ 39 200 = S/ 15 680

El monto del tercer año es S/ 39 200 + S/ 15 680 = S/ 54 880 .

El monto compuesto al finalizar el tercer año es S/ 54 880 y esta es la cantidad de dinero que Rubén debe pagar al banco después de 3 años.

La siguiente tabla muestra la capitalización de intereses, cada año, al 40% anual.

Año	Capital	Interés	Monto
1	S/ 20 000	S/ 8 000	S/ 28 000
2	S/ 28 000	S/ 11 200	S/ 39 200
3	S/ 39 200	S/ 15 680	S/ 54 880
Total		S/ 34 880	

Interés compuesto (S/ 34 880) — Monto compuesto (S/ 54 880)

El interés compuesto es la diferencia del monto compuesto (M) y el capital inicial (C_0) .

Interés compuesto = Monto compuesto – Capital inicial

Interés compuesto = S/ 54 880 – S/ 20 000

Interés compuesto = S/ 34 880

Otra forma de obtener el interés compuesto es sumar los intereses de cada año.

Interés compuesto = $I_1 + I_2 + I_3$

= S/ 8 000 + S/ 11 200 + S/ 15 680

= S/ 34 880

El interés compuesto es la ganancia que se obtiene al prestar, depositar o invertir una cantidad de dinero por un determinado tiempo y a una tasa de interés compuesto.

Es compuesto porque el interés del primer año se suma al capital que lo ha generado y forma un capital mayor para el segundo año; en el segundo año el interés generado se suma al capital que lo ha generado y forma un capital mayor para el tercer año y así sucesivamente hasta culminar un plazo acordado.

Cada año, el interés generado se suma al capital, es decir, se convierte en capital, a esto se le denomina capitalización de intereses.

A partir del segundo año, cada año el capital es mayor y el interés que genera también es mayor.
El interés compuesto es la diferencia del monto y el capital inicial.

La siguiente tabla presenta la capitalización de intereses de un capital inicial C_0 a una tasa de interés anual i por n años.

Tasa anual: i

Año	Capital	Interés	Monto
1	C_0	$C_0 \times i$	$C_0 (1 + i)$
2	$C_0 (1 + i)$	$C_0 (1 + i) \times i$	$C_0 (1 + i)^2$
3	$C_0 (1 + i)^2$	$C_0 (1 + i)^2 \times i$	$C_0 (1 + i)^3$
4	$C_0 (1 + i)^3$	$C_0 (1 + i)^3 \times i$	$C_0 (1 + i)^4$
⋮	⋮	⋮	⋮
n			$C_0 (1 + i)^n$

Monto compuesto

En la tabla, observa la columna de los montos, todos tienen la expresión $C_0 (1 + i)$, se diferencian solamente en el exponente de $(1 + i)$.

Año 1 ⟶ monto = $C_0 (1 + i)^1$
Año 2 ⟶ monto = $C_0 (1 + i)^2$
Año 3 ⟶ monto = $C_0 (1 + i)^3$
Año 4 ⟶ monto = $C_0 (1 + i)^4$
Año 5 ⟶ monto = $C_0 (1 + i)^5$
⋮
Año n ⟶ monto = $C_0 (1 + i)^n$

El exponente de $(1 + i)$ es igual al número del año; entonces el monto compuesto (M) para capitalizaciones anuales es:

$$M = C_0 (1 + i)^n$$

donde:
- M = monto compuesto
- C_0 = capital inicial
- i = tasa anual
- n = número de años

1 El Banco de la Nación prestó S/ 30 000 por 5 años a José capitalizable anualmente al 50%. ¿Cuánto debe pagar José al banco después de 5 años?

Resolución:

Se conoce lo siguiente:

C_0 = S/ 30 000
i = 50% anual = 0,50 anual.
n = 5 años

Se aplica la fórmula del monto compuesto (M).

$M = C_0\ (1 + i)^n$

$M = S/\ 30\,000\ (1 + 0{,}50)^5$

$M = S/\ 30\,000\ (1{,}50)^5$

$M = S/\ 227\,812{,}5$

Rpta: Después de 5 años, José debe pagar S/ 227 812,5 al banco.

2 El Banco de los Grandes presta dinero al 45% anual y capitaliza anualmente los intereses. Pamela obtuvo un préstamo de S/ 50 000 en dicho banco, para pagarlo después de 4 años. ¿Cuánto debe pagar Pamela al banco? ¿Cuál es el interés compuesto que debe pagar Pamela al banco?

Resolución:

Se conoce lo siguiente:

$C_0 = S/\ 50\,000$
i = 45% anual = 0,45 anual
n = 4 años

Se aplica la fórmula del monto compuesto (M)

$M = C_0\ (1 + i)^n$

$M = S/\ 50\,000\ (1 + 0{,}45)^4$

$M = S/\ 50\,000\ (1{,}45)^4$

$M = S/\ 221\,025{,}31$

Rpta: Después de 4 años, Pamela debe pagar S/221 025,31.

Interés compuesto $= M - C_0$
$= S/\ 221\,025{,}31 - S/\ 50\,000$
$= S/\ 171\,025{,}31$

3 Pedro presta S/ 40 000 a Javier por 5 años, con las siguientes condiciones:

a. Los dos primeros años al 50% anual, capitalizable anualmente.

b. El resto del tiempo al 30% anual, capitalizable anualmente.

¿Cuánto dinero debe pagar Javier a Pedro después de 5 años?

Resolución:

a. El monto después de los dos primeros años es:

$M_1 = S/\ 40\,000\ (1 + 0{,}50)^2$

$M_1 = S/\ 40\,000\ (1{,}50)^2$

$M_1 = S/\ 90\,000$

b. El monto después de los tres años siguientes es:

$M_2 = M_1\ (1 + 0{,}30)^3$

$M_2 = S/\ 90\,000\ (1 + 0{,}30)^3$

$M_2 = S/\ 90\,000\ (1{,}30)^3$

$M_2 = S/\ 197\,730$

Rpta: Después de 5 años, Javier debe pagar S/ 197 730 a Pedro.

Interés compuesto con capitalizaciones no anuales

El Banco del Crecimiento presta a Rafaela S/ 30 000 por 2 años, al 40% anual capitalizable semestralmente. ¿Cuánto debe pagar Rafaela al banco después de 2 años?

La capitalización es semestral, entonces para calcular el interés de cada semestre se debe emplear la tasa semestral.

La tasa semestral es $\frac{40\%}{2} = 20\%$

Semestre 1: El interés es el 20% de S/ 30 000.

20% de S/ 30 000 = $\frac{20}{100}$ x S/ 30 000 = S/ 6 000

El monto del primer semestre es S/ 30 000 + S/ 6 000 = S/36 000.

Semestre 2: El interés es el 20% de S/ 36 000.

20% de S/ 36 000 = $\frac{20}{100}$ x S/ 36 000 = S/ 7 200

El monto del segundo semestre es S/ 36 000 + S/ 7 200 = S/43 200.

Semestre 3: El interés es el 20% de S/ 43 200

20% de S/ 43 200 = $\frac{20}{100}$ x S/ 43 200 = S/ 8 640

El monto del tercer semestre es S/ 43 200 + S/ 8 640 = S/ 51 840.

Semestre 4: El interés es el 20% de S/ 51 840

20% de S/ 51 840 = $\frac{20}{100}$ x S/ 51 840 = S/ 10 368

El monto del cuarto semestre es S/ 51 840 + S/ 10 368 = S/ 62 208.

Rpta: Rafaela debe pagar al banco S/ 62 208 después de 2 años.

La tabla muestra el proceso de capitalización de intereses.

Tasa semestral = 20% = 0,20

Semestre	Capital	Interés	Monto
1	S/ 30 000	S/ 6 000	S/ 36 000
2	S/ 36 000	S/ 7 200	S/ 43 200
3	S/ 43 200	S/ 8 640	S/ 51 840
4	S/ 51 840	S/ 10 368	S/ 62 208
Total		S/ 32 208	

Interés compuesto (S/ 32 208) — Monto compuesto (S/ 62 208)

En esta parte la tasa anual no trabaja, por esto se denomina tasa nominal anual y se representa por J. El número de capitalizaciones al año se representa por m.

Para obtener la tasa por periodo de capitalización se divide J entre m, como se verá en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1 36% anual capitalizable mensualmente

$$\begin{cases} J = 36\% \text{ anual} \\ m = 12 \text{ capitalizaciones al año} \end{cases}$$

Tasa mensual: $i_M = \frac{J}{m} = \frac{36\%}{12} = 3\% = 0{,}03$

Ejemplo 2 30% anual capitalizable bimestralmente

$$\begin{cases} J = 30\% \text{ anual} \\ m = 6 \text{ capitalizaciones al año} \end{cases}$$

Tasa bimestral: $i_B = \frac{J}{m} = \frac{30\%}{6} = 5\% = 0,05$

Ejemplo 3 44% anual capitalizable trimestralmente.

$$\begin{cases} J = 44\% \text{ anual} \\ m = 4 \end{cases}$$

Tasa trimestral: $i_T = \frac{44\%}{4} = 11\% = 0,11$

Ejemplo 4 24% anual capitalizable semestralmente.

$$\begin{cases} J = 24\% \text{ anual} \\ m = 2 \end{cases}$$

Tasa semestral: $i_S = \frac{24\%}{2} = 12\% = 0,12$

Para capitalizaciones anuales, la fórmula del monto (M) es:

$$M = C_0(1 + i)^n$$

n ← número de años; i ← tasa anual

Para capitalizaciones no anuales, en lugar de la "tasa anual" se escribe la "tasa por periodo de capitalización" y en lugar de "número de años" se escribe "número de periodos de capitalización", entonces

$$M = C_0(1 + \text{tasa por periodo de capitalización})^{\text{número de periodos de capitalización}}$$

Si representamos:

a. tasa por periodo de capitalización por $\frac{J}{m}$,

b. número de periodos de capitalización por "m x n",

tendremos que $M = C_0\left(1 + \frac{J}{m}\right)^{m \times n}$ donde

- M = monto compuesto
- C_0 = capital inicial
- J = tasa nominal anual
- m = número de capitalizaciones al año
- n = número de años

1 El Banco del Crecimiento presta a Rafaela S/ 30 000 por 2 años, al 40% anual capitalizable semestralmente. ¿Cuánto debe pagar Rafaela al banco después de 2 años?¿Cuál es el interés compuesto?

Resolución

a. Datos:

C_0 = S/ 30 000
n = 2 años
J = 40% anual = 0,40 anual
m = 2 capitalizaciones al año

$$M = C_0\left(1 + \frac{J}{m}\right)^{m \times n}$$

$$M = S/\ 30\,000\left(1 + \frac{0,40}{2}\right)^{2 \times 2}$$

$$M = S/\ 30\,000\,(1 + 0,20)^4$$

$$M = S/\ 30\,000\,(1,20)^4$$

$$\therefore\ M = S/\ 62\,208$$

Rpta: Después de 2 años, Rafaela debe pagar S/ 62 208 al banco.

b. Cálculo del interés compuesto (I_C)

$I_C = M - C_0$

I_C = S/ 62 208 – S/ 30 000 = S/ 32 208

Rpta: El interés compuesto es S/ 32 208.

2 El Banco de las Regiones presta a Fernando S/ 60 000 por 3 años, al 36% anual capitalizable trimestralmente.

a. Después de 3 años, ¿cuánto debe pagar Fernando al banco?

b. ¿Cuál es el interés compuesto que pagará Fernando después de 3 años?

Resolución:

a. Datos

C_0 = S/ 60 000
n = 3 años
J = 36% anual = 0,36 anual
m = 4 capitalizaciones al año

$$M = C_0\left(1+\frac{J}{m}\right)^{m \times n}$$

$$M = S/\ 60\,000\left(1+\frac{0,36}{4}\right)^{4 \times 3}$$

$$M = S/\ 60\,000\,(1+0,09)^{12}$$

$$M = S/\ 60\,000\,(1,09)^{12}$$

$$\therefore\ M = S/\ 168\,759,89$$

Rpta: Después de 3 años, Fernando debe pagar S/ 168 759,89 al banco.

b. Cálculo del interés compuesto

$I_C = M - C_0$ = S/ 168 759, 89 – S/ 60 000 = S/ 108 759,89

Rpta: Después de 3 años, Fernando debe pagar S/ 108 759,89 de interés compuesto.

3 El Banco textil presta a Guadalupe S/ 90 000 por 4 años, al 48% anual capitalizable mensualmente.

a. Después de 4 años, ¿cuánto debe pagar Guadalupe al banco?

b. ¿Cuál es el interés compuesto que pagará Guadalupe después de 4 años?

Resolución:

a. Datos:

C_0 = S/ 90 000
n = 4 años
J = 48% anual = 0,48 anual
m = 12

$$M = C_0\left(1+\frac{J}{m}\right)^{m \times n}$$

$$M = S/\ 90\,000\left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12 \times 4}$$

$$M = S/\ 90\,000\,(1+0,04)^{48}$$

$$M = S/\ 90\,000\,(1,04)^{48}$$

$$\therefore\ M = S/\ 591\,347,54$$

Rpta: Después de 4 años, Guadalupe debe pagar S/ 591 347,54 .

b. Cálculo del interés compuesto

$I_C = M - C_0$ = S/ 591 347,54 –S/ 90 000 = S/ 501 347,54.

Rpta: Después de 4 años, Guadalupe debe pagar S/ 501 347,54 de interés compuesto.

Amplía tus conocimientos



1 ¿Cuál es el capital que colocado al 36% anual de interés simple produjo un monto de S/27 000 durante un año, 7 meses y 6 días?

Resolución:

C = ??

i = 36% anual = 0,36 anual

M = S/ 27 000

n = un año, 7 meses y 6 días

Expresamos el tiempo (n) en días:

un año = 360 días +
7 meses = 210 días
6 días

n = 576 días

Se conoce el monto (M), entonces usamos la fórmula del monto simple:

$M = C\,(1 + i_D \times n_D)$

$S/\ 27\,000 = C\,(1 + \frac{0,36}{360} \times 576)$

$S/\ 27\,000 = C\,(1,576)$

Despejamos el capital: $C = \frac{S/\ 27\,000}{1,576}$

C = S/ 17 131,98

Rpta: El capital es S/ 17 131,98

2 ¿A qué tasa de interés anual simple estuvieron colocados S/24 000 durante 26 semanas para obtener S/ 4 800 de interés?

Resolución:

i = ??

C = S/ 24 000

n = 26 semanas

I = S/ 4 800

El tiempo está expresado en semanas, entonces usamos la tasa semanal en la fórmula del interés simple.

$I = C \times i_S \times n_S$

$S/\ 4\,800 = S/\ 24\,000 \times \frac{i}{52} \times 26$

Despejamos la tasa anual (i):

$i = \frac{S/\ 4\,800 \times 52}{S/\ 24\,000 \times 26}$

i = 0,4 = 0,40

i = 40% anual

Rpta: Estuvieron colocados al 40% anual.

3 ¿Qué tiempo debe transcurrir para que el interés obtenido sea igual al capital, al 25% anual de interés simple?

Resolución:

n = ??

I = C

i = 25% anual = 0,25 anual

La tasa de interés es anual, entonces el tiempo se debe expresar en años en la fórmula del interés simple.

$I = C \times i_A \times n_A$

$C = C \times 0,25 \times n_A$

Cancelamos el capital (C) en ambos miembros de la igualdad y tendremos:

$1 = 0,25 \times n_A$

Despejamos el tiempo (n_A):

$n_A = \frac{1}{0,25}$

n_A = 4 años

Rpta: Deben transcurrir 4 años.

4 ¿ Qué tiempo debe transcurrir para que un capital se triplique al 30% anual de interés simple?

Resolución:

n = ??

M = 3C

i = 30% anual = 0,30 anual

La tasa de interés es anual, entonces el tiempo se debe expresar en años en la fórmula del monto simple.

$M = C\,(1 + i_A \times n_A)$

$3C = C\,(1 + 0,30 \times n_A)$

Cancelamos el capital (C) en ambos miembros de la igualdad y tendremos:

$3 = 1 + 0,30 \times n_A$

$2 = 0,30 \times n_A$

Despejamos el tiempo (n_A):

$n_A = \frac{2}{0,30} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} = 6 \text{ años} + \frac{2}{3}\ (12 \text{ meses})$

n_A = 6 años y 8 meses

Rpta: Deben transcurrir 6 años y 8 meses.

5 Pablo prestó a Miriam cierta cantidad de dinero, con la condición de que ella le devuelva S/5 490; Miriam se dio cuenta de que debía pagar un interés simple que era la quinta parte de lo que le había prestado. ¿Cuánto le prestó Pablo?

Resolución:

$C = ??$

$M = S/\ 5\ 490$

$I = \frac{C}{5}$

Se sabe que:

Monto = capital + interés

$S/\ 5\ 490 = C + \frac{C}{5}$

$C = \frac{S/\ 5\ 490 \times 5}{6}$

$C = S/\ 4\ 575$

Rpta: Pablo le prestó S/ 4 575 .

6 El Banco Real paga el 6% anual de interés por ahorros y capitaliza anualmente los intereses. ¿Cuánto deberá ahorrar Priscila para obtener un monto de S/ 40 000 después de 4 años?

Resolución:

$i = 6\%$ anual $= 0,06$ anual

$C_0 = ??$

$M = S/\ 40\ 000$

$n = 4$ años

Empleamos la fórmula del monto compuesto (M):

$M = C_0\,(1 + i)^n$

$S/\ 40\ 000 = C_0\,(1 + 0,06)^4$

$S/\ 40\ 000 = C_0\,(1,06)^4$

Despejamos el capital inicial (C_0):

$C_0 = \frac{S/\ 40\ 000}{(1,06)^4}$

$C_0 = S/\ 31\ 683,75$

Rpta: Priscila deberá ahorrar S/ 31 683,75.

7 Un capital de S/ 25 000 se depositó en un banco que capitalizaba anualmente los intereses, durante 4 años y generó S/ 7 161,66 de intereses. ¿Cuál fue la tasa anual?

Resolución:

$C_0 = S/\ 25\ 000$

$n = 4$ años

$I_C = S/\ 7\ 161,66$

$i = ??$

Primero calculamos el monto compuesto (M):

$M = C_0 + I_C$

$M = S/\ 25\ 000 + S/\ 7\ 161,66$

$M = S/\ 32\ 161,\ 66$

Ahora empleamos la fórmula del monto compuesto.

$M = C_0\,(1 + i)^n$

$S/\ 32\ 161,66 = S/\ 25\ 000\ (1 + i)^4$

$\frac{S/\ 32\ 161,66}{S/\ 25\ 000} = (1 + i)^4$

$1,286\ 466\ 4 = (1 + i)^4$

Extraemos la raíz de índice 4 a ambos miembros de la igualdad:

$\sqrt[4]{1,286\ 466\ 4} = \sqrt[4]{(1 + i)^4}$

$1,065 = 1 + i$

$1,065 - 1 = i$

$0,065 = i$

$\therefore i = 6,5\%$ anual

Rpta: La tasa anual fue 6,5%.

8 El Banco Imperial paga el 6% anual y capitaliza anualmente los intereses. ¿Qué tiempo debe estar depositado S/ 120 000 para que produzca S/ 22 921,92 de intereses?

Resolución

Información:

$i = 6\%$ anual $= 0,06$ anual

$n = ??$

$C_0 = S/\ 120\ 000$

$I_C = S/\ 22\ 021,92$

Calculamos el monto compuesto (M):

$M = C_0 + I_C$

$M = S/\ 120\ 000 + S/\ 22\ 921,92$

$M = S/\ 142\ 921,92$

Empleamos la fórmula del monto compuesto (M):

$M = C_0\,(1 + i)^n$

$S/\ 142\ 921,92 = S/\ 120\ 000\ (1 + 0,06)^n$

$\frac{S/\ 142\ 921,92}{S/\ 120\ 000} = (1,06)^n$

Tomamos logaritmo a ambos miembros para bajar la incógnita n del segundo miembro.

$$\log \frac{S/\ 142\ 921{,}92}{S/\ 120\ 000} = n \log (1{,}06)$$

$$n = \frac{\log \dfrac{S/\ 142\ 921{,}92}{S/\ 120\ 000}}{\log (1{,}06)}$$

$$\therefore\ n = 3$$

Rpta: Debe estar depositado 3 años.

9 ¿A qué tasa anual se depositó S/ 20 000 durante 3 años, si capitalizándose trimestralmente produjo un monto de S/ 62 768,57?

Resolución:

Información:
J = ??
C_0 = S/ 20 000
n = 3 años
m = 4 trimestres en un año
M = S/ 62 768,57

Empleamos la fórmula del monto con varias capitalizaciones al año.

$$M = C_0\left(1 + \frac{J}{m}\right)^{mxn}$$

$$S/\ 62\ 768{,}57 = S/\ 20\ 000\left(1 + \frac{J}{4}\right)^{4x3}$$

$$\frac{S/\ 62\ 768{,}57}{S/\ 20\ 000} = \left(1 + \frac{J}{4}\right)^{12}$$

$$3{,}138\ 428\ 5 = \left(1 + \frac{J}{4}\right)^{12}$$

Extraemos la raíz de índice 12 a ambos miembros de la igualdad.

$$\sqrt[12]{3{,}138\ 428\ 5} = \sqrt[12]{\left(1 + \frac{J}{4}\right)^{12}}$$

$$1{,}10 = 1 + \frac{J}{4}$$

$$1{,}10 - 1 = \frac{J}{4}$$

$$0{,}10 = \frac{J}{4}$$

$$J = 0{,}10 \times 4$$

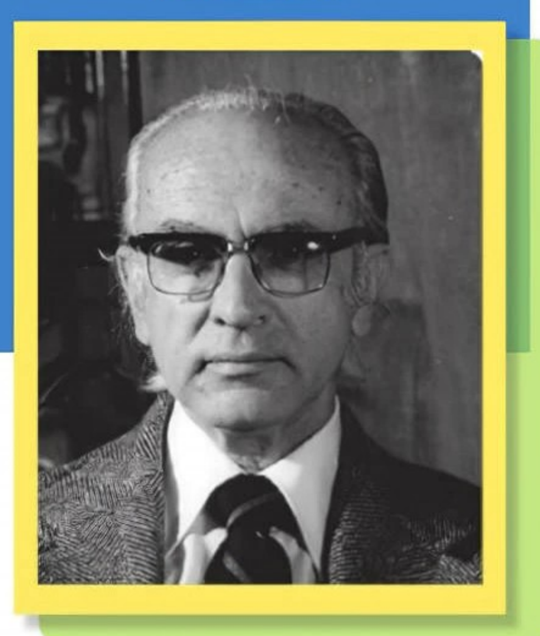
$$\therefore\ J = 0{,}40 = 40\%\ \text{anual}$$

Rpta: Se depositó al 40% anual.

José Tola Pasquel

(1914 - 1999)

Personaje de la Matemática



Nació en Lima el 12 de febrero de 1914. Estudió primaria en el colegio San José de Cluny de Barranco y secundaria en el colegio San Luis de los Hermanos Maristas de ese bello distrito.

Sus estudios superiores los realizó simultáneamente en dos universidades. Así, en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) se tituló de Ingeniero Civil (1938),y en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos se graduó de doctor en matemática con la tesis sobre la equivalencia de las dos formas de continuidad de operaciones por sucesiones y por vecindad en espacios topológicos (1941).

Fue catedrático de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), de la PUCP y de la UNMSM. En este último centro superior asumió la dirección del Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas entre 1945 y 1961.

Fue Decano de la Facultad de Ingeniería de la PUCP de 1947 a 1949, casa de estudios donde fue Rector entre 1977 y 1982. También fue director del Instituto de Matemáticas de la UNI entre 1962-1968.

Además asumió diversos cargos técnicos en el Ministerio de Fomento y Obras Públicas en donde fue Superintendente General del Servicio de Agua Potable de Lima. Prestó servicios de ingeniero en cálculos estructurales, en la cual fue el introductor de nuevas abstracciones algebraicas (lineal y multilineal, elasticidad, variaciones y control, además de la teoría cualitativa de óptimo, las ecuaciones diferenciales).

Ha sido Presidente de la Sociedad Matemática Peruana, Decano del Colegio de Ingenieros del Perú y Miembro del Comité Interamericano de Enseñanza de las Matemáticas. Asimismo, es Miembro de la Academia Peruana de la Lengua Española, del Instituto de Cultura Hispánica y de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Integró el Consejo Directivo en el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Concytec). En 1941 recibió el premio a la Investigación Científica de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de la cual es destacado miembro (presidente en 1977), y en 1975 se le otorgó el premio Nacional de Cultura en Ciencias Naturales y Matemáticas. También mereció la condecoración de Comendador de las Palmas Magisteriales.

Investiga:



1. ¿En qué gobierno del Perú, Jose Tola fué Ministro de fomento y obras públicas?
2. ¿Cómo aporta la Sociedad Matemática Peruana en la educación?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad y proporción porcentual	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones basadas en tasas de crecimiento.	Expresa su comprensión de la tasa efectiva anual cuando deja de considerar varias capitalizaciones al año por una sola capitalización anual y elabora una tabla de capitalización de intereses.
	Usa estrategias y procedimientos deinterpretación y cálculo.	Emplea la fórmula de la tasa efectiva anual máxima para conocer el rendimiento máximo de un capital a una tasa nominal anual dada, en una capitalización continua.

Tasa efectiva anual

El Banco de los negocios concedió un préstamo de S/ 50 000 a Roxana, al 48% anual capitalizable mensualmente por 4 años. En lugar de capitalizar 12 veces al año, ¿se puede capitalizar una sola vez al año y obtener el mismo monto?

Vamos a averiguar si existe una tasa anual con la cual capitalizando una sola vez al año se obtenga el mismo monto.

Planteamos los montos

a. Monto de S/ 50 000 al 48% anual capitalizable mensualmente por 4 años.

$$M_1 = S/\ 50\,000\left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12\text{x}4}$$

b. Monto de S/ 50 000 a una tasa anual "i_A" capitalizable una sola vez al año, por 4 años.

$$M_2 = S/50\,000\,(1+i_A)^4$$

c. Como $M_2 = M_1$

entonces $S/50\,000\,(1+i_A)^4 = S/\ 50\,000\left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12\text{x}4}$

cancelamos S/ 50 000, y obtenemos $(1+i_A)^4 = \left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12\text{x}4}$

Extraemos la raíz de índice 4 en ambos miembros de la igualdad.

$$\sqrt[4]{(1+i_A)^4} = \sqrt[4]{\left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12\text{x}4}}$$

$$1+i_A = \left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{\frac{12\text{x}4}{4}}$$

$$1+i_A = \left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12}$$

$$i_A = \left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i_A = (1+0,04)^{12} - 1 = (1,04)^{12} - 1 = 1,601\,032\,219 - 1$$

$$\therefore\ i_A = 0,601 = 60,1\%$$

Ahora vamos a calcular el monto en ambas situaciones y comprobaremos que son iguales.

I. Monto de S/ 50 000 al 48% anual capitalizable mensualmente por 4 años.

$$M_1 = S/50\,000\left(1+\frac{0,48}{12}\right)^{12\text{x}4}$$

$$M_1 = S/\ 50\,000\,(1,04)^{48}$$

$$M_1 = S/\ 328\,526,\ 412\,1$$

II. Monto de S/50 000 al 60,1% anual capitalizable anualmente por 4 años.

M_2 = S/ 50 000 $(1 + 0,601\ 032\ 219)^4$

M_2 = S/ 50 000 $(1,601\ 032\ 219)^4$

$M_2 = 328\ 526,412$

Generalizamos las situaciones:

a. Un capital C_0 se transforma a una tasa nominal anual J y capitaliza m veces al año, por n años.

El monto es $M = C_0\left(1 + \frac{J}{m}\right)^{mxn}$

b. El mismo capital C_0 se transforma a una tasa efectiva anual i_A y capitaliza una sola vez al año, por n años.

El monto es $M = C_0(1 + i_A)^n$

c. Como los montos son iguales, igualamos los segundos miembros:

$$C_0\,(1 + i_A)^n = C_0\left(1 + \frac{J}{m}\right)^{mxn}$$

Cancelamos C_0 en ambos miembros de la igualdad:

$$(1 + i_A)^n = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^{mxn}$$

Extraemos la raíz de índice n en ambos miembros:

$$\sqrt[n]{(1 + i_A)^n} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{J}{m}\right)^{mxn}}$$

$$1 + i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^{\frac{mxn}{n}}$$

$$1 + i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^{m}$$

$$\therefore\ i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^{m} - 1$$

Fórmula de la tasa efectiva anual

Si un capital está colocado a una tasa nominal anual J y se capitaliza m veces al año durante cierto tiempo, el monto que produce se puede conseguir capitalizando una sola vez al año a una tasa efectiva anual i_A durante el mismo tiempo.

Ejemplo 1 Calcula la tasa efectiva anual equivalente al 32% anual capitalizable trimestralmente.

Resolución:

Datos:

J = 32% anual = 0,32 anual.
m = 4 trimestres = 4 capitalizaciones al año.

$$i_A = (1 + \frac{J}{m})^m - 1$$

$$i_A = (1 + \frac{0,32}{4})^4 - 1$$

$$i_A = (1 + 0,08)^4 - 1$$

$$i_A = (1,08)^4 - 1$$

$$i_A = 0,360\ 488\ 96$$

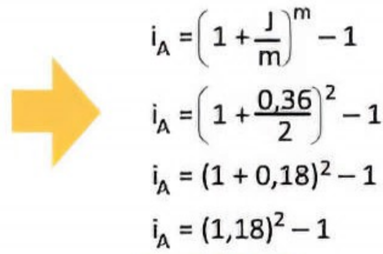
La tasa efectiva anual es 36, 05 %

Ejemplo 2 ¿Cuál es la tasa efectiva anual equivalente al 36% anual capitalizable semestralmente?

Resolución:

Datos:

J = 36% anual = 0,36 anual
m = 2 semestres = 2 capitalizaciones al año



$$i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$$

$$i_A = \left(1 + \frac{0{,}36}{2}\right)^2 - 1$$

$$i_A = (1 + 0{,}18)^2 - 1$$

$$i_A = (1{,}18)^2 - 1$$

$$i_A = 0{,}392\,4$$

La tasa efectiva anual es 39,24 %.

Ejemplo 3 ¿Cuál es la tasa efectiva anual equivalente al 36% anual capitalizable diariamente?

Resolución:

Datos:

J = 36% anual = 0,36 anual
m = 360 días = 360 capitalizaciones al año



$$i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$$

$$i_A = \left(1 + \frac{0{,}36}{360}\right)^{360} - 1$$

$$i_A = (1 + 0{,}001)^{360} - 1$$

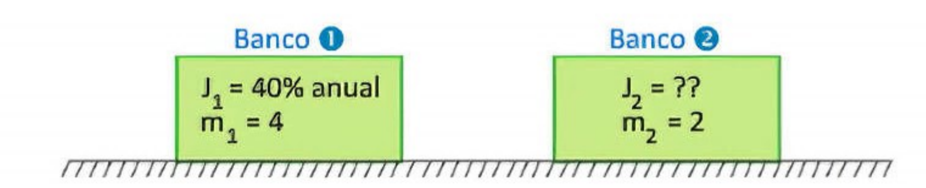
$$i_A = (1{,}001)^{360} - 1$$

$$i_A = 0{,}433\,071\,61$$

La tasa efectiva anual es 43,31%

Tasas equivalentes

Observa la figura.



El banco ❶ paga el 40% anual y capitaliza trimestralmente ($m_1 = 4$) los intereses; la tasa por periodo de capitalización es la tasa trimestral y su valor es $i_T = \frac{J_1}{m_1} = \frac{40\%}{4} = 10\%$

El banco ❷ capitaliza semestralmente ($m_2 = 2$) los intereses; la tasa por periodo de capitalización es la tasa semestral y su valor es $i_S = \frac{J_2}{m_2} = \frac{J_2}{2}$, que no se puede calcular porque se desconoce el valor de J_2.

Si la tasa semestral del banco ❷ capitaliza de la misma manera que la tasa trimestral del banco ❶, sus tasas efectivas anuales deben ser iguales.

tasa efectiva anual 2 = tasa efectiva anual 1

$$\left(1 + \frac{J_2}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{0{,}40}{4}\right)^4 - 1$$

Entonces $\left(1 + \frac{J_2}{2}\right)^2 = (1 + 0{,}10)^4$

$$\sqrt{\left(1+\frac{J_2}{2}\right)^2} = \sqrt{(1{,}10)^4}$$

$$1+\frac{J_2}{2} = (1{,}10)^2$$

$$1+\frac{J_2}{2} = 1{,}21$$

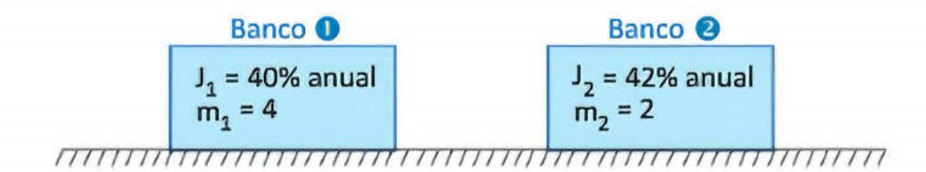
$$\frac{J_2}{2} = 1{,}21 - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = 0{,}21 = 21\% \qquad \Rightarrow i_s = 21\%$$

Por lo tanto, la tasa semestral es 21%.

Además, de $\frac{J_2}{2} = 0{,}21$, se deduce que $J_2 = 2 \times 0{,}21 = 0{,}42 = 42\%$

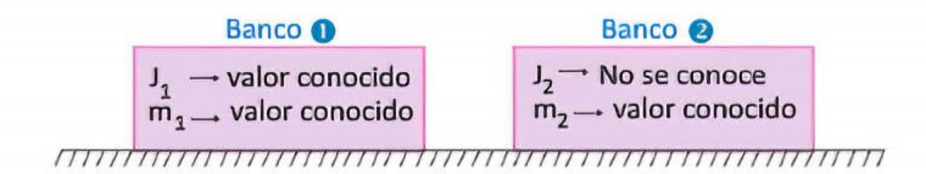
La equivalencia de las tasas se puede expresar de varias maneras



a. El 40% anual capitalizable trimestralmente es equivalente al 42% anual capitalizable semestralmente.

b. El 10% trimestral es equivalente al 21% semestral.

Ahora, vamos a tratar el problema de una manera general.



Si los bancos ❶ y ❷ trabajan con tasas equivalentes, sus tasas efectivas anuales deben ser iguales.

tasa efectiva anual ❷ = tasa efectiva anual ❶

$$\left(1+\frac{J_2}{m_2}\right)^{m_2} - 1 = \left(1+\frac{J_1}{m_1}\right)^{m_1} - 1$$

Entonces $$\left(1+\frac{J_2}{m_2}\right)^{m_2} = \left(1+\frac{J_1}{m_1}\right)^{m_1}$$

Extraemos la raíz de índice m_2 en ambos miembros de la igualdad

$$\sqrt[m_2]{\left(1+\frac{J_2}{m_2}\right)^{m_2}} = \sqrt[m_2]{\left(1+\frac{J_1}{m_1}\right)^{m_1}}$$

$$1+\frac{J_2}{m_2} = \left(1+\frac{J_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$\therefore \frac{J_2}{m_2} = \left(1+\frac{J_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1$$

Fórmula de las tasas equivalentes.

Ejemplo 1 Calcula la tasa semestral equivalente al 40% anual capitalizable trimestralmente.

Resolución:

Datos:

$m_2 = 2$
$J_1 = 40\%$ anual = 0,40 anual
$m_1 = 4$



$$\frac{J_2}{m_2} = \left(1 + \frac{J_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = \left(1 + \frac{0,40}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = (1 + 0,10)^2 - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = (1,10)^2 - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = 0,21 = 21\%$$

$i_S = 21\%$ Por lo tanto, la tasa semestral es 21%.

Ejemplo 2 ¿Cuál es la tasa bimestral equivalente al 24% anual capitalizable mensualmente?

Resolución:

Datos:

$m_2 = 6$
$J_1 = 24\%$ anual = 0,24
$m_1 = 12$



$$\frac{J_2}{m_2} = \left(1 + \frac{J_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{\frac{12}{6}} - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = (1 + 0,02)^2 - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = (1,02)^2 - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = 1,040\,4 - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = 0,040\,4 = 4,04\%$$

$i_B = 4,04\%$ Por lo tanto, la tasa bimestral es 4,04% .

Método práctico

Si la tasa es bimestral, se capitaliza 6 veces al año; 6 es el exponente del primer miembro.
Si la tasa es mensual, se capitaliza 12 veces al año; 12 es el exponente del segundo miembro.

$$(1 + i_B)^6 = (1 + i_M)^{12}$$

$$(1 + i_B)^6 = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12}$$

$$\sqrt[6]{(1 + i_B)^6} = \sqrt[6]{(1 + 0,02)^{12}}$$

$$1 + i_B = (1,02)^{\frac{12}{6}}$$

$$1 + i_B = 1,040\,4$$

$$i_B = 0,040\,4 = 4,04\%$$

Ejemplo 3 ¿Cuál es la tasa trimestral equivalente al 8% bimestral?

Resolución:

Tasa trimestral, se capitaliza 4 veces al año; 4 es el exponente del primer miembro.

Tasa bimestral, se capitaliza 6 veces al año; 6 es el exponente del segundo miembro.

$$(1 + i_T)^4 = (1 + i_B)^6$$

$$(1 + i_T)^4 = (1 + 0,08)^6$$

$$(1 + i_T)^4 = (1,08)^6$$

$\sqrt[4]{(1+i_T)^4} = \sqrt[4]{(1{,}08)^6}$

$1 + i_T = (1{,}08)^{\frac{6}{4}}$

$1 + i_T = (1{,}08)^{1{,}5}$

$1 + i_T = 1{,}122\ 368\ 923$

$i_T = 1{,}122\ 368\ 923 - 1$

$i_T = 0{,}122\ 368\ 923$

$i_T = 12{,}\ 236\ 892\ 3\%$

La tasa trimestral es 12,24%

Capitalización continua

¿Cuál es la mayor tasa efectiva anual correspondiente al 36% anual?

La fórmula de la tasa efectiva anual es $i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$.

Conocemos J = 36% anual = 0,36 , pero no conocemos el valor de m.

Si la capitalización es semestral (m = 2), la tasa efectiva anual es:

$i_A = \left(1 + \frac{0{,}36}{2}\right)^2 - 1 = (1{,}18)^2 - 1 = 0{,}392\ 4 = 39{,}24\%$

Si la capitalización es trimestral (m = 4), la tasa efectiva anual es:

$i_A = \left(1 + \frac{0{,}36}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}411\ 581\ 61 = 41,\ 16\%$

Si la capitalización es mensual (m = 12), la tasa efectiva anual es:

$i_A = \left(1 + \frac{0{,}36}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}425\ 760\ 886 = 42{,}58\%$

Si la capitalización es diaria (m = 360), la tasa efectiva anual es:

$i_A = \left(1 + \frac{0{,}36}{360}\right)^{360} - 1 = 0{,}433\ 071\ 61 = 43{,}31\%$

Observamos que cuando el número de capitalizaciones al año aumenta, la tasa efectiva anual también aumenta. Si el número de capitalizaciones al año es tan grande que tiende a infinito, se tendrá una capitalización continua o a cada instante; pero ¿qué pasará con la tasa efectiva anual? ¿aumentará hasta infinito o tendrá un límite?

En matemática la expresión $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ puede tomar un valor constante, es decir cuando x es tan grande que tiende a infinito, dicha expresión toma el valor e , que es la base del logaritmo neperiano y vale 2,718 281 828 459 ...

Ahora, vamos a transformar la fórmula de la tasa efectiva anual hasta que aparezca la forma $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Tasa efectiva anual: $i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$

Pasamos J a dividir a m: $i_A = \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{J}}\right)^m - 1$

Al exponente m lo multiplicamos y dividimos por J : $i_A = \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{J}}\right)^{\frac{m}{J} \times J} - 1$

Expresamos la potencia como una potencia de potencia: $i_A = \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{m}{J}}\right)^{\frac{m}{J}}\right]^J - 1$

Cuando la capitalización es continua, m es muy grande y tiende a infinito; y $\frac{m}{J}$ también tiende a infinito, entonces $\left(1+\dfrac{1}{\frac{m}{J}}\right)^{\frac{m}{J}}$ es igual al número e .

Por lo tanto, la tasa efectiva anual máxima es $[e]^J - 1$

$$i_{A\ (máxima)} = e^J - 1$$

Si J = 36% anual, entonces $i_{A\ (máxima)} = e^{0,36} - 1$

$= 0,4333294 = 43,33\%$

Esta tasa es la tasa efectiva anual máxima que puede generar una tasa del 36% nominal anual.

La capitalización continua no tiene aplicación en la vida cotidiana, pero la tasa efectiva anual máxima indica el límite de la ganancia que genera un capital para determinada tasa nominal anual.

Ejemplo 1 ¿Cuál es la tasa efectiva anual máxima correspondiente al 50% anual?

Resolución:

Dato:
J = 50% anual = 0,50 anual

$i_{A\ (máxima)} = e^J - 1 = e^{0,50} - 1 = 0,648\ 721\ 27 = 64,\ 87\%$

Rpta: La tasa efectiva anual máxima es 64, 87% .

Ejemplo 2 ¿Cuál es la tasa efectiva anual correspondiente al 48% anual de una capitalización continua?

Resolución:

Dato:
J = 48% anual = 0,48 anual

$i_{A\ (máxima)} = e^J - 1 = e^{0,48} - 1 = 0,616\ 074\ 402 = 61,61\%$

Rpta: La tasa efectiva anual máxima es 61,61%

Ejemplo 3 ¿Cuál es la tasa efectiva anual correspondiente al 24% de una capitalización continua?

Resolución:

Dato:
J = 24% anual = 0,24 anual

$i_{A\ (máxima)} = e^J - 1 = e^{0,24} - 1 = 0,271\ 249\ 15 = 27,12\%$

Rpta: La tasa efectiva anual máxima es 27,12% .

Amplía tus conocimientos



1 El Banco del triunfo cobra el 39% anual capitalizable mensualmente cuando otorga préstamos; en lugar de capitalizar 12 veces al año, el banco desea capitalizar una sola vez al año. ¿Qué tasa anual debe aplicar?

Resolución:

Si el banco desea capitalizar una sola vez al año, debe aplicar la tasa efectiva anual.

J = 39% anual = 0,39 anual
m = 12

$i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$

$i_A = \left(1 + \frac{0,39}{12}\right)^{12} - 1$

$i_A = (1 + 0,0325)^{12} - 1$

$i_A = (1,0325)^{12} - 1$

$i_A = 1,467\,846\,7 - 1$

$i_A = 0,467\,846\,7$

$i_A = 46,78\%$

Rpta: El banco debe aplicar el 46,78% anual.

2 El banco del Automóvil otorga préstamos al 32% anual y capitaliza los intereses trimestralmente. El Banco de la Oportunidad otorga préstamos al 30% anual y capitaliza los intereses mensualmente. Mario desea solicitar un préstamo a uno de los bancos. ¿Qué banco debe escoger?

Resolución:

Debemos calcular la tasa efectiva anual de cada banco para saber cuál le conviene a Mario.

a. Banco del Automóvil.

J = 32% anual = 0,32 anual
m = 4

$i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$

$i_A = \left(1 + \frac{0,32}{4}\right)^4 - 1$

$i_A = (1 + 0,08)^4 - 1$

$i_A = (1,08)^4 - 1$

$i_A = 1,360\,488\,96 - 1$

$i_A = 0,360\,488\,96$

$i_A = 36,05\%$

b. Banco de la Oportunidad.

J = 30% anual = 0,30 anual
m = 12

$i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$

$i_A = \left(1 + \frac{0,30}{12}\right)^{12} - 1$

$i_A = (1 + 0,025)^{12} - 1$

$i_A = (1,025)^{12} - 1$

$i_A = 1,344\,888\,824 - 1$

$i_A = 0,344\,888\,824$

$i_A = 34,49\%$

Rpta: Debe escoger el Banco de la oportunidad porque le cobra una tasa efectiva anual menor.

3 Un banco capitaliza mensualmente los intereses y la tasa efectiva anual correspondiente es el 79,6% . ¿Cuál es su tasa nominal anual?

Resolución:

J = ??
m = 12
i_A = 79,6% = 0,796

$i_A = \left(1 + \frac{J}{m}\right)^m - 1$

$0,796 = \left(1 + \frac{J}{12}\right)^{12} - 1$

$1,796 = \left(1 + \frac{J}{12}\right)^{12}$

$\sqrt[12]{1,796} = \sqrt[12]{\left(1 + \frac{J}{12}\right)^{12}}$

$1,05 = 1 + \frac{J}{12}$

$1,05 - 1 = \frac{J}{12}$

$0,05 = \frac{J}{12}$

$J = 0,05 \times 12$

$J = 0,60 = 60\%$ anual

Rpta: La tasa nominal anual del banco es 60% anual.

4 El Banco de la Riqueza aplica el 48% anual capitalizable trimestralmente a sus préstamos y el Banco del Éxito capitaliza semestralmente. ¿Cuál es la tasa nominal del Banco del Éxito, si se sabe que las tasas son equivalentes?

Resolución:

a. Banco de la Riqueza:

$J_1 = 48\%$ anual $= 0,48$

$m_1 = 4$

b. Banco del éxito:

$J_2 = ??$

$m_2 = 2$

Empleamos la fórmula de las tasas equivalentes:

$$\frac{J_2}{m_2} = \left(1 + \frac{J_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = \left(1 + \frac{0,48}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = (1 + 0,12)^2 - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = (1,12)^2 - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = 1,254\,4 - 1$$

$$\frac{J_2}{2} = 0,254\,4$$

$J_2 = 2 \times 0,254\,4$

$J_2 = 0,508\,8$

$J_2 = 50,88\%$ anual

Rpta: La tasa nominal del Banco del Éxito es 50,88% anual.

5 ¿Cuál es la tasa bimestral equivalente al 12% trimestral de interés compuesto?

Resolución:

$J_1 = 12\% \times 4 = 48\%$ anual $= 0,48$ anual

$m_1 = 4$

$J_2 = ??$

$m_2 = 6$

Empleamos la fórmula de las tasas equivalentes

$$\frac{J_2}{m_2} = \left(1 + \frac{J_1}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = \left(1 + \frac{0,48}{4}\right)^{\frac{4}{6}} - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = \left(1 + 0,12\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = (1,12)^{\frac{2}{3}} - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = 1,078\,479\,8 - 1$$

$$\frac{J_2}{6} = 0,078\,479\,8$$

$\frac{J_2}{6}$ = es la tasa bimestral

$i_B = \frac{J_2}{6} = 7,85\%$

Rpta: La tasa bimestral equivalente es 7,847 98% .

Método práctico

Tasa bimestral equivalente al 12% trimestral, entonces:

$$(1 + i_B)^6 = (1 + i_T)^4$$

$$(1 + i_B)^6 = (1 + 0,12)^4$$

$$(1 + i_B)^6 = (1,12)^4$$

$$1 + i_B = (1,12)^{\frac{4}{6}}$$

$$1 + i_B = 1,078\,479\,8$$

$$i_B = 0,078\,479\,8$$

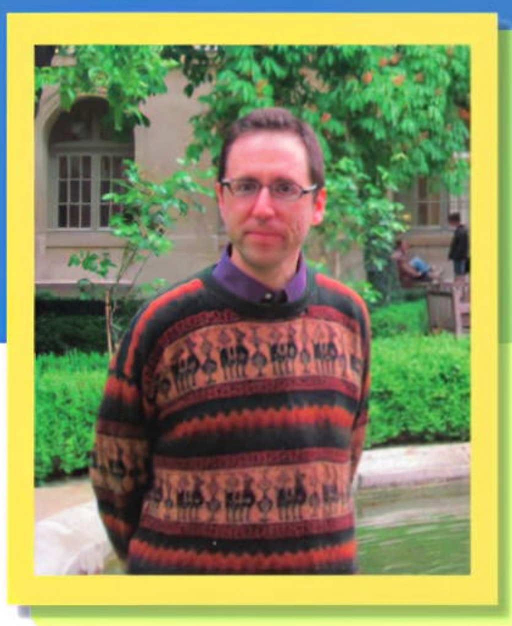
$$i_B = 7,85\%$$

El resultado obtenido es el mismo que el que se consigue aplicando la fórmula de las tasas equivalentes.

Harald Helfgott

(Matemático peruano)

Personaje de la Matemática



El peruano Harald Helfgott resolvió el problema matemático que llevaba 271 años irresuelto.

Actualmente Helfgott se desempeña como investigador en el prestigioso Centro Nacional para la Investigación Científica (CNRS) de Francia; el científico nacido en Lima (1977) se dio tiempo para hablar de su vida en Perú, su carrera profesional, su importante trabajo y sus proyectos.

Es uno de los problemas más difíciles en la historia de las matemáticas: la conjetura de Goldbach, matemático de Prusia, quien en 1742, planteó que todo número impar mayor de 5 es la suma de 3 número primos. La importancia de ello, asegura Harald, no solo radica en ser un problema muy antiguo, sino de la adecuada comprensión de los número primos, por un lado; la suma y el orden, por otro.

El matemático cuenta que comenzó su travesía por la conjetura de Goldbach en el año 2006, y terminó su artículo con los resultados hace pocas semanas. Además, señala que su gusto por las matemáticas se da desde su niñez; también le gustaban las ciencias y la informática. Gracias a su persistencia hoy en día se desenvuelve como investigador.

Harald vivió en el Perú hasta los 16 años, viene regularmente para brindar charlas y cursos cortos. A pesar de vivir muchos años en Europa, nuestro compatriota no olvida nuestro país ni su deliciosa comida. Su ejemplo es una muestra grande de perseverancia, además de dedicación hacia la carrera y especialidad que más le gusta.

Investiga:



1. ¿Qué opinas de la formación académica de nuestro compatriota Harald Helfgott?
2. ¿Qué instituciones conoces donde estudiar la carrera de matemática en el Perú? Comenta.

UNIDAD 2

Introducción a la programación lineal



Memo: Corita, el gráfico de la ecuación $x + y = 5$ es una línea recta. ¿Cuál es el gráfico de la desigualdad $x + y > 5$?

Corita: Memo, si $x + y > 5$, entonces $y > 5 - x$. Trazamos la recta $y = 5 - x$; para cualquier punto que esté encima de la recta, el valor de y es mayor que $5 - x$, por lo tanto, el gráfico de $y > 5 - x$ es el semiplano que está encima de la recta y no la incluye.

Antonio: ¿Y cuál es el gráfico de la desigualdad $x + y \geq 5$?



Competencia	Temas
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Sistema de inecuaciones lineales con una incógnita. Resolución de un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita. Inecuaciones lineales con dos incógnitas: conjunto solución y representación gráfica. Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas: representación gráfica del conjunto solución.
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Programación lineal. Función objetivo. El conjunto de restricciones lineales. Región factible. Coordenadas de los vértices de la región factible. Teorema fundamental para hallar los valores óptimos (máximo y mínimo). Resolución de un problema de optimización. Tabla de determinación de los valores mínimo y máximo.

ENFOQUE INCLUSIVO O ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

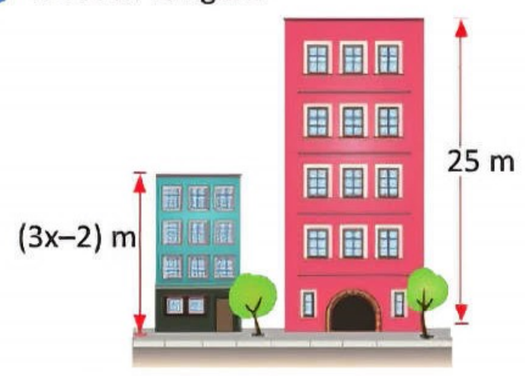
Valor	Actitudes que suponen
Respeto por las diferencias	Reconocimiento al valor inherente de cada persona y de sus derechos, por encima de cualquier diferencia.

Recupera saberes previos



Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:

1 Observa la figura.



En cierra en un círculo la relación correcta.

I. $3x - 2 > 25$

II. $3x - 2 = 25$

III. $3x - 2 < 25$

2 Con respecto a la figura de la pregunta 1, ¿cuál es el mayor valor entero de x?

Marca la respuesta.







3 Marca el valor de x que hace verdadera la desigualdad $5x - 7 > 53$.





11

4 Marca el valor de x que hace verdadera la desigualdad $8x + 13 \leq 45$.







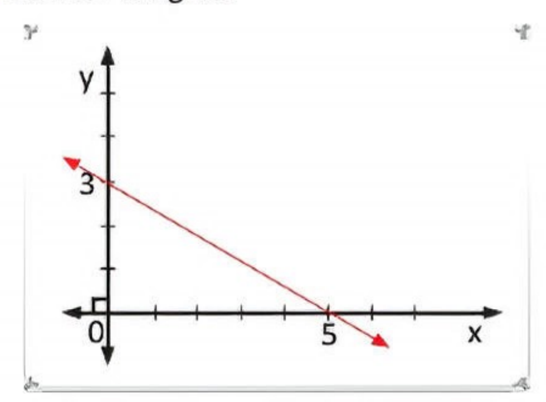
5 ¿Cuál es el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

6 ¿Cuál es el par ordenado de números que satisfacen las dos ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 33 \\ 5x - y = 31 \end{cases}$$

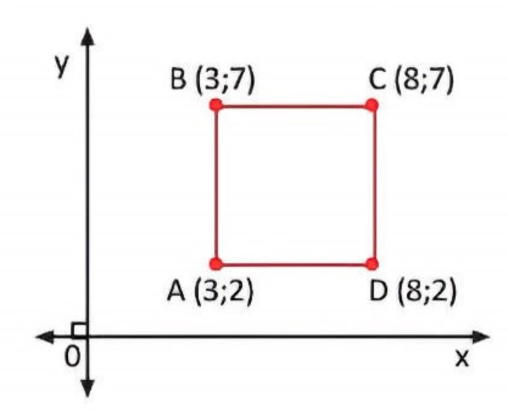
7 Observa la figura.



a. Escribe las coordenadas de tres puntos que estén por encima de la recta.

b. Escribe las coordenadas de tres puntos que estén por debajo de la recta.

8 Observa el cuadrado en el plano cartesiano.



a. Escribe las coordenadas de tres puntos que estén dentro del cuadrado.

b. Escribe las coordenadas de tres puntos que estén fuera del cuadrado.

9 El gráfico de $x - y = 7$ es una recta del plano cartesiano.

En cierra en un círculo el punto que pertenece a dicha recta.

A (42; 37) B (61; 54)

C (54; 61)

10 En cierra en un círculo el punto que pertenece al conjunto solución de la desigualdad $3x - y \geq 29$.

P (8; 7) Q (12; 8)

R (12; 7)

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraícas.	Grafica una inecuación lineal con variables x e y como un semiplano que está encima o debajo de la recta y = f(x), dependiendo si $y > f(x)$ o $y < f(x)$.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Resuelve un sistema de dos inecuaciones lineales con dos variables , graficando los semiplanos correspondientes en cada inecuación y luego intersecta los semiplanos y obtiene la región solución del sistema.

Sistema de inecuaciones lineales con una incógnita

Definición y elementos

Un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita es la unión de dos o más inecuaciones de primer grado con una incógnita y coeficientes reales.

Ejemplos: Son sistemas de inecuaciones lineales (o de primer grado) con una incógnita, los siguientes:

I)	II)	III)	IV)
$\begin{cases} 2x-5<1 \\ 3x+8>5 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-8\geq -4 \\ 2x-8<x \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2(4-x)>6x-1 \\ -x\leq 10 \\ x+1>0 \end{cases}$	$\begin{cases} (x-3)^2\geq (x+1)(x-5) \\ 1+2(5-x)\leq -5 \\ 2x-3>7 \end{cases}$

¿Cómo se resuelve un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita?

Resolver un sistema de inecuaciones lineales es encontrar el conjunto solución del sistema que agrupa a todos los números reales que satisfacen todas las desigualdades del sistema.

Para encontrar el conjunto solución se siguen los siguientes pasos:

1°. Se halla el conjunto solución de cada inecuación por separado.

2°. Se intersectan los conjuntos solución de esas inecuaciones y el resultado es el conjunto solución (C.S.) del sistema.

Ejemplos: Determina el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuanes:

1) $\begin{cases} 2x+1<9 \\ 1-3x<-2 \end{cases}$

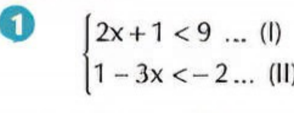
2) $\begin{cases} 5+2(1-x)<13 \\ 2x-3(1+3x)\leq 2(x-10)-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-3)^2-2x(x-5)\geq -x(x+4) \\ 2(5-x)\leq 1-5x \\ 9-2(3x-1)>0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (2-x)(5-x)+x>3x^2-2x(x+1) \\ 4(x-4)(x+4)\geq (2x+3)^2-1 \\ 4x<6+2(5+3x) \end{cases}$

Resolución

1



Resolvemos (I)	Resolvemos (II)
$2x+1<9$	$1-3x<-2$
$2x<8$	$-3x<-3$
$x<4$	$x>1$
$S_1=\langle -\infty\,;4\rangle$	$S_2=\langle 1;\infty\rangle$

Hallamos la intersección de S_1 con S_2



$C.S. = S_1 \cap S_2$

$C.S. = \langle 1; 4 \rangle$ **Rpta.**

2 $\begin{cases} 5 + 2(1 - x) < 13 & \ldots \text{(I)} \\ 2x - 3(1 + 3x) \leq 2(x - 10) - 1 & \ldots \text{(II)} \end{cases}$

Resolvemos (I)

$5 + 2(1 - x) < 13$
$5 + 2 - 2x < 13$
$-2x < 6$
$x > -3$

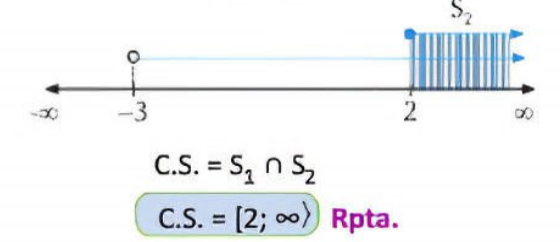
$S_1 = \langle -3 ; \infty \rangle$

Resolvemos (II)

$2x - 3(1 + 3x) \leq 2(x - 10) - 1$
$2x - 3 - 9x \leq 2x - 20 - 1$
$-7x - 3 \leq 2x - 21$
$-9x \leq -18$
$x \geq 2$

$S_2 = [2;\infty\rangle$

Hallamos $S_1 \cap S_2$



$C.S. = S_1 \cap S_2$

$C.S. = [2; \infty\rangle$ **Rpta.**

3 $\begin{cases} (x - 3)^2 - 2x(x - 5) \geq -x(x + 4) & \ldots \text{(I)} \\ 2(5 - x) \leq 1 - 5x & \ldots \text{(II)} \\ 9 + 2(3x - 1) > 0 & \ldots \text{(III)} \end{cases}$

Resolvemos (I)

$(x - 3)^2 - 2x(x - 5) \geq -x(x + 4)$
$x^2 - 6x + 9 - 2x^2 + 10x \geq -x^2 - 4x$
$\cancel{-x^2} + 4x + 9 \geq \cancel{-x^2} - 4x$
$8x \geq -9$
$x \geq -\dfrac{9}{8}$

$S_1 = \left[-\dfrac{9}{8}; \infty\right\rangle$

Resolvemos (II)

$2(5 - x) \leq 1 - 5x$
$10 - 2x \leq 1 - 5x$
$3x \leq -9$
$x \leq -3$

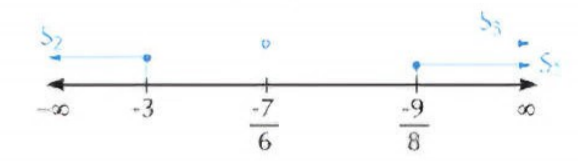
$S_2 = \langle -\infty; -3]$

Resolvemos (III)

$9 + 2(3x - 1) > 0$
$9 + 6x - 2 > 0$
$6x > -7$
$x > -\dfrac{7}{6}$

$S_3 = \left\langle -\dfrac{7}{6}; \infty \right\rangle$

Hallamos $S_1 \cap S_2 \cap S_3$



$C.S. = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

$C.S. = \varnothing$ **Rpta.**

4 $\begin{cases} (2 - x)(5 - x) + x > 3x^2 - 2x(x + 1) & \ldots \text{(I)} \\ 4(x - 4)(x + 4) \geq (2x + 3)^2 - 1 & \ldots \text{(II)} \\ 4x < 6 + 2(5 + 3x) & \ldots \text{(III)} \end{cases}$

Resolvemos (I)

$(2 - x)(5 - x) + x > 3x^2 - 2x(x + 1)$
$10 - 7x + x^2 + x > 3x^2 - 2x^2 - 2x$
$\cancel{x^2} - 6x + 10 > \cancel{x^2} - 2x$
$-4x > -10$
$x < \dfrac{5}{2}$

$S_1 = \left\langle -\infty; \dfrac{5}{2} \right\rangle$

Resolvemos (II)

$4(x - 4)(x + 4) \geq (2x + 3)^2 - 1$
$4(x^2 - 16) \geq 4x^2 + 12x + 9 - 1$
$4x^2 - 64 \geq 4x^2 + 12x + 8$
$-12x \geq 72$
$x \leq -6$

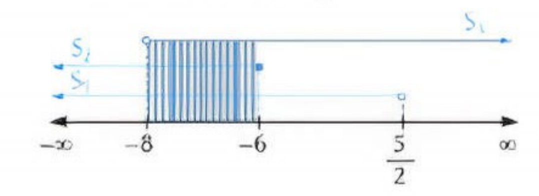
$S_2 = \langle -\infty; -6]$

Resolvemos (III)

$4x < 6 + 2(5 + 3x)$
$4x < 6 + 10 + 6x$
$-2x < 16$
$x > -8$

$S_3 = \langle -8 ; \infty\rangle$

Hallamos $S_1 \cap S_2 \cap S_3$



$C.S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

$C.S = \langle -8; -6]$ **Rpta.**

Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Definición

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una desigualdad en que intervienen dos incógnitas y coeficientes reales.

Puede presentarse en las formas:

$ax + by > c$	$ax + by < c$
$ax + by \geq c$	$ax + by \leq c$

en dond:e $a, b, c \in \mathbb{R}$

Conjunto solución y su representación gráfica

El conjunto solución de una inecuación lineal con dos incógnitas está determinado por todos los pares (x ; y) de números reales que satisfacen la desigualdad de la inecuación.

Toda recta en el plano lo divide en dos regiones, una a cada lado de la recta, y cada una de estas regiones se llama un semiplano.

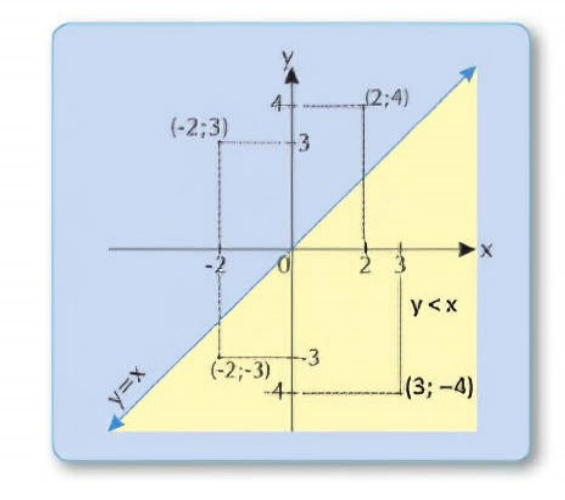
Ejemplo 1 Representa gráficamente $y < x$.

Resolución:

- Primero trazamos la gráfica de la recta $y = x$. Esta recta es la frontera entre los puntos que satisfacen la desigualdad y los puntos que no la satisfacen. La gráfica de $y = x$ se ha trazado en línea punteada, pues, los puntos sobre ella, no se encuentran en el conjunto solución de $y < x$.

- Para cualquier punto por encima de la recta como por ejemplo: (-2;3) o (2;4), y es mayor que x. Para cualquier punto por debajo de la recta como (–2;–3) o (3; –4), y es menor que x.

  Por consiguiente, la gráfica de $y < x$ es el semiplano bajo la recta fronteriza $y = x$, que se ha señalado coloreando dicho semiplano.



Ejemplo 2 Traza la gráfica de la desigualdad $2y - x - 6 > 0$.

Resolución:

Método 1

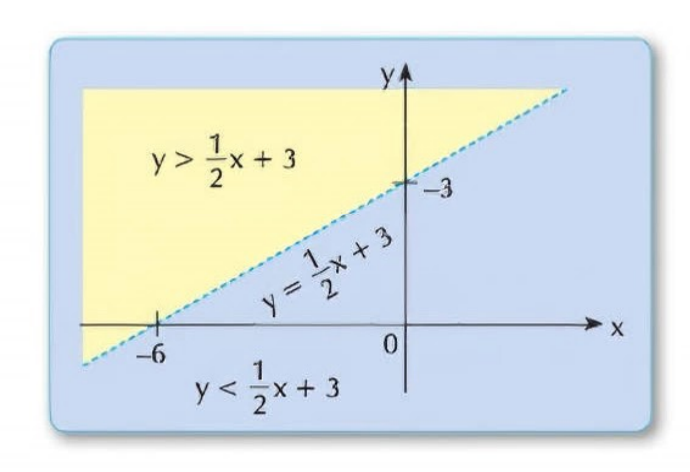
Despejando y obtenemos:

$$y > \frac{1}{2}x + 3$$

Trazamos la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$; para cualquier punto por encima de la recta, el valor de y es mayor que $\frac{1}{2}x + 3$. Por lo tanto, la gráfica de la desigualdad es el semiplano sobre la recta junto a la frontera.

Método 2

Trazamos la gráfica de la recta $2y - x - 6 = 0$, siguiendo cualquier método. Para determinar cuál semiplano es la solución, probamos con algún punto que no se encuentra sobre la recta; el origen de coordenadas es un punto muy fácil de utilizar,



entonces hacemos la prueba con (0;0). Veamos:

$$2y - x - 6 > 0$$
$$2 \cdot 0 - 0 - 6 > 0$$
$$-6 > 0 \quad \text{(falso)}$$

Este enunciado falso nos indica que el par (0;0) no es solución de la desigualdad, por lo tanto, la solución será el semiplano que no contiene a (0;0).

Ejemplo 3 Traza la gráfica de la desigualdad $6x + 3y \leq 4$.

Resolución:

Usaremos el segundo método expuesto en el ejemplo anterior.

- En primer lugar trazamos la gráfica de $6x + 3y = 4$ con línea continua ya que $6x + 3y = 4$ es parte de la solución.
- Vemos si el origen de coordenadas pertenece al área bajo la recta trazada, entonces probamos con (0;0) en la desigualdad. Así:

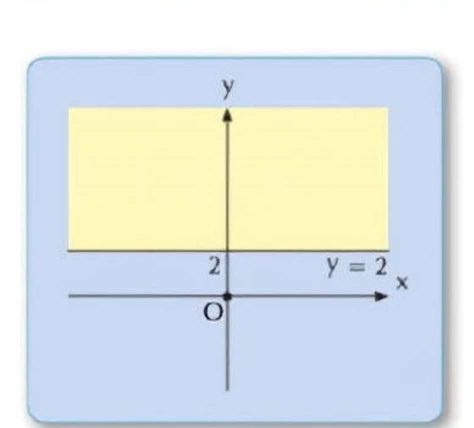
$$6x + 3y \leq 4$$
$$6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 4$$
$$0 \leq 4 \quad \text{(verdadero)}$$

Este enunciado verdadero nos indica que el par (0;0) sí es solución de la desigualdad y por lo tanto el conjunto solución será el semiplano que contiene a (0;0).

Ejemplo 4 Representa gráficamente $y \geq 2$.

Resolución:

- Graficamos la recta $y = 2$ que es paralela al eje x.
- El conjunto solución es el semiplano donde se encuentran todos los pares (x,y) que satisfacen la desigualdad $y \geq 2$.



Ejemplo 5 Representa gráficamente $x < 4$.

Resolución:

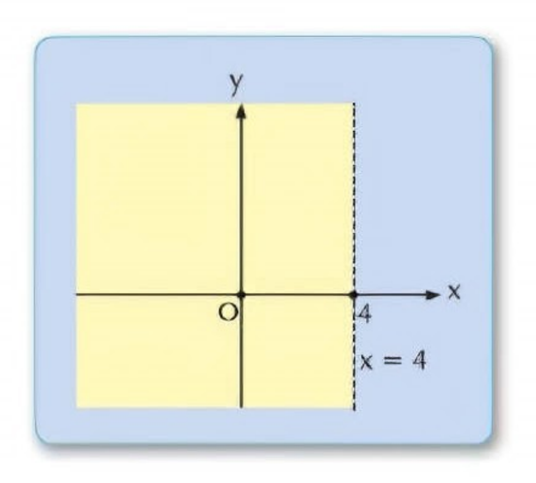
- Graficamos la recta $x = 4$ que es paralela al eje y. Como $x = 4$ no pertenece al conjunto solución de $x < 4$, trazamos la recta con líneas punteadas.
- Ahora buscamos un punto cualquiera que no pertenece a la recta y verificamos si satisface la desigualdad $x < 4$.

Por ejemplo, el punto (0 ; 0)

$$\downarrow \; \downarrow$$
$$x \;\; y$$

$$x < 4$$
$$0 < 4 \quad \text{(verdadero)}$$

Entonces el conjunto solución es el semiplano que contiene al punto (0;0).



Sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Definición

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es la reunión de dos o más inecuaciones de primer grado, con dos incógnitas y coeficientes reales.

Ejemplos

Son sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

I)	II)	III)	IV)
$\begin{cases} x-2y>-8 \\ 6x+3y\geq 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y\geq 3x-6 \\ 2x+3y\leq 6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y\leq 6 \\ 3x\geq 4y+12 \\ y+3>0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y\leq 20 \\ 8x-3y+15>0 \\ x<y \end{cases}$

¿Cómo se resuelve un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas?

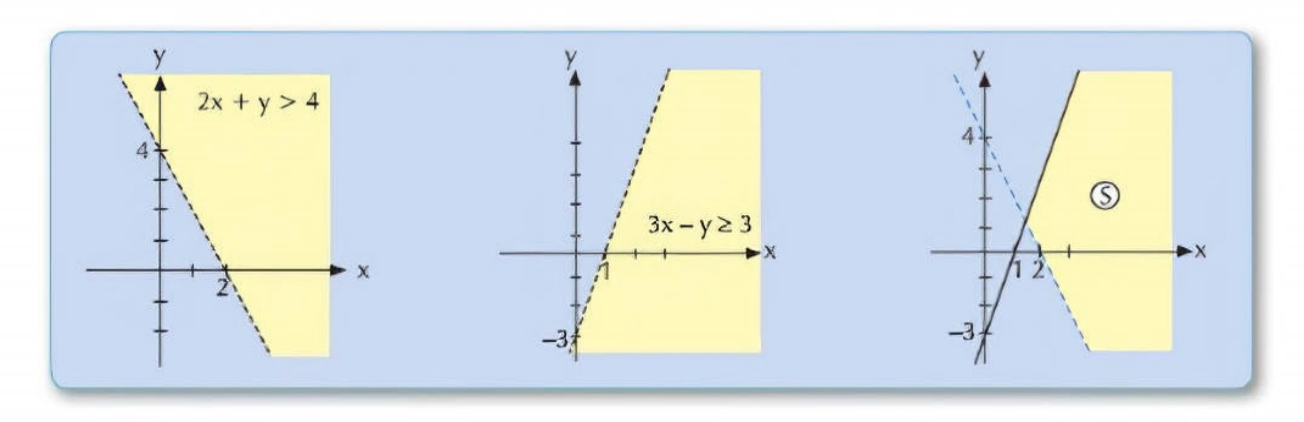
Gráficamente, el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, se obtiene representando gráficamente el conjunto solución de cada desigualdad por separado sobre los mismos ejes y hallando luego la región de plano que resulta de intersectar las gráficas de cada una de dichas desigualdades.

Ejemplo 1 Representa gráficamente el conjunto solución del siguiente sistema.

$$\begin{cases} 2x+y>4 \\ 3x-y\geq 3 \end{cases}$$

Resolución:

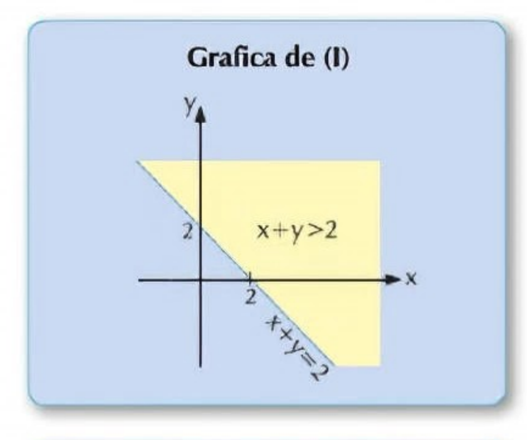
Primero graficamos los semiplanos correspondientes a cada inecuación, y luego intersectamos los semiplanos o conjuntos solución de las inecuaciones, superponiendo ambos gráficos. De esta forma, determinamos la región solución (S) del sistema.

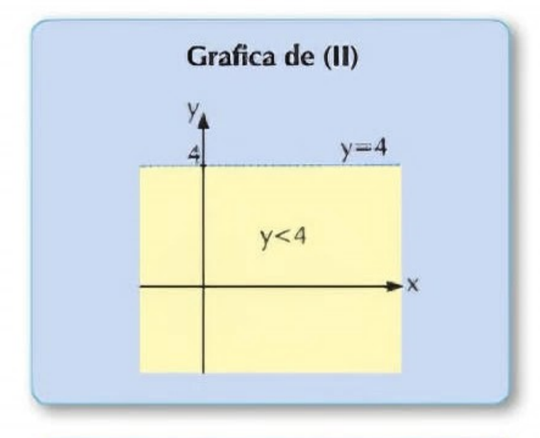


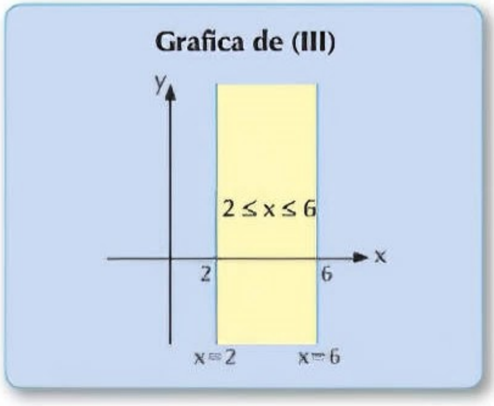
Ejemplo 2 Determina gráficamente el conjunto solución (S) del sistema.

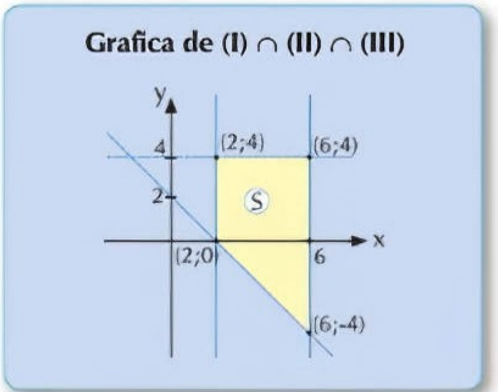
$$\begin{cases} x+y>2 & \text{... (I)} \\ y<4 & \text{... (II)} \\ 2\leq x\leq 6 & \text{... (III)} \end{cases}$$

Resolución:









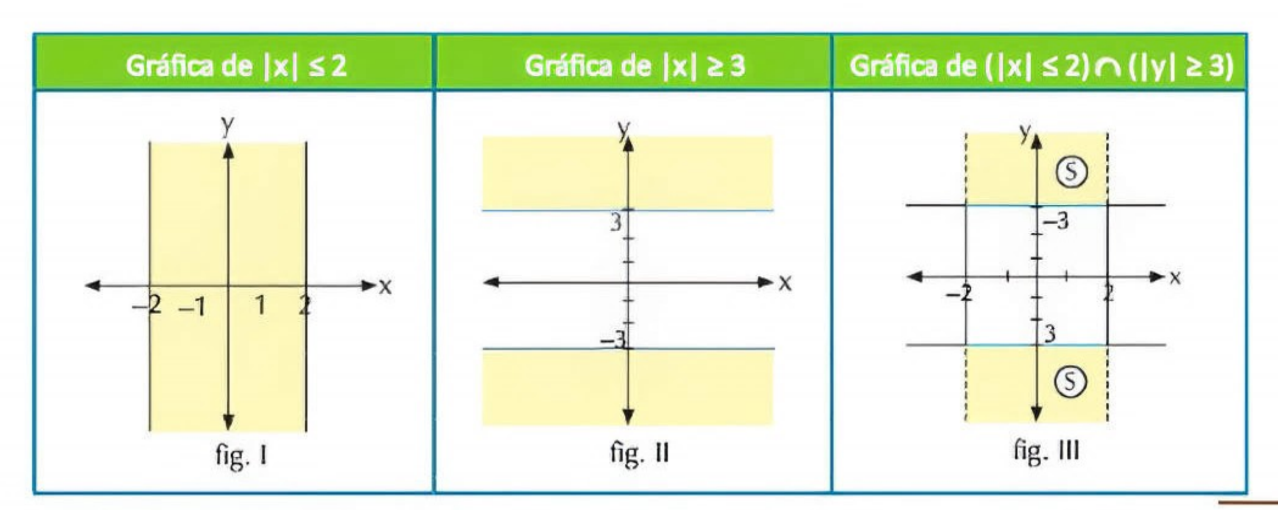
Ejemplo 3 Grafica el sistema:

$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \geq 3 \end{cases}$$

Resolución:

- $|x| \leq 2$ equivale a $-2 \leq x \leq 2$, los puntos de esta desigualdad son los que están en o entre las rectas verticales $x = \pm 2$.
- $|y| \geq 3$ equivale a la desigualdad compuesta $y \leq -3$ o $y \geq 3$. Así, los puntos del plano que satisfacen $|y| \geq 3$ están todos hacia arriba de, o en la recta $y = 3$, al igual que todos los puntos hacia abajo o en la recta $y = -3$.

  Como un punto se encuentra en la gráfica del sistema dado siempre que se satisfagan ambas desigualdades, la gráfica del sistema dado es la región coloreada en la figura III.



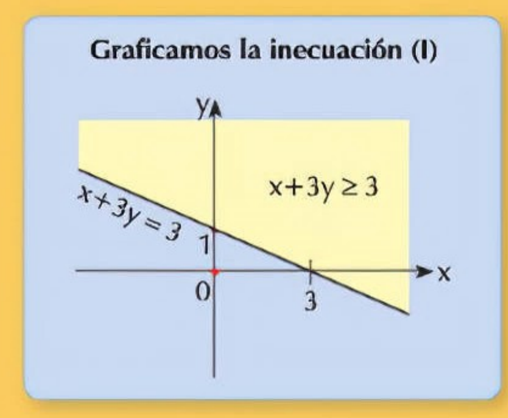
Amplía tus conocimientos

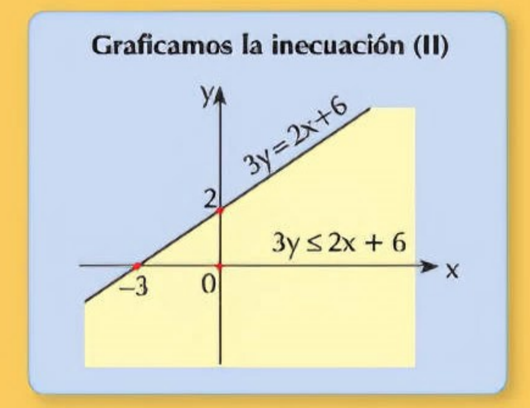


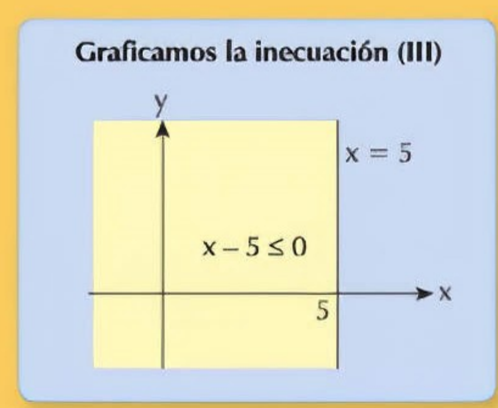
Representa gráficamente el conjunto solución (S) del siguiente sistema. Encuentra las coordenadas de las vértices de la región de plano que se forma.

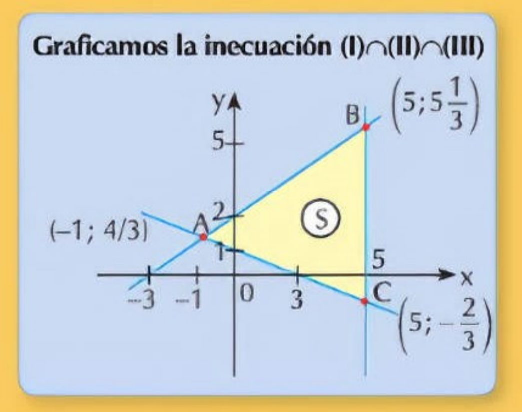
$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 & \text{... (I)} \\ 3y \leq 2x + 6 & \text{... (II)} \\ x - 5 \leq 0 & \text{... (III)} \end{cases}$$

Resolución:









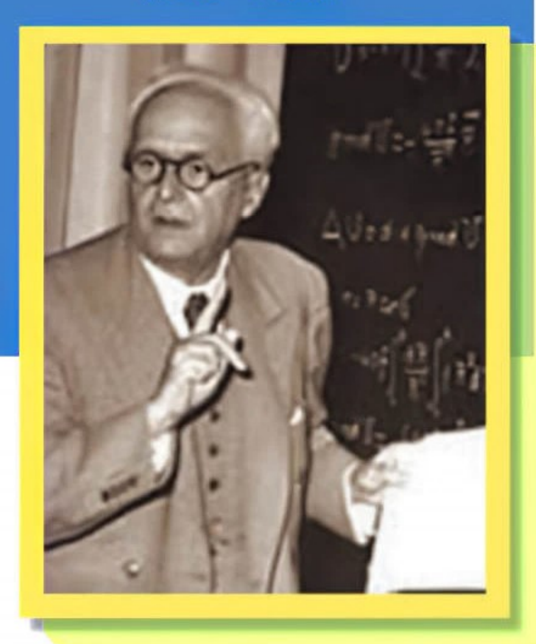
Vemos que el conjunto solución (S) del sistema es la región triangular ABC. Para encontrar las coordenadas de las vértices, se resuelven las ecuaciones siguientes:

Coordenadas de A	Coordenadas de B	Coordenadas de C
Resolvemos $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3y = 2x + 6 \end{cases}$ Se obtiene: $x = -1 ;\ y = \frac{4}{3}$ Luego: $A = \left(-1; \frac{4}{3}\right)$	Resolvemos $\begin{cases} 3y = 2x + 6 \\ x - 5 = 0 \end{cases}$ Se obtiene: $x = 5 ;\ y = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ Luego: $B = \left(5; 5\frac{1}{3}\right)$	Resolvemos $\begin{cases} x - 5 = 0 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ Se obtiene: $x = 5 ;\ y = -\frac{2}{3}$ Luego: $C = \left(5; -\frac{2}{3}\right)$

Godofredo García

(1888 - 1970)

Personaje de la Matemática



Godofredo García (1888-1970) fue alumno predilecto del sabio matemático Federico Villarreal y, durante su decanato en la Facultad de Ciencias de esta universidad, gestionó e hizo posible la incorporación como catedrático del gran matemático polaco Alfred Rossemblatt.

La calle Pobres del jirón Lampa, en Lima, fue testigo del nacimiento de Godofredo García Díaz, el ocho de noviembre de 1888. En los primeros años de este siglo ingresó a San Marcos, donde alcanzó los grados de Bachiller y Doctor en Ciencias Matemáticas.

Su vínculo con San Marcos se inicia con la docencia, para dedicarse posteriormente a la investigación científica, actividad que profundizó hasta su fallecimiento ocurrido en julio de 1970.

Su preocupación permanente por la educación lo llevó a trabajar al lado del presidente Augusto B. Leguía; producto de este acercamiento fue la redacción y puesta en ejecución del Estatuto Universitario de 1928, el cual dio ingreso a brillantes jóvenes profesores, a las facultades de Letras y Ciencias, como Jorge Basadre, Luis Alberto Sánchez, Raúl Porras Barrenechea y Jorge Guillermo Leguía.

En 1947 obtuvo el Premio Nacional por las investigaciones científicas que realizó en el mundo de las ciencias matemáticas, por sus ecuaciones y soluciones exactas del movimiento y de las tensiones de los fluidos viscosos.

Su amplia labor de investigación fue resaltada y publicada fundamentalmente en la Revista de Ciencias, órgano de la Facultad de Ciencias de San Marcos, la cual fundó Federico Villarreal. Si bien García dejó como herencia numerosos libros, *Lecciones de Mecánica Racional* es considerada como su obra principal.

Su trabajo científico llegó a la Real Academia de Ciencias de Madrid y *The American Philosophical Society* de Filadelphia.

Vida y trayectoria

En San Marcos experimentó los años más fecundos de su actividad científica y académica; primero como Jefe de Práctica, luego Catedrático Adjunto, Catedrático Principal, Decano, Vicerrector y Rector Honorario de la Decana de América.

Al final de su rectorado en San Marcos, el Gobierno lo designó Embajador Científico ante los gobiernos de Estados Unidos y varios países de Europa, y en esa condición realizó una extensa pero prolífica gira dictando conferencias sobre diversos tópicos o materias de incuestionable trascendencia científica.

En la década del 30 fundó la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, que presidió hasta 1960, fecha en que se convirtió en su Presidente Honorario. El gobierno peruano siempre mantuvo interés por la vida de este sanmarquino ilustre y lo condecoró así como también lo hicieron Francia y Polonia.

Investiga:



1. ¿Cuál es tú opinión acerca de la vida de este ilustre matemático peruano?
2. La actividad académica en el área de las matemáticas en el Perú nos ha dado la satisfacción de contar con brillantes profesionales, ¿cómo crees que beneficia ello a nuestro país?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraícas y gráficas.	Transforma la información de un problema y representa algebraicamente la función objetivo, que es la situación que se desea optimizar.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Aplica el "teorema fundamental" para hallar los valores óptimos (máximo y mínimo) y reemplaza las coordenadas de cada vértice de la región factible en la función objetivo.

Programación lineal

Introducción

Hasta el momento hemos aprendido procedimientos para graficar sistemas de desigualdades lineales. Ahora aplicaremos algo de estos conocimientos a lo que se llama **programación lineal**, que es una técnica matemática que se utiliza para resolver problemas en que se desea optimizar (al máximo o al mínimo). Las aplicaciones de este procedimiento se encuentran en muchas áreas, incluyendo los negocios, fuerzas armadas, etc. Por ejemplo, se puede crear un modelo para maximizar ganancias o minimizar costos, dados los límites de producción, las restricciones de tiempo, o la ubicación específica de los recursos.

Para resolver un problema mediante esta técnica, es necesario determinar la función objetivo y el conjunto de restricciones lineales.

- **La función objetivo.-** Es la representación algebraica de la relación que se busca optimizar.
  Esta función objetivo se designa como: $F(x;y) = ax + by \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$
- **El conjunto de restricciones lineales.-** Son los limites a los que está sometida la función objetivo, y están asociadas a un sistema de inecuaciones lineales.

¿Cómo resolver un problema de optimización?

Ejemplo

Supongamos que deseamos hallar los valores (x;y) que optimizan la función objetivo: $F(x;y) = x+y$

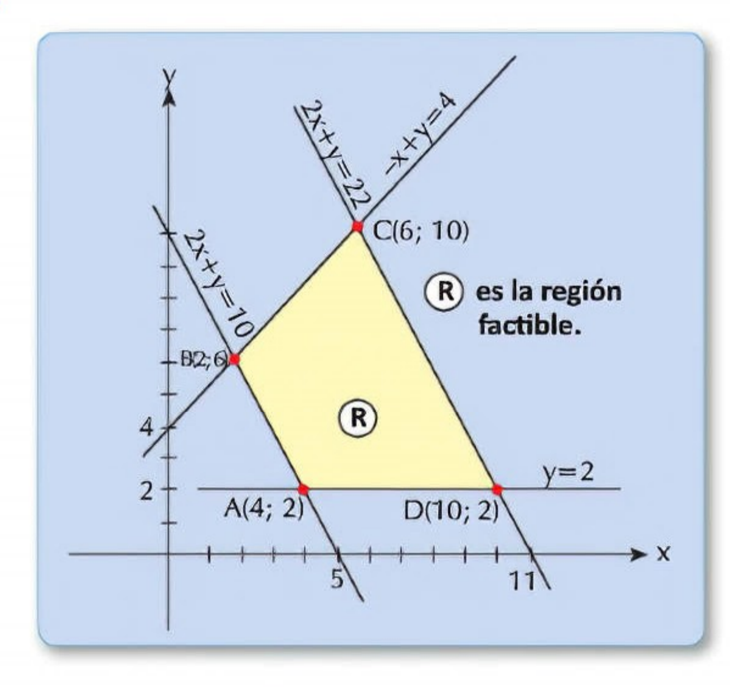
Sujeta al siguiente conjunto de restricciones lineales:

$$\begin{cases} -x + y \leq 4 \\ y \geq 2 \\ 2x + y \geq 10 \\ 2x + y \leq 22 \end{cases}$$

Para determinar la solución del problema se siguen los siguientes pasos:

1°. Graficamos las cuatro rectas correspondientes y coloreamos la región **R** limitada por ellas. Esta región se llama **región factible**.

2°. A continuación determinamos las coordenadas (si es que las hay) de los vértices de la región factible. Veamos:



3°. Para hallar los valores óptimos (máximo y mínimo) aplicamos el siguiente teorema fundamental:

Teorema fundamental

> "Si existe una solución que optimice la función objetivo, ésta debe encontrarse en uno de los vértices de la región factible".

Entonces se reemplazan los valores (x;y) de cada vértice de la región factible en la función objetivo. Veamos:

Vértice (x; y)	F(x; y) = x + y	
A(4; 2)	F(4;2) = 4 + 2 = **6**	← (Valor mínimo)
B(2; 6)	F(2; 6) = 2 + 6 = 8	
C(6; 10)	F(6; 10) = 6 + 10 = **16**	← (Valor máximo)
D(10; 2)	F(10; 2) = 10 + 2 = 12	

4°. Se selecciona el vértice que determine el valor óptimo.

Las coordenadas de este vértice son los valores que optimizan el problema, es decir, el par (x;y) es la solución del problema. Entonces:

- El par (4;2) es el que proporciona el valor mínimo de la función, siendo este valor igual a 6.
- El par (6; 10) es el que proporciona el valor máximo de la función, siendo este valor igual a 16.

Problemas resueltos

APLICANDO LA PROGRAMACIÓN LINEAL

1 En una prueba hay preguntas del tipo A que valen 20 puntos y del tipo B que valen 30 puntos. El tiempo para contestar una pregunta del tipo A es 4 minutos y, para una del tipo B es 8 minutos. El tiempo máximo permitido para la solución es de 96 minutos, y no se puede contestar más de 18 preguntas. Suponiendo que un alumno contesta sólo respuestas correctas, ¿cuántas preguntas de cada tipo deberá resolver para obtener la calificación máxima?

Resolución

Sea x = número de preguntas del tipo A

y= número de preguntas del tipo B

T(x;y) = puntuación total obtenida por el alumno en función de x e y

- Según datos:

  T(x;y) = 20x + 30y (esta es la función objetivo)

  Número total de respuestas permitidas: no más de 18, entonces:

  $$x + y \leq 18$$

  Tiempo de la prueba no más de 96 minutos:

  $$4x + 8y \leq 96$$

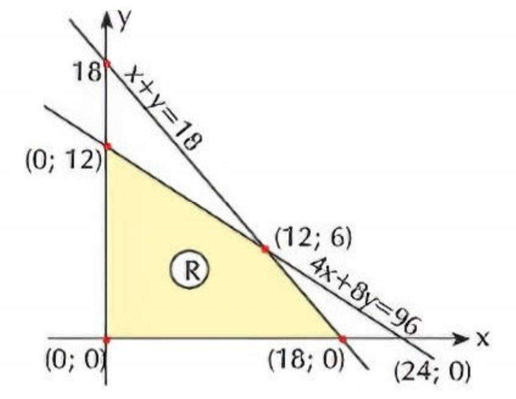
- Se sobreentiende que:

  Número de preguntas del tipo A: no negativo $x \geq 0$

  Número de preguntas del tipo B: no negativo $y \geq 0$

- Ahora representamos gráficamente el sistema de desigualdades (conjunto de restricciones lineales):

$$\begin{cases} x + y \leq 18 \\ 4x + 8y \leq 96 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



- Evaluamos los vértices de la región factible. Veamos:

Vértice (x; y)	Puntuación T(x; y) = 20x + 30y	
(0; 0)	T(0; 0) = 20 · 0 + 30 · 0 = 0	(Mínimo)
(0; 12)	T(0; 12) = 20 · 0 + 30 · 12 = 360	
(12; 6)	T(12; 6) = 20 · 12 + 30 · 6 = 420	(Máximo)
(18; 0)	T(18; 0) = 20 · 18 + 30 · 0 = 360	

- Por lo tanto:

La puntuación máxima es 420 puntos y para lograrla deberá resolver 12 preguntas del tipo A y 6 preguntas del tipo B.

Rpta.

2 Una empresa fabrica dos modelos de cámaras fotográficas: A y B. El modelo A deja ganancias de $50 por unidad y el modelo B de $40 por unidad. Para cumplir con la demanda diaria, la empresa debe producir un mínimo de 200 cámaras del modelo A y un mínimo de 120 cámaras del modelo B. Si la producción diaria no debe sobrepasar de 450 cámaras fotográficas, ¿cuántas de cada modelo se deben producir para maximizar las ganancias?

Resolución

Sea:

x = número de cámaras modelo A, producidas diariamente.

y = número de cámaras modelo B, producidas diariamente.

Como 50x es la ganancia diaria al vender "x" cámaras modelo A y 40y la ganancia diaria al vender "y" cámaras del modelo B, entonces la función objetivo que nos da la ganancia total por día es:

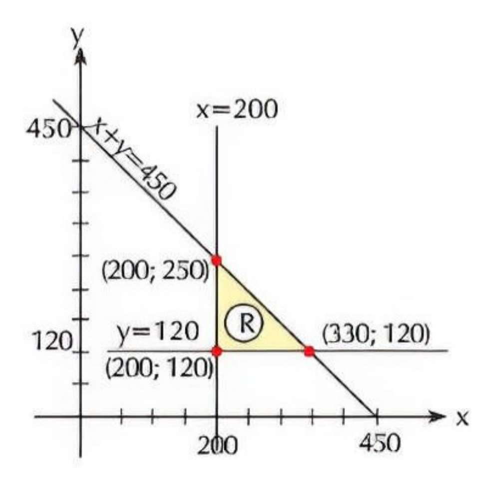
$$G(x;y) = 50x + 40y$$

- La condición de que el número de modelos A producidos diariamente debe ser como mínimo 200, se traduce en la desigualdad $x \geq 200$. Igualmente, $y \geq 120$. También, la condición de que la producción diaria total no debe pasar de 450 cámaras se traduce en $x+y \leq 450$.

  Hemos llegado al siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 450 \\ x \geq 200 \\ y \geq 120 \end{cases}$$

- Para encontrar la región factible R dibujamos primero las tres rectas x = 200 ; y = 120; x + y = 450. A continuación empleamos las desigualdades para determinar el coloreado de R, cuyos vértices tienen las coordenadas que se indican:



- Evaluamos los vértices.

Vértice (x; y)	Ganancia total G(x; y) = 50x + 40y
(200; 120)	G(200; 120) = 50 · 200 + 40 · 120 = 14 800
(200; 250)	G(200; 250) = 50 · 200 + 40 · 250 = 20 000
(330; 120)	G(330; 120) = 50 · 330 + 40 · 120 = 21 300

Los resultados de la tabla nos muestran que la ganancia diaria máxima es $21 300 y se da cuando se producen 330 cámaras del modelo A y 120 del modelo B.

Rpta.

3 Un carpintero fabrica mesas y sillas. Mensualmente puede fabricar como mínimo 20 mesas y como máximo 70 mesas. Se sabe también que el número de sillas fabricadas al mes no es mayor de 60. Si la ganancia por mesa es de S/ 15 y por silla S/ 10, y mensualmente puede fabricar a lo más 100 unidades combinadas, ¿cuántas unidades de cada tipo debe fabricar para maximizar sus ganancias ?

Resolución

Sean x = número de mesas fabricadas al mes

y = número de sillas fabricadas al mes

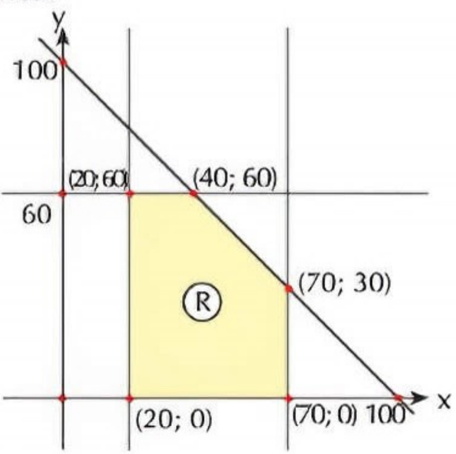
- La ganancia está dada por la función objetivo:

$$G(x;y) = 15x + 10y$$

  y está sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 20 \leq x \leq 70 \\ 0 \leq y \leq 60 \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

- Graficando:



- Evaluando los vértices

Vértice (x; y)	Ganancia: G(x; y) =15x+10y
(20; 0)	G(20; 0) = 15 · 20+10 · 0 = 300
(20; 60)	G(20; 60) = 15 · 20+10 · 60 = 900
(40; 60)	G(40; 60) = 15 · 40+10 · 60 = 1 200
(70; 30)	G(70; 30) = 15 · 70+10 · 30 = 1 350
(70; 0)	G(70; 0) = 15 · 70+10 · 0 = 1 050

El carpintero logrará una ganancia de S/ 1 350 mensuales, fabricando 70 mesas y 30 sillas al mes.

Rpta.

4 Se requiere programar una dieta con dos alimentos S y T. Cada unidad del alimento S contiene 100 calorías y 15 gramos de proteínas. La unidad del alimento T contiene 200 calorías y 10 gramos de proteínas. La dieta requiere como mínimo 1 000 calorías y 90 gramos de proteínas diarias.

Si el precio de cada unidad de alimento S es 400 nuevos soles y 300 nuevos soles el de cada unidad de alimento T, ¿cuántas unidades de cada alimento debe contener la dieta para minimizar el costo?

Resolución

Llamemos: x = cantidad de unidades del alimento S
y = cantidad de unidades del alimento T

Organicemos los datos en el siguiente cuadro:

	S	T	Mínimo
Número de calorías	100	200	1 000
Números de gramos de proteínas	15	10	90
Costo	400	300	

De acuerdo con los datos del problema, la minimización del costo está dada por la optimización de la función objetivo siguiente:

$$F(x;y) = 400x + 300y$$

El conjunto de restricciones lineales para las variables x, y está dado por el número de calorías y gramos de proteínas que contienen los alimentos.

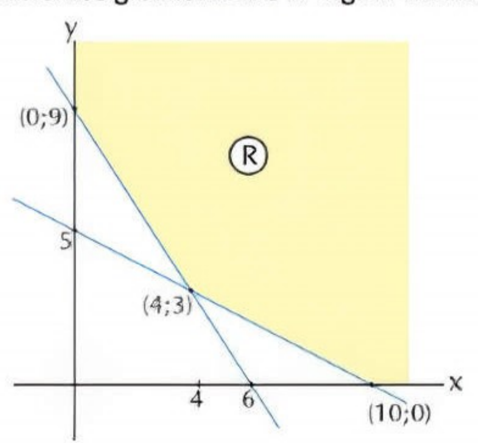
$$100x + 200y \geq 1\,000$$
$$15x + 10y \geq 90$$

Además debe cumplirse que $x \geq 0$, $y \geq 0$, porque el número de unidades que se consumen no puede ser negativo.

$$\begin{cases} 100x + 200y \geq 1\,000 \\ 15x + 10y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Resolvemos entonces el problema que consiste en minimizar la función objetivo $F(x;y) = 400x + 300y$, la cual está sujeta a las restricciones:

- Determinemos gráficamente la región factible R.



- Reemplazamos los valores (x,y) de cada vértice de R en la función objetivo.

Vértice (x; y)	Costo: F(x; y) = 400x + 300y
(10; 0)	F(10; 0) = 400 · 10 + 300 · 0 = 4 000
(4; 3)	F(4; 3) = 400 · 4 + 300 · 3 = 2 500
(0; 9)	F(0; 9) = 400 · 0 + 300 · 9 = 2 700

Seleccionamos el vértice que optimiza la función objetivo.

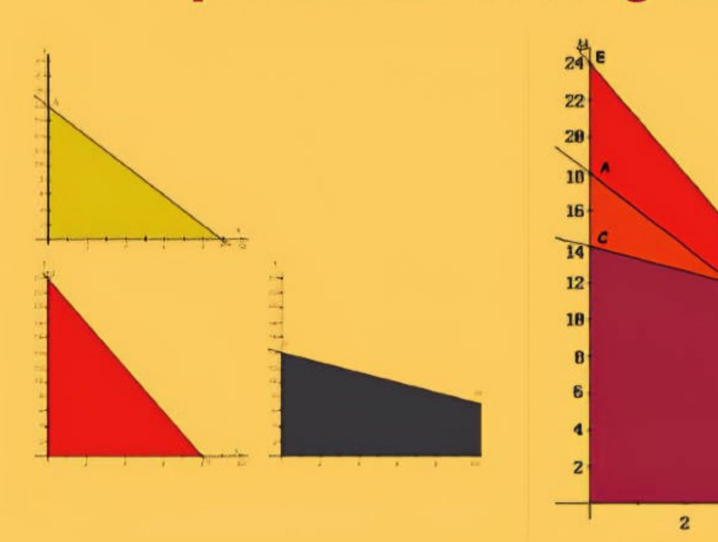
Este vértice es (4;3) y el costo mínimo es S/ 2 500.

La dieta debe contener 4 unidades del alimento S y 3 unidades del alimento T, para que el costo sea mínimo.

Rpta.

Amplía tus conocimientos

JSIMPLEX: Programa para Resolver problemas de Programación Lineal



Esta página nos permite resolver problemas de PROGRAMACIÓN LINEAL usando el método Simplex. Para los problemas que tengan variables artificiales se usará el método de la gran M, y para los problemas que involucren variables enteras se usará el método de ramificar y acotar *(branch and bound)*.

Aplicación de programa en la computadora

Instrucciones:

Escoja el objetivo: Maximizar o Minimizar, luego digite la cantidad de variables y de restricciones que hay en el problema, luego haga *clic* en el botón "preparar".

Preparar Problema Lineal

Objetivo: Maximizar

Cantidad de variables:

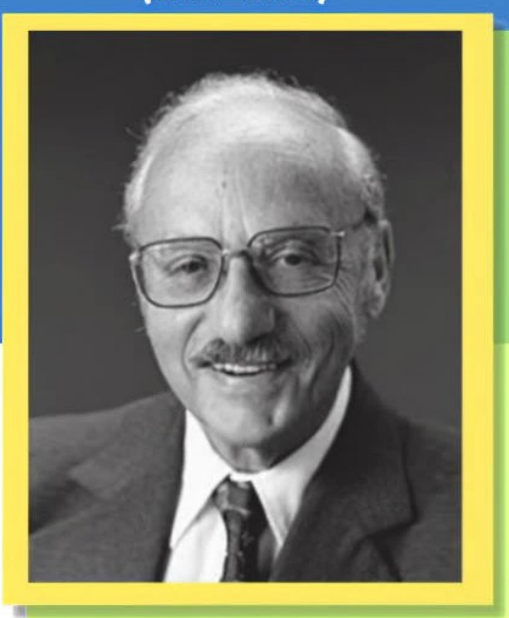
Cantidad de restricciones:

Ahora te toca a ti:

1. ¿Qué programas conoces que te ayuden a realizar problemas de programación lineal?
2. ¿Qué es el método Simplex?

Dr. George B. Dantzig

(1914 - 2005)



Personaje de la Matemática

George Bernard Dantzig (8 de noviembre de 1914 – 13 de mayo de 2005) fue un matemático reconocido por desarrollar el método simplex y es considerado como el padre de la programación lineal. Recibió muchos honores, tales como la Medalla Nacional a la Ciencia en 1975 y el premio de Teoría John von Neumann en 1974.

Fue miembro de la Academia Nacional de Ciencias, la Academia Nacional de Ingeniería, además de la Academia Americana de Artes y Ciencias.

Obtuvo su licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de Maryland en 1936; su grado de máster en Matemáticas en la Universidad de Míchigan y su doctorado en la Universidad de California, Berkeley en 1946. Recibió además un doctorado honorario de la Universidad de Maryland en 1976.

El padre de George, Tobías Dantzig, fue un matemático ruso que realizó estudios con Henri Poincaré en París. Tobías se casó con una estudiante de la universidad de Sorbonne, Anja Ourisson, y la pareja inmigró a los Estados Unidos.

Un hecho real en la vida de Dantzig dio origen a una famosa leyenda en 1939, cuando él era un estudiante en Berkeley. Al comienzo de una clase a la que Dantzig acudía con retraso, el profesor Jerzy Neyman escribió en la pizarra dos ejemplos famosos de problemas estadísticos no resueltos.Al llegar Dantzig a clase, pensó que los dos problemas eran tarea para la casa y los anotó en su cuaderno. De acuerdo con Dantzig, los problemas "le parecieron ser un poco más difíciles de lo normal", pero unos pocos días después obtuvo soluciones completas para ambos, aún creyendo que estos eran tareas que debía entregar. Seis semanas después, Dantzig recibió la visita de un excitado profesor Neyman, quien había preparado una de las soluciones de Dantzig para ser publicadas en una revista matemática.

George Dantzig se doctoró en Berkeley en 1946. Inicialalmente iba a aceptar un puesto como profesor en Berkeley, pero fue persuadido por su esposa y colegas del Pentágono para volver ahí como consejero matemático de la USAF. Fue ahí, en 1947 que por primera vez presentó un problema de programación lineal, y propuso el Método Simplex para resolverlo. En 1952 se convirtió en investigador matemático en la Corporación RAND, en cuyos computadores comenzó a implementar la programación lineal. Además de su trabajo significativo en el desarrollo del método simplex y la programación lineal, Dantzig también hizo avances en los campos de la teoría de la descomposición, análisis de sensibilidad, métodos de pivot complementarios, optimización a gran escala, programación no lineal, y programación bajo incertidumbre.

Investiga:



1. ¿Que opinión tienes sobre los aportes de este matemático?
2. Construye un organizador visual de la vida y obra de George Dantzig.



Logaritmación, funciones exponenciales y logarítmicas



Corita, la fórmula para calcular el monto compuesto (M), cuando las capitalizaciones son anuales, es $M = C_0(1+i)^n$, donde C_0 es el capital inicial, i es la tasa anual y n el número de años. ¿Cómo despejo la variable n que está como exponente?.

Memo, toma logaritmo a ambos miembros de la igualdad y tendrás
$\log M = \log C_0 \times (1+i)^n$, de donde
$\log M = \log C_0 + \log(1+i)^n$, entonces
$\log M - \log C_0 = \log(1+i)^n$.
Ahora, el logaritmo de una potencia es igual que el exponente por el logaritmo de la base.
$\log M - \log C_0 = n \log(1+i)$.
Por lo tanto, $n = \dfrac{\log M - \log C_0}{\log(1+i)}$.







Competencia	Temas
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Logaritmos. Identidad fundamental del logaritmo. Logaritmo de un producto. Logaritmo de un cociente. Logaritmo de una potencia. Logaritmo de una raíz. Cambio de base. Regla de la cadena. Regla del intercambio. Cologaritmo. Antilogaritmo. Sistema logarítmico decimal. Logaritmo neperiano. Ecuaciones exponenciales. Ecuaciones logarítmicas.
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Función exponencial. Propiedades de la función exponencial. Inecuaciones exponenciales. Función logarítmica. Gráfica de una función logarítmica. Propiedades de la función logarítmica. Inecuación logarítmica.

ENFOQUE INTERCULTURAL

Valor	Actitudes que suponen
Respeto a la identidad cultural	Reconocimiento al valor de las diversas identidades culturales y relaciones de pertenencia de los estudiantes.

Recupera saberes previos



Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:

1 Se sabe que $8 = 2^x$, además $243 = 3^y$.

a. ¿Cuánto vale $x + y$?

b. ¿Cuál es el valor de $x^2 - xy + y^2$?

2 Si $7^a = 343$ y $13^b = 169$,

¿cuánto vale $\sqrt[5]{a^3 + b^2 + 1}$?

3 Si $2^{x+3} = 512$, ¿cuál es el valor de 17^{8-x}?

4 El área del terreno rectangular que se muestra es 1 024 m^2.



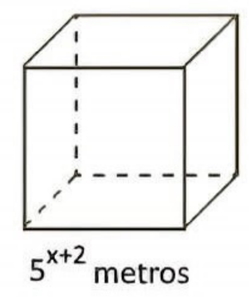
2^{x-4} metros

2^x metros

a. ¿Cuál es el valor de x?

b. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

5 El volumen del cubo es 125 m^3.

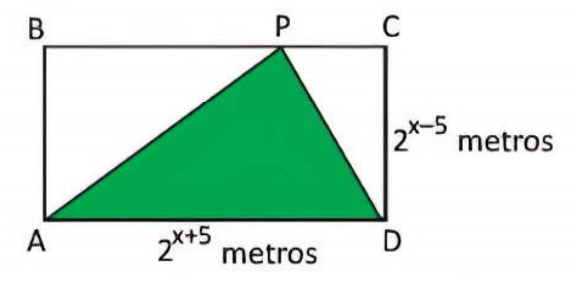


5^{x+2} metros

a. ¿Cuál es el valor de x?

b. ¿Cuánto mide la arista del cubo?

6 Observa el rectángulo ABCD y la región triangular APD.



Marca la expresión que representa el área de la región triangular.







7 El recipiente que se muestra tiene la forma de un paralelepípedo rectangular y contiene 3^{x+4} granos de frijol.



Si se sacan 3^x granos, ¿cuántos granos de frijol quedan en el recipiente? marca la respuesta.







8 La fórmula $A = b + 2^x$ permite calcular A cuando se conocen los valores de b y x.

a. Despeja la variable b en función de A y x.

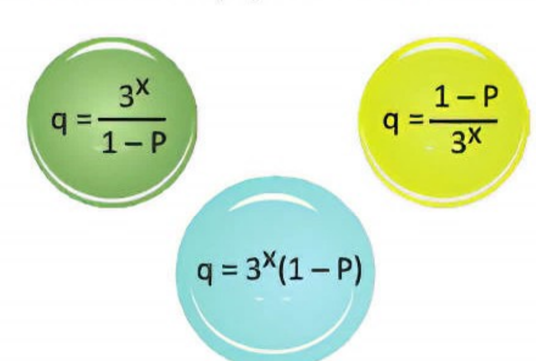
b. Despeja la variable x en función de A y b.

¿Cuál de las variables no pudiste despejar? ¿por qué?

9 De la fórmula $P = 1 - \frac{q}{3^x}$

Mónica despejó q en función de P y x.

Marca el despeje de Mónica.



Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa su comprensión de la definición de logaritmo de un número, cuando pasa de la forma logarítmica a la forma exponencial y resuelve ecuaciones donde el número está dado en función de la incógnita.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Aplica las propiedades operativas de los logaritmos en la resolución de ecuaciones logarítmicas y verifica reemplazando el o los valores de la incógnita en la ecuación logarítmica original.

Logaritmos

A continuación estudiaremos un nuevo operador matemático llamado logaritmo creado por los ingleses Henry Briggs y Jhon Neper en los años de 1615.

Definición: Se llama logaritmo en base **b** de un número **a** a otro número **n**, tal que, **b** elevado a la **n** sea igual a **a**.

En símbolos:

$\log_b a = n \rightarrow b^n = a$ **donde:**

- **b** = base ($b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$)
- **a** = número ($a \in \mathbb{R}^+$)
- **n** = logaritmo de "**a**" en base "**b**" ($n \in \mathbb{R}$)

Ejemplos

a) $\log_2 16 = 4$, pues: $2^4 = 16$

b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pues: $3^{-2} = \frac{1}{9}$

c) $\log_8 8 = 1$, pues: $8^1 = 8$

d) $\log_2 8 = 3$, pues: $(2)^3 = 8$

e) $\log_{1/2} 4 = -2$, pues: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

f) $\log_{\sqrt{2}} 16 = 8$, pues: $\left(\sqrt{2}\right)^8 = 16$

Problemas resueltos

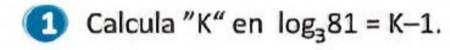
1 Calcula "K" en $\log_3 81 = K-1$.

Resolución

Aplicando la definición de logaritmo, obtenemos:

$3^{K-1} = 81$

$3^{K-1} = 3^4$



Identificando: $K - 1 = 4$ $\therefore$ $K = 5$ **Rpta.**

2 Calcula "x" en $\log_{\sqrt[5]{8}} (x-1) = 10$.

Resolución

Aplicando la definición de logaritmo, obtenemos:

$\sqrt[5]{8}^{10} = x - 1 \rightarrow 8^2 = x - 1$

$64 + 1 = x$

$\therefore$ $x = 65$ **Rpta.**

Identidad fundamental del logaritmo

$a = b^{\log_b a}$; $a > 0$; $b > 0 \wedge b \neq 1$

Demostración:

Por definición: $\underbrace{\log_b a}_{❶} = n \rightarrow \underbrace{b^n = a}_{❷}$

Reemplazando ❶ en ❷, obtenemos: $b^{\log_b a} = a$

Ejemplos

a) $7^{\log_7 134} = 134$;

b) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 8} = 8$;

c) $4^{\log_4 62} = x$ ➡ $62 = x$

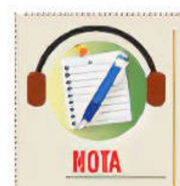
Logaritmo de un producto

Sea por ejemplo:

$\log_2(4 \cdot 16) = \log_2 64 = 6$, pues: $2^6 = 64$

$\log_2 4 = 2$, pues: $2^2 = 4$

$\log_2 16 = 4$, pues: $2^4 = 16$



$$\underbrace{\log_2(4 \cdot 16)}_{6} = \underbrace{\log_2 4}_{2} + \underbrace{\log_2 16}_{4}$$

PROPIEDAD: El logaritmo de un producto, en base **b**, es igual a la suma de los logaritmos de los factores en la misma base.

En símbolos: $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

Donde: $\begin{cases} \text{Los factores "x"} \wedge \text{"y"} \in \mathbb{R}^+ \\ b = \text{base del logaritmo, } (b > 0 \wedge b \neq 1) \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN:

Sea: $\log_b(x \cdot y)$

Designamos "m" y "n" a los respectivos logaritmos de **x** e **y** en base **b**.

$\log_b x = m \rightarrow b^m = x$, por definición de logaritmo

$\log_b y = n \rightarrow b^n = y$, por definición de logaritmo

Multiplicando: $b^m \cdot b^n = x \cdot y$

$b^{m+n} = x \cdot y$, por propiedad de potencias de igual base.

Por definición de logaritmo es: $\log_b(x \cdot y) = m+n$

Sustituyendo m y n, queda así:

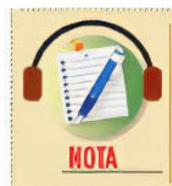
$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

Logaritmo de un cociente

Sea, por ejemplo:

$\log_2(64 \div 4) = \log_2 16 = 4$, pues: $2^4 = 16$

$\begin{cases} \log_2 64 = 6 \text{ , pues: } 2^6 = 64 \\ \log_2 4 = 2 \text{ , pues: } 2^2 = 4 \end{cases}$



$$\underbrace{\log_2(64 \div 4)}_{4} = \underbrace{\log_2 64}_{6} - \underbrace{\log_2 4}_{2}$$

PROPIEDAD: El logaritmo de un cociente, en base **b**, es igual a la diferencia entre los logaritmos del dividendo y del divisor en la misma base.

En símbolos: $\log_b(x \div y) = \log_b x - \log_b y$

Donde:

$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \wedge y \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \\ b = \text{base del logaritmo } (b > 0 \wedge b \neq 1) \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN:

Sea: $\log_b(x \div y)$

Designamos "m" y "n" a los respectivos logaritmos de **x** e **y** en base **b**.

$\log_b x = m \rightarrow b^m = x$, por definición de logaritmo

$\log_b y = n \rightarrow b^n = y$, por definición de logaritmo

Dividiendo: $\dfrac{b^m}{b^n} = \dfrac{x}{y} \rightarrow b^{m-n} = \dfrac{x}{y}$

Por definición de logaritmos es: $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = m - n$

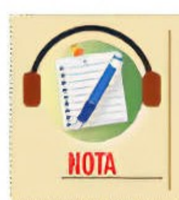
Sustituyendo m y n, queda así:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Logaritmo de una potencia

Sea por ejemplo: $\log_2 4^3 = \log_2 64 = 6$, pues: $2^6 = 64$

$\log_2 4 = 2$, pues: $2^2 = 4$



$$\underbrace{\log_2 4^3}_{6} = 3 \cdot \underbrace{\log_2 4}_{2}$$

PROPIEDAD: El logaritmo en base **b** de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo en base **b** de la base de la potencia.

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Donde: $a \in \mathbb{R}^+ ; b > 0 ; b \neq 1 ; n \in \mathbb{Z}$

DEMOSTRACIÓN:

$\log_b a^n = \log_b \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{'n' veces}}$, por definición de potencia.

$\log_b a^n = \underbrace{\log_b a + \log_b a + \log_b a + \ldots + \log_b}_{\text{'n' veces}}$,

por propiedad de logaritmo de un producto.

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz puede reducirse al caso anterior teniendo en cuenta que un radical puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario.

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \log_b x^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x \quad \rightarrow$$

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$$

PROPIEDAD: El logaritmo de una raíz, en base **b**, es igual al logaritmo del radicando, en la misma base, dividido por el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x \; ; \; n \geq 2$$

Importante:

1. $\log_b x = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{x} = \log_{b^m} x^m$

Ejemplo:

$$\log_{16} 25 = \log_{\sqrt{16}} \sqrt{25} = \log_{16^2} 25^2$$



La logaritmación no es distributiva con respecto a ninguna de las operaciones definidas en $\mathbb{R}$.

Ejemplo: $2\log(x+y) \neq 2\log x + 2\log y$

$5\log(x-y) \neq 5\log x - 5\log y$

2. $\log_{b^n} x^m = \frac{m}{n} \log_b x \; ; \; m \in \mathbb{R} ; n \in \mathbb{R} - \{0\}$

Ejemplo: $\log_{2^4} 8^3 = \frac{3}{4} \log_2 8$

Cambio de base

Supongamos que se desea encontrar **$\log_a x$**, pero la calculadora o la tabla sólo nos da logaritmos en base **b**.

Llamemos **y** al **$\log_a x$**.

1. $\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$, por definición de logaritmo.

Aplicamos a ambos miembros logaritmo en base **b**.

2. $\log_b a^y = \log_b x$

El primer miembro es el logaritmo de una potencia.

$\log_b a^y = y \cdot \log_b a$, reemplazando en ❷, obtenemos:

$y \cdot \log_b a = \log_b x$, despejando "y": $y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

sustituyendo "y" por la expresión ❶.

Obtenemos:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \; ; \; x>0 \; ; \; a>0 \; ; \; a \neq 1 \; ; \; b>0 \; ; \; b \neq 1$$

Ejemplo 1 $\log_9 5$ a base $\sqrt{3}$

$$\log_9 5 = \frac{\log_{\sqrt{3}} 5}{\log_{\sqrt{3}} 9}$$

Ejemplo 2 $\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}$

Importante:

* $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ **además:** $\log_a x \cdot \log_x a = 1$

Regla de la cadena

Si $a; b; c; d \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$; $c \neq 1$; $d \neq 1$, se cumple que: $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando la propiedad:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \begin{pmatrix}\text{Propiedad de} \\ \text{cambio de base}\end{pmatrix}$$

En base b = 10 tenemos: $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

Aplicando esta propiedad al primer miembro:

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log c} \cdot \frac{\log c}{\log d}$$

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \frac{\log a}{\log d}$$

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$$

Ejemplo 1 Reduce $\log_6 25 \cdot \log_x 36 \cdot \log_5 x$

Resolución:

$\log_6 25 \cdot \log_x 36 \cdot \log_5 x =$

$$\frac{\log 25}{\log 6} \cdot \frac{\log 36}{\log x} \cdot \frac{\log x}{\log 5} = \frac{\log 5^2 \cdot \log 6^2}{\log 6 \cdot \log 5} = \frac{2\log 5 \cdot 2\log 6}{\log 6 \cdot \log 5} = 4 \text{ Rpta.}$$

Ejemplo 2 Halla "x" en:

$$\log_9 25 \cdot \log_4 9 \cdot \log_4 4 = \log_2(x-3)$$

Resolución:

$$\frac{\log 25}{\log 9} \cdot \frac{\log 9}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 4} = \log_2(x-3)$$

$$\frac{\log 5^2}{\log 2^2} = \log_2(x-3) \Rightarrow \frac{2\log 5}{2\log 2} = \log_2(x-3)$$

$$\log_2 5 = \log_2(x-3)$$

Identificando: $5 = x - 3 \Rightarrow \therefore\ x = 8$ **Rpta.**

Regla del Intercambio

Sea $\{a; b; c\} \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1$, se cumple que:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Ejemplo: Reduce $\dfrac{5^{\log_2 7} + 7^{\log_2 5}}{7^{\log_2 5}}$

Resolución:

Sabemos que: $5^{\log_2 7} = 7^{\log_2 5}$

Luego: $\dfrac{7^{\log_2 5} + 7^{\log_2 5}}{7^{\log_2 5}} = \dfrac{2\left(7^{\log_2 5}\right)}{7^{\log_2 5}} = 2$ **Rpta.**

Cologaritmo

Definición: Se denomina cologaritmo de un número **b** positivo en una base dada **a** positiva y diferente de la unidad, como el logaritmo de la inversa de dicho número en esa misma base. Así:

$$\text{colog}_a b = \log_a\left(\frac{1}{b}\right) \ ; \ b > 0 \ ; \ a > 0 ; a \neq 1$$

Ejemplo: $\text{colog}_2\left(\dfrac{1}{8}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

Teorema:

Si $b > 0$ y $a > 0$; $a \neq 1$, se cumple que:

$$\text{colog}_a b = -\log_a b$$

Antilogaritmo

Definición: El antilogaritmo de un número real en una base dada, es el número que resulta de elevar la base al número. $\text{Antilog}_a b = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

a) $\text{Antilog}_2 6 = 2^6 = 64$

b) $\text{Antilog}_{(1/2)}(-5) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$

Problemas resueltos SOBRE LOGARITMOS

1 Halla el valor de "x" que satisface la igualdad

$$\log_x \sqrt[4]{125} = \frac{3}{2}$$

A) 5 B) $\sqrt{3}$ C) 4 D) $\sqrt{5}$ E) 3

Resolución

Por definición de logaritmo, obtenemos:

$\sqrt[4]{125} = x^{3/2}$, pero: $125 = 5^3$

$\sqrt[4]{5^3} = x^{3/2}$

$5^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow 5^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} = x \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}} = x$

$\therefore$ $\sqrt{5} = x$ **Rpta. D**

2 Simplifica:

$$R = \log_{\sqrt{8}} \log_{\sqrt{2}} 2$$

A) 3/2 B) 2/3 C) 1/3 D) 5/2 E) 5/8

Resolución

$R = \log_{\sqrt{8}} \log_{\sqrt{2}} 2$, pero $2 = \sqrt{2}^2$

$R = \log_{\sqrt{8}} \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2$, por propiedad $\log_b b^n = n$

$R = \log_{\sqrt{8}} 2 = \log_{\sqrt{2^3}} 2 = \log_{2^{3/2}} 2^1$ ... ❶

Aplicando la propiedad: $\log_{b^m} b^n = \frac{n}{m}$

En ❶, obtenemos:

$R = \frac{1}{3/2} = 2/3$ $\therefore$ $R = 2/3$ **Rpta. B**

3 Determina "x" si:

$$a^{\log_a(ax-b)} + b^{\log_b(bx-a)} = a + b$$

A) a+b B) 2(a+b) C) 1 D) 2 E) 0

Resolución

Aplicando la propiedad: $N^{\log_N p} = p$

Obtenemos:

$(ax - b) + (bx - a) = a+b$

$ax + bx = a + b + a + b$

$x(a+b) = 2(a+b) \rightarrow \therefore$ $x = 2$ **Rpta. D**

4 Calcula el valor de:

$$E = \log_5 15 \cdot \log_3 15 - \log_3 5 - \log_5 3$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 5 E) 15

Resolución

Aplicando la propiedad:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

Obtenemos:

$$E = \frac{\log 15}{\log 5}\cdot\frac{\log 15}{\log 3} - \log_3 5 - \log_5 3$$

$$E = \frac{\log 5\cdot 3}{\log 5}\cdot\frac{\log 3\cdot 5}{\log 3} - \log_3 5 - \log_5 3$$

$$E = \frac{\log 5 + \log 3}{\log 5}\cdot\frac{\log 3 + \log 5}{\log 3} - \log_3 5 - \log_5 3$$

$$E = \left(\frac{\log 5}{\log 5} + \frac{\log 3}{\log 5}\right)\left(\frac{\log 3}{\log 3} + \frac{\log 5}{\log 3}\right) - \log_3 5 - \log_5 3$$

$E = (1 + \log_5 3)(1 + \log_3 5) - \log_3 5 - \log_5 3$

$E = 1 + \log_3 5 + \log_5 3 + \underbrace{\log_5 3 \cdot \log_3 5}_{1} - \log_3 5 - \log_5 3$

$E = 1 + 1 = 2 \rightarrow \therefore$ $E = 2$ **Rpta. A**

5 Resolver:

$$\log x^2 = \log 2 + \log x$$

A) 4 B) 3 C) 1 D) 2 E) –2

Resolución

Aplicando la propiedad:

$\log A + \log B = \log (A \cdot B)$

Obtenemos:

$\log x^2 = \log 2 \cdot x$

Identificando: $x^2 = 2x \rightarrow x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

i) $x = 0$; ii) $x - 2 = 0$ $\therefore$ $x = 2$ **Rpta. D**

6 Si:

$A = \log_{\sqrt{b}} \text{Anti}\log_{b^2} 4$; $B = \text{Antilog}_{b^2} \log_{b^2} 4 - 1$

Calcula el valor de A· B.

A) 192 B) 24 C) 48 D) 96 E) 4

Resolución

- En la expresión $A = \log_{\sqrt{b}} \text{Anti}\log_{b^2} 4$

Aplicamos: $\text{Antilog}_b a = b^a$, obteniendo:

$A = \log_{\sqrt{b}} b^{2\cdot 4} = \log_{b^{1/2}} b^8$

$A = \frac{8}{1/2} = 16 \Rightarrow A = 16$

- En la expresión: $B = \text{Antilog}_{b^2} \log_{b^2} 4 - 1$

Hacemos: $\log_{b^2}4 = x \Rightarrow$ $4 = b^{2x}$ ... ❶

Luego: $B = \text{Antilog}_{b^2}x - 1$

$B = b^{2x} - 1$ ... ❷

Reemplazamos ❶ en ❷:

$B = 4 - 1 = 3 \rightarrow$ $B = 3$

$\therefore$ $A \cdot B = 16 \cdot 3 = 48$ **Rpta. C**

7 Reduce:

$$E = \frac{\log_5^3 \frac{1}{25}}{\log_3 81} - \frac{1}{\log_{1/9} 3}$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución

La expresión dada se puede escribir de la manera siguiente:

$$E = \frac{\left(\log_5 \frac{1}{25}\right)^3}{\log_3 3^4} - \frac{1}{\log_{3^{-2}} 3^1}$$

$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$

$$E = \frac{\left(\log_5 5^{-2}\right)^3}{4} - \frac{1}{\left(\frac{1}{-2}\right)}$$

Propiedad

$\log_b b^n = n$

$$E = \frac{(-2)^3}{4} + 2 = \frac{-8}{4} + 2 = -2 + 2 = 0$$

$\therefore$ $E = 0$ **Rpta. B**

8 Reduce

$$R = 2\log_3 a^4 - \log_3 \sqrt[3]{a} + 4\log_3 b - 2\log_3 b^2$$

A) $\frac{13}{3}\log_3 a$ B) $23\log_3 a$ C) $\frac{23}{3}\log_3 a$

D) $\frac{29}{3}\log_3 a$ E) $\frac{36}{7}\log_3 a$

Resolución

Aplicamos la propiedad: $n\log_b a = \log_b a^n$

Obtenemos:

$$R = \log_3 a^{4 \cdot 2} - \log_3 \sqrt[3]{a} + \log_3 b^4 - \log_3 b^{2 \cdot 2}$$

$R = \log_3 a^8 - \log_3 \sqrt[3]{a}$, aplicando la propiedad:

$$\log_b x - \log_b y = \log_b\left(\frac{x}{y}\right)$$

Obtenemos:

$$R = \log_3\left(\frac{a^8}{\sqrt[3]{a}}\right) = \log_3 a^8 \cdot a^{-1/3} = \log_3 a^{8 - 1/3}$$

$$R = \log_3 a^{23/3} = \frac{23}{3}\log_3 a$$

$\therefore$ $R = \frac{23}{3}\log_3 a$ **Rpta. C**

9 Calcula:

$$M = \frac{1}{1 + \log_8 15} + \frac{1}{1 + \log_3 40} + \frac{1}{1 + \log_5 24}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución

Teniendo en cuenta que:

$\log_b b = 1$

La expresión M se puede escribir así:

$$M = \frac{1}{\log_8 8 + \log_8 15} + \frac{1}{\log_3 3 + \log_3 40} + \frac{1}{\log_5 5 + \log_5 24}$$

$$M = \frac{1}{\log_8 (8 \cdot 15)} + \frac{1}{\log_3 (3 \cdot 40)} + \frac{1}{\log_5 5 + (5 \cdot 24)}$$

$$M = \frac{1}{\log_8 120} + \frac{1}{\log_3 120} + \frac{1}{\log_5 120}$$

Según la propiedad $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ tenemos:

$$M = \log_{120} 8 + \log_{120} 3 + \log_{120} 5$$

$$M = \log_{120}(8 \cdot 3 \cdot 5) = \log_{120} 120 = 1$$

$\therefore$ $M = 1$ **Rpta. A**

10 Si $\log_{14}28 = a$, halla $\log_{49}16$ en términos de **a**.

A) $\frac{a+2}{a-1}$ B) $\frac{2-2a}{a-2}$ C) $\frac{1-2a}{a-1}$

D) $\frac{4-2a}{a-3}$ E) $\frac{a-1}{a+1}$

Resolución

Sea: $\log_{49}16 = x$ ... ❶

entonces:

$\log_{7^2}2^4 = x \rightarrow \frac{4}{2}\log_7 2 = x \rightarrow \log_7 2 = \frac{x}{2}$ ... ❷

Según datos $\log_{14}28 = a$

Aplicando la propiedad del cambio de base:

$$\log_{14} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 14} = a$$

$$\frac{\log_7\left(2^2 \cdot 7\right)}{\log_7 (2 \cdot 7)} = a \rightarrow \frac{\log_7 2^2 + \log_7 7}{\log_7 2 + \log_7 7} = a$$

$$\rightarrow \frac{2\log_7 2 + 1}{\log_7 2 + 1} = a \text{ ... ❸}$$

Reemplazando (2) en (3):

$$\frac{2\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\frac{x}{2} + 1} = a \rightarrow \frac{2x+2}{x+2} = a$$

$$\rightarrow ax + 2a = 2x + 2 \rightarrow x = \frac{2-2a}{a-2}$$

pero $x = \log_{49}16$

$\therefore$ $\log_{49}16 = \frac{2-2a}{a-2}$ **Rpta. B**

11 Si $\log_{abc}a = 7$; $\log_{abc}b = 4$; a, b, c, $\in \mathbb{R}^+$ el valor de $\log_{abc}\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}} \div \sqrt{c}\right)$ es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Resolución

En primer lugar hallamos $\log_{abc}c$

Partimos del hecho que:

$$\log_{abc}(abc) = 1$$

entonces $\log_{abc}a + \log_{abc}b + \log_{abc}c = 1$

$$7 + 4 + \log_{abc}c = 1 \rightarrow \boxed{\log_{abc}c = -10}$$

Aplicando propiedades:

$$\log_{abc}\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}} \div \sqrt{c}\right) = \log_{abc}\sqrt[3]{a\sqrt{b}} - \log_{abc}\sqrt{c}$$

$$= \log_{abc}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}} - \log_{abc}c^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\log_{abc}a + \frac{1}{6}\log_{abc}b - \frac{1}{2}\log_{abc}c$$

$$= \frac{1}{3}(7) + \frac{1}{6}(4) - \frac{1}{2}(-10) = 8$$

$\therefore$ $\log_{abc}\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}} \div \sqrt{c}\right) = 8$ **Rpta. D**

12 Efectúa:

$$M = 8^{1+\log_8 3} + 7^{1+\log_{49}81} - 36^{2-\log_6 4}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución

La expresión se puede escribir así:

$$M = 8^1 \cdot 8^{\log_8 3} + 7^1 \cdot 7^{\log_{49}81} - \frac{36^2}{36^{\log_6 4}}$$

Aplicando las propiedades:

$\boxed{b^{\log_b a} = a}$, $\boxed{\log_b a = \log_{\sqrt{b}}\sqrt{a}}$, $\boxed{\log_b a = \log_{b^2}a^2}$

Tenemos:

$$M = 8 \div 3 + 7 \div 7^{\log_7 9} - \frac{36^2}{36^{\log_{36}16}}$$

$$M = 24 + 7 \div 9 - \frac{36^2}{16}$$

$M = 24 + 63 - 81$ $\therefore$ $M = 6$ **Rpta. E**

13 Simplifica: $E = \dfrac{3^{1+\log_2 6} + 6^{2+\log_2 6}}{2^{\log_8 27} \cdot 6^{\log_2 3}}$

A) 73 B) 74 C) 75 D) 76 E) 77

Resolución

La expresión se puede escribir así:

$$E = \frac{3^1 \cdot 3^{\log_2 6} + 6^2 \cdot 6^{\log_2 6}}{2^{\log_{2^3}3^3} \cdot 6^{\log_2 3}} = \frac{3 \cdot 3^{\log_2 6} \div 6^2 \cdot 6^{\log_2 2 + \log_2 3}}{2^{\log_2 3} \cdot 6^{\log_2 3}}$$

$$E = \frac{3 \cdot 3^{\log_2 6} + 36 \cdot 6^{1+\log_2 3}}{2^{\log_2 3} \cdot 6^{\log_2 3}} = \frac{3 \cdot 3^{\log_2 6} + 36 \cdot 6^1 \cdot 6^{\log_2 3}}{2^{\log_2 3} \cdot 6^{\log_2 3}}$$

Pero según propiedades:

$2^{\log_2 3} = 3$; $3^{\log_2 6} = 6^{\log_2 3}$, luego:

$$E = \frac{3 \cdot 6^{\log_2 3} + 216 \cdot 6^{\log_2 3}}{3 \cdot 6^{\log_2 3}} = \frac{(3+216) \cdot 6^{\log_2 3}}{3 \cdot 6^{\log_2 3}} = \frac{219}{3} = 73$$

$\therefore$ $E = 73$ **Rpta. A**

Sistema logarítmico decimal

El **sistema logarítmico decimal** tiene como base el número real **10.**

Un logaritmo en base 10 se denota $\log_{10} x$ o simplemente, log x, pues por ser el sistema más usado, se puede omitir la escritura de la base. A estos logaritmos se le llama vulgares (comunes), decimales (por ser de base 10) o de Briggs (por el nombre del creador).

Logaritmos decimales de potencias de 10

Calculemos los logaritmos decimales de algunas potencias de 10.

Analicemos la siguiente tabla:

Antilogaritmo	Potencia	Logaritmo
1	10^0	log 1 = 0
10	10^1	log 10 = 1
100	10^2	log 100 = 2
1000	10^3	log 1000 = 3
⋮	⋮	⋮
0,1	10^{-1}	log 0,1 = –1
0,01	10^{-2}	log 0,01 = –2
0,001	10^{-3}	log 0,001 = –3
0,0001	10^{-4}	log 0,0001 = –4
⋮	⋮	⋮

En general: El logaritmo de una potencia de 10 es un número entero

$$\log 10^n = n \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

Característica y mantisa

Un número real positivo **a**, está escrito en notación científica si se ha expresado en la forma

$$a = K \cdot 10^n \; ; \; 1 \leq K < 10 \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

- La característica del logaritmo de un número mayor que 1 se obtiene restando 1 al número de cifras enteras.

$\log \underbrace{531}_{3 \text{ cifras}} = 2 + \text{mantisa}$; $3 - 1 = 2$

$\log \underbrace{5496}_{4 \text{ cifras}} = 3 + \text{mantisa}$; $4 - 1 = 3$

- La característica de un número positivo menor que 1 se obtiene contando los ceros que aparecen antes de la primera cifra significativa y anteponiendo el signo menos.

$\log \underbrace{0,0001}_{4 \text{ ceros}}5 = -4 + \text{mantisa}$

$\log \underbrace{0,000001}_{6 \text{ ceros}}5 = -6 + \text{mantisa}$

Hoy, el logaritmo de un número se conoce en forma directa mediante una **calculadora científica.**

Logaritmo neperiano

Se llaman **logaritmos naturales o neperianos** a los logaritmos en base **e**, donde **e** es el número irracional cuyas primeras cifras son: 2,7182... y se indica:

$\log_e x = \ln x$; así para indicar el logaritmo natural de **2**, escribimos **ln 2**.

Obtención de logaritmos con calculadora

Algunas calculadoras están preparadas para obtener directamente los logaritmos **Decimales o los Neperianos.** Para ello deben estar provistas de dos teclas:

log ln

Para calcular el logaritmo de un número en cualquiera de estas bases, se marca primero la tecla de la operación correspondiente y luego el número. En algunas calculadoras antiguas, se marca primero el número y luego la operación correspondiente.

Ejemplo:

Operación a realizar	Secuencia de teclas	Resultado
log 2,5 ⇒	log 2 · 5 =	0,397940008...
ln 4,31 ⇒	ln 4 · 3 1 =	1,460937904...

Ejemplo:

Escribamos los siguientes números en notación científica:

a) $536 = 5,36 \times 10^2$ **b)** $1\,347 = 1,347 \times 10^3$ **c)** $0,072 = 7,2 \times 10^{-2}$

Calculemos los logaritmos de estos números basándose en su notación científica, de acuerdo con las propiedades de logaritmos.

a) $\log 536 = \log 5,36 \times 10^2$ **...(Notación científica)**

$= \log 5,36 + \log 10^2$ **...(Propiedad de los logaritmos)**

$= \log 5,36 + 2 \log 10$

$= \log 5,36 + 2 \underbrace{\log 10}_{1}$ $\therefore$ $\log 536 = 2 + \log 5,36$

b) $\log 1347 = \log 1{,}347 \times 10^3$
$= \log 1{,}347 + \log 10^3$
$= \log 1{,}347 + 3\underbrace{\log 10}_{1} = \log 1{,}347 + 3 \quad \therefore \quad \log 1347 = 3 + \log 1{,}347$

c) $\log 0{,}072 = \log 7{,}2 \times 10^{-2}$
$= \log 7{,}2 + \log 10^{-2}$
$= \log 7{,}2 - 2\underbrace{\log 10}_{1} = \log 7{,}2 - 2 \quad \therefore \quad \log 0{,}072 = -2 + \log 7{,}2$

En general: si $a = k \times 10^n$; $n \in \mathbb{Z}$; $1 \le k < 10$
$\log a = \log(k \times 10^n) = \log k + n\log 10$
$= \log k + n\underbrace{\log 10}_{1} \quad \therefore \quad \log a = n + \log k$

El número entero **n** se llama **característica** del logaritmo de **a** y log k es la **mantisa** del logaritmo de **a**.

Por lo tanto: $\log a = n + \log k$
log a = característica + mantisa

Con la ayuda de una calculadora o una tabla de logaritmos, podemos encontrar fácilmente la característica y la mantisa de un logaritmo decimal. Veamos algunos ejemplos:

- $\log 3 = 0{,}4771 = 0 + 0{,}4771$ (característica + mantisa)
- $\log 48{,}3 = 1{,}6839 = 1 + 0{,}6839$ (característica + mantisa)
- $\log 4{,}83 = 0{,}6839 = 0 + 0{,}6839$ (característica + mantisa)
- $\log 483 = 2{,}6839 = 2 + 0{,}6839$ (característica + mantisa)

Hemos visto que al calcular el logaritmo de los números 4,83 ; 48,3 y 483 la característica depende únicamente de la posición de la coma decimal, pero la mantisa es la misma.

Observa que la característica siempre es un número entero (positivo, negativo o cero), pero la mantisa es un número no negativo comprendido entre 0 y 1, pudiendo ser igual a 0 pero nunca igual a 1.

Cuando hallamos el logaritmo de un número menor que la unidad utilizando una calculadora, esta nos entrega la característica y la mantisa ya sumadas, siendo esta suma un número negativo; pero si queremos expresar el logaritmo de un número menor que la unidad como la suma de la característica (negativa) y la mantisa (positiva) podemos proceder de dos formas como veremos a continuación en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1 Expresa con aproximación a los diez milésimos el log 0,6 como la suma de la característica más la mantisa.

Resolución:

1ra forma:

$\log 0{,}6 = \log(6 \times 10^{-1}) = \log 10^{-1} + \log 6$
$= -1 + 0{,}7782$
característica + $0 \le$ mantisa < 1

2da forma: Calculamos directamente con la calculadora:

$\log 0{,}6 = -0{,}2218$
$= -1 + \underbrace{1 - 0{,}2218}$
$= -1 + 0{,}7782$
característica + $0 \le$ mantisa < 1

Generalmente, en lugar de escribir:
$\log 0{,}6 = -1 + 0{,}7782$

se escribe así:

$\log 0{,}6 = \bar{1}{,}7782$

Ejemplo 2 Expresa con aproximación a los diez milésimos el log 0,00045 como la suma de la característica más la mantisa.

Resolución:

1ra forma :

$\log 0{,}00045 = \log(4{,}5\times10^{-4}) = \log 10^{-4} + \log 4{,}5$

$= -4 + 0{,}6532$

característica | $0 \le$ mantisa < 1

2da forma: (Con la calculadora)

$\log\ 0{,}00045 = -3{,}3468$

$= -3 - 0{,}3468$

$= -3 - 1 + 1 - 0{,}3468$

$= -4 + 0{,}6532$

característica | $0 \le$ mantisa < 1

$\therefore$ $\log\ 0{,}00045 = \overline{4}{,}6532$

Ejemplo 3 Expresa con aproximación a los diez milésimos el log 0,000001 como la suma de la característica más la mantisa.

Resolución:

$\log\ 0{,}000001 = \log\ (1\times10^{-6}) = \log\ 10^{-6} + \log\ 1$

$= -6 + 0{,}0000$

característica | $0 \le$ mantisa < 1

$\therefore$ $\log\ 0{,}000001 = \overline{6}{,}0000$

Ejemplo 4 Usa la calculadora para expresar los siguientes logaritmos en la forma:

log N = característica + mantisa

a) log 2006 **b)** log 0,028

Resolución:

a) $\log 2006 = 3{,}3023$

$\log 2006 = 3 + 0{,}3023$

b) $\log 0{,}028 = -1{,}5528$

$= -1 - 0{,}5528$

$= -2 + (1 - 0{,}5528)$

$= -2 + 0{,}4472$

$= \overline{2}{,}4472$

Obtención de logaritmos en cualquier base con la calculadora

Para hallar el $\log_b a$, usando una calculadora, aplicamos el cambio de base.

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} \quad \text{o bien} \quad \log_b a = \frac{\log_e a}{\log_e b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Ejemplos:

Calcula con cuatro cifras decimales los siguientes logaritmos:

1) $\log_2 27 = ?$

$\log_2 27 = \frac{\log 27}{\log 2}$ → log | 2 | 7 |  | log | 2 | =

$\log_2 27 = \frac{\ln 27}{\ln 2}$ → ln | 2 | 7 | ÷ | ln | 2 | =

En cualquiera de ambos casos se obtiene $\log_2 27 = 4{,}7549$

2) $\log_{\sqrt{3}} 6 = ?$

En este caso aplicamos previamente la propiedad: $\log_b a = \log_{b^n} a^n$

$\log_{\sqrt{3}} 6 = \log_{\sqrt{3}^2} 6^2 = \log_3 36$. Luego:

$\log_{\sqrt{3}} 6 = \log_3 36 = \frac{\log 36}{\log 3}$ → log | 3 | 6 | ÷ | log | 3 | =

$\log_{\sqrt{3}} 6 = \log_3 36 = \frac{\ln 36}{\ln 3}$ → ln | 3 | 6 | ÷ | ln | 3 | =

Siempre se obtiene: $\log_{\sqrt{3}} 6 = \log_3 36 = 3{,}2619$

Obtención del antilogaritmo con calculadora

La calculadora científica también permite encontrar el valor del **antilogaritmo** conociendo el logaritmo respectivo.

Si $\log_a x = b$ → $x = \text{Antilog}_a\ b = a^b$

Ejemplos: Calcula el valor de x en cada caso:

1) $\log x = 1{,}0792$

$x = \text{Antilog } 1{,}0792$

x = 10^x | 1 | • |  |  |  | 2 | =

$x = 12{,}0005$

2) $\log_3 x = 4{,}0213$

$x = \text{Antilog}_3 4{,}0213$

x = [3] [x^y] [4]  [0] [2] [1] [3] [=]

$x = 82{,}9178$

3) $\log x = -0{,}1345$

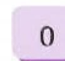
$x = \text{Antilog}\,(-0{,}1345)$

x = [10^x] [–] [0] [•]    [5] 

$x = 0{,}7337$

4) $\log_2 x = -0{,}0042$

$x = \text{Antilog}_2(-0{,}0042)$

x = [2] [x^y] [–] [0] [.]  [0] [4] [2] [=]

$x = 0{,}9971$

Número de cifras de la parte entera de una potencia mayor que 1

Sea N un número positivo mayor que 1; si (a + 1) es el número de cifras de la parte entera de N, entonces:

$$10^a \leq N < 10^{a+1}$$

Tomando logaritmos en el sistema decimal:

$$\log 10^a \leq \log N < \log 10^{a+1}$$

o, lo que es lo mismo:

$$a \leq \log N < a + 1$$

de aquí que $\log N = \underline{a}, \ldots$

característica de log N

Luego:

$$\begin{pmatrix}\text{\# de cifras}\\ \text{enteras de N}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{característica}\\ \text{de log N}\end{pmatrix} + 1$$

Ejemplo 1 Halla el número de cifras que tiene la potencia 3^{40}.

Resolución:

Sea $N = 3^{40}$

Tomando logaritmo en base 10:

$\log N = \log 3^{40} = 40\log 3 = 40(0{,}4771)$

$\log N = 19{,}084$

la característica de log N es 19

entonces:

\# de cifras de N = 19 + 1 = 20 **Rpta.**

Ejemplo 2 ¿Cuántas cifras tiene la parte entera del desarrollo de $2{,}73^{18}$?

Resolución

Sea $N = 2{,}73^{18}$

$\log N = \log 2{,}73^{18} = 18\log 2{,}73 = 18(0{,}4362)$

$\log N = 7{,}8516$

la característica de logN es 7.

Por tanto:

\# de cifras de N = 7 + 1 = 8 **Rpta.**

Ejemplo 3 Determinar el número de cifras de:

$$N = 5^{30} \times 2^{40}$$

Resolución:

Tomando logaritmo decimal

$\log N = \log (5^{30} \times 2^{40})$

$\log N = \log 5^{30} + \log 2^{40}$

$\log N = 30\log 5 + 40\log 2$

$\log N = 30(0,69897) + 40(0,30103)$

$\log N = 33,0103$

característica de log N

$\therefore$ # de cifras de N = 33 + 1 = 34 **Rpta.**

Ecuaciones exponenciales

Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita figura como exponente.

Ejemplos: $2^x = 32$; $5^x - 2^x = 21$; $10^x = 0,001$; etc.

Para la resolución de las ecuaciones exponenciales existen dos métodos.

I. Aplicando la propiedad de las potencias

Si $a^m = a^n$, entonces $m = n$, $a \neq 1 \wedge a > 0$

II. Aplicando la definición de logaritmo

Si $a^m = b$, entoces: $m = \log_a b$

Problemas resueltos

APLICANDO EL PRIMER MÉTODO

1 Resuelve la ecuación

$$8^{2x-1} = 32$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir de la manera siguiente:

$$(2^3)^{2x-1} = 2^5$$

$$2^{3(2x-1)} = 2^{5}$$

como las bases son iguales, los exponentes también deben ser iguales.

Veamos:

$3(2x - 1) = 5 \rightarrow 6x - 3 = 5$

$6x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ $x = 4/3$ **Rpta.**

2 Resuelve la ecuación

$$9^x = \frac{1}{243}$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir de la manera siguiente:

$(3^2)^x = \frac{1}{3^5}$, por propiedad: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$$3^{2x} = 3^{-5}$$

Identificando:

$$2x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Luego, el conjunto solución de $9^x = \frac{1}{243}$ es:

$S = \{-5/2\}$ **Rpta.**

3 Resolver la ecuación $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25.$

Resolución

La ecuación dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}$, pero: $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, pero: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

Identificando: $x = -2$ **(Raíz de la ecuación)**

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación es:

$\therefore$ $S = \{-2\}$ **Rpta.**

4 Resuelve la ecuación

$$13^{2x+3} = 1$$

Resolución

Sabemos que: $A^0 = 1$; si $A \neq 0$

Luego: $13^{2x+3} = 1 \Rightarrow 13^{2x+3} = 13^0$

Identificando: $2x + 3 = 0$

$2x = -3 \rightarrow x = -3/2$

Luego, el conjunto solución de la ecuación es:

$\therefore$ $S = \{-3/2\}$ **Rpta.**

5 Resuelve la ecuación

$$9^x + 3^x = 90$$

Resolución

La ecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$(3^2)^x + 3^x = 90;$$

$$(3^x)^2 + 3^x = 90; \text{ hacemos: } \boxed{3^x = a \quad ...} \ (1)$$

$$a^2 + a = 90$$

$$a^2 + a - 90 = 0 \ ; \text{ factorizamos:}$$

$$\begin{matrix} a & +10 \\ a & -9 \end{matrix}$$

Donde: $(a + 10)(a - 9) = 0$

i) $a + 10 = 0$; ii) $a - 9 = 0$

$\boxed{a = -10}$ $\boxed{a = 9}$

Luego:

i) $a = -10 \rightarrow 3^x = -10$ **(No existe solución)**

ii) $a = 9 \rightarrow 3^x = 9$

$3^x = 3^2 \rightarrow \boxed{x = 2}$ **(Raíz de la ecuación)**

∴ El conjunto solución de la ecuación es:

$\boxed{S = \{2\}}$ **Rpta.**

6 Resuelve la ecuación

$$6^{3x+4} = 36^{2x-3}$$

Resolución

La ecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$6^{3x+4} = (6^2)^{2x-3}$$

$$6^{\boxed{3x+4}} = 6^{\boxed{2(2x-3)}}$$

Identificando:

$$3x + 4 = 2(2x - 3)$$

$$3x + 4 = 4x - 6$$

$$3x - 4x = -6 - 4$$

$$-x = -10$$

$\boxed{x = 10}$ **(Raíz de la ecuación)**

Luego, el conjunto solución de la ecuación es:

$\boxed{S = \{10\}}$ **Rpta.**

7 Resuelve la ecuación:

$$5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^{x-1} = 131$$

Resolución

El factor común en el primer miembro es 5^{x-2}. Factorizamos:

$$5^{x-2}(5^3 + 1 + 5) = 131$$

$$5^{x-2}(131) = 131$$

$$5^{x-2} = 1 = 5^0$$

Ya que las bases son iguales, igualamos los exponentes:

$$x - 2 = 0$$

$\boxed{x = 2}$

∴ El conjunto solución es:

$\boxed{S = \{2\}}$ **Rpta.**

8 Resuelve la ecuación

$$\sqrt{5^x} \cdot \sqrt[3]{25^{x+1}} = \sqrt[4]{125^{x+2}}$$

Resolución

Previamente expresamos las raíces como exponentes fraccionarios:

$$5^{\frac{x}{2}} \cdot 25^{\frac{x+1}{3}} = 125^{\frac{x+2}{4}}$$

$$5^{\frac{x}{2}} \cdot (5^2)^{\frac{x+1}{3}} = (5^3)^{\frac{x+2}{4}}$$

$$5^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{2x+2}{3}} = 5^{\frac{3x+6}{4}}$$

$$5^{\boxed{\frac{x}{2} + \frac{2x+2}{3}}} = 5^{\boxed{\frac{3x+6}{4}}}$$

Igualando exponentes:

$$\frac{x}{2} + \frac{2x+2}{3} = \frac{3x+6}{4}$$

Multiplicando ambos miembros por 12:

$$12\left(\frac{x}{2} + \frac{2x+2}{3}\right) = 12\left(\frac{3x+6}{4}\right)$$

$$6x + 8x + 8 = 9x + 18$$

$$14x + 8 = 9x + 18$$

$\boxed{x = 2}$

∴ El conjunto solución es:

$\boxed{S = \{2\}}$ **Rpta.**


9 Resuelve la ecuación

$$2^{4^{x-2}} \cdot 4^{2^{x-3}} = 512^{2^{x-2}}$$

Resolución

$$2^{4^{x-2}} \cdot \left(2^2\right)^{2^{x-3}} = \left(2^9\right)^{2^{x-2}}$$

$$2^{4^{x-2}} \cdot 2^{2 \cdot 2^{x-3}} = 2^{9 \cdot 2^{x-2}}$$

$$2^{4^{x-2} + 2^{x-2}} = 2^{9 \cdot 2^{x-2}}$$

Igualando los exponentes:

$4^{x-2} + 2^{x-2} = 9 \cdot 2^{x-2}$

$4^{x-2} = 9 \cdot 2^{x-2} - 2^{x-2}$

$4^{x-2} = (9-1)2^{x-2}$

$(2^2)^{x-2} = 2^3 \cdot 2^{x-2}$

$2^{2x-4} = 2^{x+1}$

Igualando exponentes:

$$2x - 4 = x + 1$$

$$x = 5$$

∴ El conjunto solución es:

$S = \{5\}$ **Rpta.**

10 Resuelve la ecuación:

$$\frac{2}{3^x - 1} + \frac{5}{3^x + 1} = \frac{3}{4}$$

Resolución

Multiplicando ambos miembros por $4(3^x - 1)(3^x + 1)$ se consigue eliminar los denominadores. Veamos:

$4(3^x + 1)2 + 4(3^x - 1)5 = 3(3^x - 1)(3^x + 1)$

$8 \cdot 3^x + 8 + 20 \cdot 3^x - 20 = 3(3^{2x} - 1)$

$28 \cdot 3^x - 12 = 3 \cdot 3^{2x} - 3$

$3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$

$3\left(3^x\right)^2 - 28\left(3^x\right) + 9 = 0$

$3 \cdot 3^x \quad\quad -1$

$3^x \quad\quad -9$

$(3^{x+1} - 1)(3^x - 9) = 0$

Igualando cada factor a cero:

i) $3^{x+1} - 1 = 0$

$3^{x+1} = 3^0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

ii) $3^x - 9 = 0$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

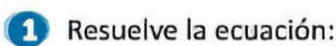
∴ El conjunto solución es:

$S = \{-1; 2\}$ **Rpta.**

Problemas resueltos

APLICANDO EL SEGUNDO MÉTODO

Este método se utiliza cuando no es posible transformar la ecuación en una igualdad de potencias de una misma base, veamos:


1 Resuelve la ecuación:

$$2^{x-3} = 5$$

Resolución

Aplicando la propiedad: $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$

Obtenemos:

$$\frac{2^x}{2^3} = 5 \rightarrow 2^x = 5 \cdot 2^3 \Rightarrow 2^x = 40$$

Aplicando la definición de logaritmo, en esta última expresión, obtenemos:

$$x = \log_2 40$$

∴ El conjunto solución de la ecuación es:

$S = \{\log_2 40\}$ **Rpta.**

2 Resuelve la ecuación:

$$5^{3x-2} - 10 = 0$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir de la manera siguiente:

$$5^{3x-2} = 10 \Rightarrow \frac{5^{3x}}{5^2} = 10$$

$$5^{3x} = 10 \cdot 5^2 \Rightarrow 5^{3x} = 250$$

Por definición de logaritmo, obtenemos :

$$3x = \log_5 250 \rightarrow x = \frac{1}{3}\log_5 250$$

∴ El conjunto solución es:

$S = \left\{\frac{1}{3}\log_5 250\right\}$ **Rpta.**

3 Resuelve la ecuación:

$$3^{2x+1} = 2$$

Resolución

Aplicando la propiedad: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Obtenemos:

$$3^{2x} \cdot 3^1 = 2 \Rightarrow 3^{2x} = \frac{2}{3}$$

Por definición de logaritmo: $2x = \log_3\left(\frac{2}{3}\right)$

$$x = \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{2}{3}\right)$$

∴ El conjunto solución es:

$$S = \left\{\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$$ **Rpta.**

4 Resuelve la ecuación:

$$4^{5x-2} - 9 = 0$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir de la manera siguiente:

$$4^{5x-2} = 9 \Rightarrow \frac{4^{5x}}{4^2} = 9$$

$$4^{5x} = 9 \cdot 4^2 \Rightarrow 4^{5x} = 144$$

Por definición de logaritmo: $5x = \log_4 144$

$$x = \frac{1}{5}\log_4 144$$

∴ El conjunto solución es:

$$S = \left\{\frac{1}{5}\log_4 144\right\}$$ **Rpta.**

5 Resolver la ecuación:

$$10\sqrt{2^x} = \sqrt[3]{3^x}$$

Resolución

Para eliminar los signos radicales elevamos ambos miembros a la sexta potencia.

$$\left(10\sqrt{2^x}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{3^x}\right)^6$$

$$10^6 \cdot (2^x)^3 = (3^x)^2$$

$$10^6 \cdot (2^3)^x = (3^2)^x$$

$$10^6 \cdot 8^x = 9^x$$

$$10^6 = \frac{9^x}{8^x} = \left(\frac{9}{8}\right)^x$$

Por definición de logaritmo:

$$x = \log_{\frac{9}{8}} 10^6$$

Aplicando la propiedad del cambio de base:

$$x = \frac{\log 10^6}{\log\frac{9}{8}}$$

$$x = \frac{6}{\log 9 - \log 8}$$

∴ El conjunto solución es

$$S = \left\{\frac{6}{\log 9 - \log 8}\right\}$$ **Rpta.**

6 Resuelve la ecuación

$$9^x + 20 = 3^{x+2}$$

Resolución

La ecuación se puede escribir así:

$$\left(3^2\right)^x - 3^2 \cdot 3^x + 20 = 0$$

$$\left(3^x\right)^2 - 9\left(3^x\right) + 20 = 0$$

Factorizando por el método del aspa:

$$(3^x)^2 - 9(3^x) + 20 = 0$$

3^x -4

3^x -5

De donde:

$$(3^x - 4)(3^x - 5) = 0$$

i) $3^x - 4 = 0$ ii) $3^x - 5 = 0$

$3^x = 4$ $3^x = 5$

$x = \log_3 4$ $x = \log_3 5$

∴ El conjunto solución es:

$$S = \{\log_3 4 \,;\, \log_3 5\}$$ **Rpta.**

7 Resuelve la ecuación:

$$16^{\sqrt{x}} + 12 = 7 \cdot 4^{\sqrt{x}}$$

Resolución

La ecuación se puede escribir así:

$$\left(4^{\sqrt{x}}\right)^2 + 12 = 7\left(4^{\sqrt{x}}\right)$$

$$\left(4^{\sqrt{x}}\right)^2 - 7\left(4^{\sqrt{x}}\right) + 12 = 0$$

Factorizando por el método del aspa:

$$\left(4^{\sqrt{x}}\right)^2-7\left(4^{\sqrt{x}}\right)+12=0$$

$4^{\sqrt{x}}$ ⟍⟋ -4

$4^{\sqrt{x}}$ ⟋⟍ -3

$$\left(4^{\sqrt{x}}-4\right)\left(4^{\sqrt{x}}-3\right)=0$$

Igualando a cero:

i) $4^{\sqrt{x}}-4=0$
$4^{\sqrt{x}}=4^1$
$\sqrt{x}=1$
$x=1$

ii) $4^{\sqrt{x}}-3=0$
$4^{\sqrt{x}}=3$
$\sqrt{x}=\log_4 3$
$x=(\log_4 3)^2$

$\therefore$ $S=\{1;(\log_4 3)^2\}$ **Rpta.**

8 Resuelve:

$$3\cdot 6^{\frac{1}{x}}=2^x$$

Resolución

Tomamos logaritmo en base 2 a ambos miembros:

$$\log_2\left(3\cdot 6^{\frac{1}{x}}\right)=\log_2 2^x$$

$$\log_2 3+\log_2 6^{\frac{1}{x}}=x\log_2 2$$

$$\log_2 3+\frac{1}{x}\log_2 6=x$$

Multiplicando ambos miembros por x

$x\log_2 3+\log_2 6=x^2$

→ $x^2-(\log_2 3)x-\log_2 6=0$

→ $x^2+(-\log_2 3)x-\log_2 6=0$

x ⟍⟋ 1

x ⟋⟍ $-\log_2 6$

De donde:

$(x+1)(x-\log_2 6)=0$

i) $x+1=0$
$x=-1$

ii) $x-\log_2 6=0$
$x=\log_2 6$

$\therefore$ $S=\{-1;\log_2 6\}$ **Rpta.**

Ecuaciones logarítmicas

Se denomina ecuación logarítmica a toda aquella que contiene una o más funciones logarítmicas de la variable como por ejemplo:

$$\log_3 x=2 \quad ; \quad \log_2(2x+1)-\log_2(x-1)=0 \quad ; \quad (\log_3 x)^2-\log_3 x-2=0$$

Las raíces de una ecuación logarítmica pueden hallarse:

i) Aplicando la definición de logaritmo.

ii) Aplicando la propiedad: Si $\log_b m=\log_b n$ entonces: $m=n$

iii) Introduciendo una nueva variable.

Problemas resueltos

APLICANDO LA DEFINICIÓN DE LOGARITMO

1 Resuelve la ecuación $\log_5(x-1)^2=2$.

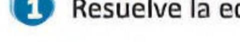
Resolución

Por definición de logaritmos: $\log_5(x-1)^2=2$, obtenemos:

$$(x-1)^2=5^2 \rightarrow (x-1)^2=25$$

Donde: $(x-1)=\pm\sqrt{25}$

$x-1=\pm 5$



$x-1=+5 \rightarrow x=6$

$x-1=-5 \rightarrow x=-4$

Verificación:

Para: $x=6$ → $\log_5(6-1)^2=\log_5 5^2=2$
(Proposición verdadera)

Para: $x=-4$ → $\log_5(-4-1)^2=\log_5(-5)^2=\log_5 25=\log_5 5^2=2$
(Proposición verdadera)

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S=\{-4;6\}$ **Rpta.**



2 Resuelve la ecuación $\log_{(x-3)}(x-1)=2$

Resolución

Por definición de logaritmos: $\log_{(x-3)}(x-1)=2$, obtenemos:

$$(x-1)=(x-3)^2$$
$$x-1=x^2-6x+9$$
$$0=x^2-7x+10$$

Esta última ecuación se puede escribir así:

$x^2-7x+10=0$, factorizamos por el método del aspa

$$\begin{matrix} x & & -5 \\ x & & -2 \end{matrix}$$

Luego: $(x-5)(x-2)=0$, igualamos cada factor a cero

i) $x-5=0 \rightarrow x=5$ **ii)** $x-2=0 \rightarrow x=2$

Verificación:

Para: $x=5 \rightarrow \log_{(5-3)}(5-1)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

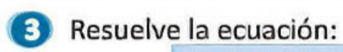
(Proposición verdadera)

Para: $x=2 \rightarrow \log_{(2-3)}(2-1)=\log_{-1}1\neq 2$

(Proposición falsa)

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S=\{5\}$ **Rpta.**



3 Resuelve la ecuación:

$$\log_5(x+3)+\log_5(x-1)=1$$

Resolución

Por propiedad: $\log_b A+\log_b B=\log_b A\cdot B$

La ecuación se puede escribir así:

$$\log_5(x+3)(x-1)=1$$
$$(x+3)(x-1)=5^1 \rightarrow x^2+2x-3=5$$

$x^2+2x-8=0$, factorizamos por el método del aspa

$$\begin{matrix} x & & -2 \\ x & & +4 \end{matrix}$$

Donde: $(x-2)(x+4)=0$, igualamos cada factor a cero

i) $x-2=0 \rightarrow x=2$ **ii)** $x+4=0 \rightarrow x=-4$

Verificación:

Para: $x=2$ $\log_5(2+3)+\log_5(2-1)=1$

$$\log_5 5+\log_5 1=\log_5 5^1+\log_5 5^0=1$$

$\rightarrow 1+0=1$ **(Verdadero)**

Para: $x=-4$ $\log_5(-4+3)+\log_5(-4-1)\neq 1$

(Proposición falsa)

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S=\{2\}$ **Rpta.**

4 Resolver la ecuación:

$$\log_3 x^2-\log_3 6x=2$$

Resolución

Por propiedad: $\log_b A-\log_b B=\log_b \frac{A}{B}$

La ecuación dada, se puede escribir así:

$$\log_3\left(\frac{x^2}{6x}\right)=2 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x}{6}\right)=2$$

$$\frac{x}{6}=3^2 \Rightarrow x=54$$

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S=\{54\}$ **Rpta.**

Problemas resueltos

Aplicando la propiedad de logaritmo si: $\log_b m=\log_b n$ entonces: $m=n$

1 Resuelve la ecuación:

$$3\log x-\log 16=2\log(x/2)$$

Resolución

Aplicando las propiedades:

- $n\log A=\log A^n$
- $\log A-\log B=\log\frac{A}{B}$, obtenemos:

$$\log x^3-\log 16=\log\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\log\frac{x^3}{16}=\frac{\log x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^3}{16}=\frac{x^2}{4}$$

Igualamos a cero dicha expresión:

$\frac{x^3}{16}-\frac{x^2}{4}=0$, factorizamos

$\frac{x^2}{4}\left(\frac{x}{4}-1\right)=0$, igualamos cada factor a cero

i) $\frac{x^2}{4}=0 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0$

ii) $\frac{x}{4}-1=0 \rightarrow \frac{x}{4}=1 \rightarrow x=4$

Verificación:

Para: $x = 0 \rightarrow 3\log 0 - \log 16 = 2\log\frac{0}{2}$

No existe (**Proposición falsa**)

Para: $x = 4 \rightarrow 3\log 4 - \log 16 = 2\log\frac{4}{2}$

$\log 4^3 - \log 16 = \log\left(\frac{4}{2}\right)^2 \rightarrow \log\frac{(4)^3}{16} = \log 2^2$

(**Proposición verdadera**) $\rightarrow \log 4 = \log 4$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{4\}$ **Rpta.**

2 Resolver la ecuación:

$$\log(25 - x^2) - \log(x + 1)^2 = 0$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir así:

$$\log(25 - x^2) = \log(x + 1)^2$$

Donde:

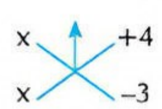
$(25 - x^2) = (x + 1)^2$

$25 - x^2 = x^2 + 2x + 1$

$24 = 2x^2 + 2x$, sacamos mitad a cada término:

$12 = x^2 + x$, igualamos a cero

$0 = x^2 + x - 12$, factorizamos



Donde: $(x+4)(x-3) = 0$

i) $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

ii) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{-4, 3\}$ **Rpta.**

3 Resolver la ecuación:

$$\frac{\log 2x}{\log(x-12)} = 2$$

Resolución

La ecuación se puede escribir así:

$$\log 2x = 2\log(x - 12)$$
$$\log 2x = \log(x - 12)^2$$

Donde: $2x = (x - 12)^2 \rightarrow 2x = x^2 - 24x + 144$

$$0 = x^2 - 26x + 144$$

x –18

x –8

$$(x - 18)(x - 8) = 0$$

i) $x - 18 = 0 \rightarrow x = 18$

ii) $x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{18\}$ **Rpta.**

4 Resolver la ecuación

$$\sqrt{\log x} = \log\sqrt{x}$$

Resolución

Por propiedad: $\sqrt{A} = N \rightarrow A = N^2$, obtenemos que:

$\log x = \left(\log\sqrt{x}\right)^2$, por artificio: $x = \sqrt{x^2}$

$\log\sqrt{x^2} = \left(\log\sqrt{x}\right)^2$, por propiedad $\log A^n = n\log A$

$2\log\sqrt{x} = \left(\log\sqrt{x}\right)^2$, igualando a cero

$2\log\sqrt{x} - \left(\log\sqrt{x}\right)^2 = 0$, factorizando: "$\log\sqrt{x}$"

$\log\sqrt{x}\left(2 - \log\sqrt{x}\right) = 0$, igualamos cada factor a cero

i) $\log\sqrt{x} = 0 \rightarrow = \sqrt{x} = 10^0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$

ii) $2 - \log\sqrt{x} = 0 \rightarrow \log\sqrt{x} = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 10^2 \rightarrow x = 10^4$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{1; 10^4\}$ **Rpta.**

Problemas resueltos — APLICANDO LA INTRODUCCIÓN DE UNA NUEVA VARIABLE

1 Resuelve la ecuación

$$2\log_2^2 x + 5\log_2 x = 3$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir así:

$2(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x = 3$, hacemos que: $\log_2 x = y$ ... ❶

$2y^2 + 5y = 3$, igualando a cero; obtenemos:

$2y^2 + 5y - 3 = 0$

$2y \quad -1$

$y \quad +3$

i) $2y - 1 = 0 \rightarrow$ $y = 1/2$

ii) $y + 3 = 0 \rightarrow$ $y = -3$

Reemplazamos el valor de $y = 1/2$ en ❶:

$\log_2 x = y \rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2^{1/2} \rightarrow$ $x = \sqrt{2}$

Reemplazamos el valor de $y = -3$ en ❶:

$\log_2 x = y \rightarrow \log_2(x) = -3 \rightarrow x = 2^{-3} \rightarrow$ $x = \frac{1}{8}$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{\sqrt{2}, 1/8\}$ **Rpta.**

2 Resuelve la ecuación

$$\log_2{}^3 x + 4\log_2{}^2 x + 3\log_2 x = 0$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir así:

$(\log_2 x)^3 + 4(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x = 0$, hacemos: $\log_2 x = a$

$a^3 + 4a^2 + 3a = 0$, factorizamos "a"

$a(a^2 + 4a + 3) = 0$, factorizamos los términos del paréntesis

$a(a^2 + 4a + 3) = 0$; aplicando el método del aspa:

$a \quad +3$

$a \quad +1$

Luego $a(a+3)(a+1) = 0$, igualamos cada factor a cero

i) $a = 0$ pero: $a = \log_2 x \rightarrow \log_2 x = 0 \rightarrow x = 2^0$

$\therefore$ $x = 1$

ii) $a + 3 = 0 \rightarrow a = -3 \rightarrow \log_2 x = -3 \rightarrow x = 2^{-3}$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

iii) $a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow \log_2 x = -1 \rightarrow x = 2^{-1}$

$\therefore$ $x = 1/2$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S=\{1/2; 1/8; 1\}$ **Rpta.**

Problemas resueltos — SOBRE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1 Resuelve la ecuación

$$10^{\log 5x} = 3x + 8$$

Resolución

Por propiedad: $a^{\log_a x^n} = x^n$ la ecuación dada, se puede escribir así; ya que la base del logaritmo se sobreentiende que es 10.

$10^{\log_{10} 5x} = 3x + 8 \rightarrow 5x = 3x + 8 \rightarrow$

$2x = 8 \rightarrow$ $x = 4$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{4\}$ **Rpta.**

2 Resolver la ecuación:

$$\log_x 10 \cdot \log(x^2 - 2) = 1$$

Resolución

Por propiedad: $\log_b A = \frac{\log A}{\log b}$, la ecuación dada, se puede escribir así:

$\frac{\log 10}{\log x}\log(x^2 - 2) = 1 \rightarrow$ pero $\log 10 = 1$

$\frac{1}{\log x}\log(x^2 - 2) = 1 \rightarrow \log(x^2 - 2) = \log x$

Luego: $x^2 - 2 = x$

$x^2 - x - 2 = 0$, factorizamos por el método del aspa:

$x^2 - x - 2 = 0$

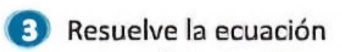
$x \quad -2$

$x \quad +1$ $\Big\}$ $(x - 2)(x + 1) = 0$

i) $x - 2 = 0 \rightarrow$ $x = 2$ ii) $x + 1 = 0 \rightarrow$ $x = -1$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{2\}$ **Rpta.**



3 Resuelve la ecuación

$$\log_{1/2}x + \log_{1/4}x + \log_{1/8}x = 11$$

Resolución

La ecuación dada se puede escribir así:

$$\frac{\log x}{\log\frac{1}{2}} + \frac{\log x}{\log\frac{1}{4}} + \frac{\log x}{\log\frac{1}{8}} = 11;$$

$$\frac{\log x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\log x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\log x}{3\log\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 11;$$

Por propiedad: $\log A^n = n\log A$

$$\frac{\log x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\log x}{2\log\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\log x}{3\log\left(\frac{1}{2}\right)} = 11;$$

Damos común denominador en el 1er miembro

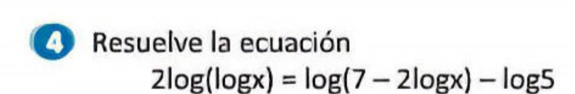
$$\frac{6\log x + 3\log x + 2\log x}{6\log(1/2)} = 11$$

$$\cancel{11}\log x = \cancel{11}\left(6\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\log x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow \log x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow \quad \therefore \; x = 2^{-6}$$

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{2^{-6}\}$ **Rpta.**



4 Resuelve la ecuación

$$2\log(\log x) = \log(7 - 2\log x) - \log 5$$

Resolución

Hacemos que: $\log x = a$, reemplazando en la ecuación dada, obtenemos:

$$2\log a = \log(7 - 2a) - \log 5$$

$$\log a^2 + \log 5 = \log(7 - 2a)$$

$$\log 5a^2 = \log(7 - 2a)$$

$5a^2 = 7 - 2a \rightarrow 5a^2 + 2a - 7 = 0$, factorizamos por el método del aspa:

$$5a^2 + 2a - 7 = 0$$

$$\begin{matrix} a & -1 \\ 5a & +7 \end{matrix} \Bigg\} (a-1)(5a+7) = 0$$

i) $a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow \log x = 1 \rightarrow \log_{10}x = 1$

$\therefore \; x = 10^1 = 10$

ii) $5a + 7 = 0 \rightarrow a = -7/5$ **(No es solución)**

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es:

$S = \{10\}$ **Rpta.**

5 Resuelve la ecuación

$$5\log x - \log 288 = 3\text{colog}\left(\frac{2}{x}\right)$$

Resolución

Según la definición de cologaritmo:

$$\text{colog}_b x = \log_b\left(\frac{1}{x}\right)$$

Luego: $\text{colog}\left(\frac{2}{x}\right) = \log\left(\frac{x}{2}\right)$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$5\log x - \log 288 = 3\log\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$5\log x - 3\log\left(\frac{x}{2}\right) = \log 288$$

$$\log x^5 - \log\left(\frac{x}{3}\right)^3 = \log 288$$

$$\log\left[x^5 \div \left(\frac{x}{2}\right)^3\right] = \log 288$$

$$\log 8x^2 = \log 288$$

$$8x^2 = 288$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$



Al reemplazar $x = -6$ en la ecuación original se obtiene:

$$5\log(-6) - \log 288 = 3\text{colog}\left(-\frac{2}{6}\right)$$

pero como el logaritmo de un número negativo no está definido, entonces $x = -6$ no es una solución de la ecuación.

Por lo tanto la solución es $x = 6$.

∴ El conjunto solución de la ecuación es:

$S = \{6\}$ **Rpta.**

6 Resuelve la ecuación

$$\log_{0,5x}x - \log_{2x}x = \log_2 x$$

Resolución

Aplicando la propiedad del cambio de base:

$$\log_B A = \frac{\log_b A}{\log_b B}$$

Tenemos: $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 0,5x} - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 2x} = \log_2 x$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 0,5 + \log_2 x} - \frac{\log_2 x}{\log_2 2 + \log_2 x} = \log_2 x$$

$$\frac{\log_2 x}{-1+\log_2 x}-\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}=\log_2 x$$

Hacemos: $\log_2 x = a$ ... ❶

Reemplazando en la ecuación:

$$\frac{a}{-1+a}-\frac{a}{1+a}=a$$

$$\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-a=0\ ;\ a\neq\{1,-1\}$$

Multiplicando ambos miembros por (a–1)(a+1)

$$a(a+1)-a(a-1)-a(a-1)(a+1)=0$$

$$a[(a+1)-(a-1)-(a^2-1)]=0$$

$$a(3-a^2)=0$$

De donde: $a=0 \ \vee\ 3-a^2=0$

$\rightarrow$ $a=0$ $\vee$ $a=\sqrt{3}$ $\vee$ $a=-\sqrt{3}$

Reemplazando a = 0 en ❶:

$\log_2 x = 0 \rightarrow x = 1$

Reemplazando $a=\sqrt{3}$ en ❶:

$\log_2 x=\sqrt{3} \rightarrow x=2^{\sqrt{3}}$

Reemplazando $a=-\sqrt{3}$ en ❶:

$\log_2 x=-\sqrt{3} \rightarrow x=2^{-\sqrt{3}}$

∴ El conjunto solución es:

$S=\left\{1;2^{\sqrt{3}};2^{-\sqrt{3}}\right\}$ **Rpta.**

7 Resuelve la ecuación $\log_x 10 = 4 - 3\log x$

Resolución

Por propiedad $\log_{10}x=\dfrac{1}{\log_x 10}$

sea $\log_{10}x = a \rightarrow \log_x 10=\dfrac{1}{a}$

Reemplazando en la ecuación:

$$\frac{1}{a}=4-3a$$

$$1=4a-3a^2$$

$$3a^2-4a+1=0$$

3a ⟍⟋ –1

a ⟋⟍ –1

entonces $(3a-1)(a-1)=0 \rightarrow a=\dfrac{1}{3} \vee a=1$

pero $\log_{10}x = a$

Si $a=\dfrac{1}{3} \rightarrow \log_{10}x=\dfrac{1}{3} \rightarrow x=\sqrt[3]{10}$

Si $a = 1 \rightarrow \log_{10}x = 1 \rightarrow x = 10$

∴ El conjunto solución es:

$S=\left\{\sqrt[3]{10};\ 10\right\}$ **Rpta.**

8 Resuelve la ecuación

$$2^{\log_3 x^2}+1024=2^{6+\log_3 x}$$

Resolución

La ecuación se puede escribir así:

$$2^{\log_3 x^2}+2^{10}=2^6\cdot 2^{\log_3 x}$$

$$2^{2\log_3 x}-2\cdot 2^{\log_3 x}+2^{10}=0$$

$$(2^{\log_3 x})^2-2\cdot(2^{\log_3 x})2^5+(2^5)^2=0 \quad ...❶$$

Hacemos el cambio $2^{\log_3 x}=a$ ... ❷

Entonces tenemos:

$$a^2-2a\cdot 2^5+(2^5)^2=0$$

$$(a-2^5)^2=0 \rightarrow a=2^5 \quad ...❸$$

Reemplazando ❸ en ❷:

$$2^{\log_3 x}=2^5$$

Como las bases son iguales, igualamos los exponentes:

$$\log_3 x = 5$$

$$\rightarrow x=3^5=243$$

∴ El conjunto solución de la ecuación es:

$S=\{243\}$ **Rpta.**

9 Sea $e^x=2^{\log e}$. Obtenga Antilogx.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 9 E) 6

Resolución

Tomamos "log" en ambos miembros:

$\log e^x=\log 2^{\log e}$, por propiedad: $\log A^n = n\log A$

$\log e^x=\log e\cdot\log 2 \Rightarrow x\log e=\log e\cdot\log 2 \Rightarrow x=\log 2$ ...❶

Luego: $\text{Antilog}x = \text{Antilog}x = 10^x$ ... ❷

10 → se sobreentiende

Reemplazamos ❶ en ❷:

$$\text{Antilog}x=10^{\log 2}=10^{\log_{10}2}=2$$

∴ Antilogx = 2 **Rpta. B**

Ejercicios tomados en los concursos de matemática

1 Si $\log_2(\log_3(\log_{10}x)) = 1$, halla logx.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) 6

Resolución

Aplicando la propiedad: $\log_b A = N \rightarrow A = b^N$; obtenemos:

$$\log_3(\log_{10}x) = 2^1 \Rightarrow \log_3(\log_{10}x) = 2 \;...\; (1)$$

Nuevamente aplicamos la misma propiedad; en (1); obteniendo:

$\log_{10}x = 3^2 \Rightarrow \log_{10}x = 9$ (La base 10 del logaritmo de "x" se sobreentiende)

$\therefore$ $\log x = 9$ **Rpta. D**

2 Si xloga + ylogb = log(ab), halla $\frac{\log b}{\log a}$.

A) $\frac{1-x}{1+y}$ B) $\frac{x-1}{y-1}$ C) $\frac{x-1}{1-y}$ D) 1 E) $\frac{x+y}{x-y}$

Resolución

Aplicando la propiedad: $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$;

Obtenemos: xloga + ylogb = loga + logb;

Transponemos términos: xloga – loga = logb – ylogb ;

Factorizamos en ambos miembros:

$(x-1)\log a = (1-y)\log b \rightarrow \therefore \frac{x-1}{1-y} = \frac{\log b}{\log a}$ **Rpta. C**

3 Halla "x" si $\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 = 6$.

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) N.A.

Resolución

Aplicando la propiedad: $\log_b A = \frac{\log A}{\log b}$

Obtenemos: $\log_2 x + \frac{\log x^2}{\log 4} + \frac{\log x^3}{\log 8} = 6$

$$\log_2 x + \frac{2\log x}{\log 2^2} + \frac{3\log x}{\log 2^3} = 6$$

Aplicando la propiedad: $\log A^n = n\log A$

$$\log_2 x + \frac{2\log x}{2\log 2} + \frac{3\log x}{3\log 2} = 6$$

$$\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 6 \rightarrow 3\log_2 x = 6$$

$$\log_2 x = 2 \rightarrow x = 2^2$$

$\therefore$ $x = 4$ **Rpta. A**

4 Efectuar:

$$S = \log_4 32 + \log_{625}(1/125) + \log_{3\cdot\sqrt[4]{3}} 243\sqrt[5]{27}$$

A) 6,4 B) 6,23 C) 6 D) 5 E) 1

Resolución

Sabemos que:

$32 = 2^5$; $1/125 = 5^{-3}$; $625 = 5^4$

$243\sqrt[5]{27} = 3^5 \cdot 3^{3/5} = 3^{28/5}$;

$\sqrt[4]{3} = 3 \cdot 3^{1/4} = 3^{5/4}$

Luego: $S = \log_{2^2} 2^5 + \log_{5^4} 5^{-3} + \log_{3^{5/4}} 3^{28/5}$

Aplicando la propiedad: $\log_{A^m} A^n = \frac{n}{m}$

Obtenemos:

$$S = \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{-3}{4}\right) + \frac{28/5}{5/4} = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + \frac{112}{25}$$

Damos común denominador, obteniendo:

$\therefore$ $S = \frac{250-75+448}{100} = \frac{623}{100} = 6{,}23$ **Rpta. B**

5 Si $2^{\log_2(2x+3)} + 5^{\log_5(x+7)} = 7^{\log 7(2x+18)}$, entonces $\log_{3\sqrt{2}} x$ es:

A) 2 B) 4 C) 9 D) 8 E) N.A.

Resolución

Aplicando la propiedad: $b^{\log_b N} = N$;

Obtenemos: $(2x + 3) + (x + 7) = (2x + 18)$

Resolviendo dicha ecuación, se obtiene:

$$3x + 10 = 2x + 18 \rightarrow \therefore x = 8$$

Luego: $\log_{3\sqrt{2}} x = \log_{3\sqrt{2}} 8 = \log_{2^{1/3}} 2^3 = \frac{3}{1/3} = 9$

$\therefore$ $\log_{3\sqrt{2}} x = 9$ **Rpta. C**

Amplía tus conocimientos



El PH de la sangre de Alicia

El **PH** es una escala logarítmica en base 10 que se usa para medir la acidez de una solución. El valor PH (iniciales que corresponden al potencial del hidrógeno) de una solución se obtiene calculando el logaritmo común del recíproco de la concentración del ion hidronio en la solución:

$$PH = \log\frac{1}{\left[H_3O^+\right]}$$

Donde $\left[H_3O^+\right]$ es la concentración del ion hidronio. Se mide en moles por litro (mol/ ℓ).

Una sustancia se dice que es **ácida** cuando tiene un PH inferior a 7 (PH < 7). Se ha comprobado que la mayoría de los alimentos son ácidos, como se ve en la siguiente tabla:

Alimento	PH
Espinacas	[5,1 – 5,7]
Leche	[6,3 – 6,6]
Plátanos	[4,5 – 4,7]
Uvas	[3,0 – 3,3]
Naranjas	[3,0 – 4,0]
Limas	[1,8 –2,0]
Bebidas gaseosas	[2,0 – 4,0]

La Sra. Alicia Arana se encontraba algo delicada de salud, motivo por el cual se hizo un chequeo general.

En uno de los análisis de sangre que se hizo, pudo leer en el resultado lo siguiente: concentración de ion hidronio: $3,98 \times 10^{-8}$ mol/ ℓ.

Ella quizo saber además el PH de su sangre pero no encontró esa información, sin embargo su hija que cursa el quinto año de secundaria, dijo que lo podía calcular fácilmente.

En efecto, como se conoce que:

$$[H_3O^+] = 3,98 \times 10^{-8}$$

Reemplazando en:

$$PH = \log\frac{1}{\left[H_3O^+\right]} = -\log\left[H_3O^+\right]$$

se obtiene:

$$PH = -\log(3,98 \times 10^{-8})$$

$$PH = -\log 3,98 - \log 10^{-8}$$

$$PH = -0,5999 + 8$$

$$PH = 7,4001$$

Por lo tanto:

El PH de la sangre de Alicia es 7,4

Personaje
de la Matemática

Henrrieta Swan Leavitt

(Astrónoma americana)



Henrietta Leavitt (1868-1921), hija de un ministro del Congreso norteamericano, nació en Lancaster, Massachusetts. Realizó sus estudios en el colegio Oberlin y en el Radcliffe donde se graduó en 1892. Fue entonces cuando descubrió la Astronomía. Después de graduarse realizó un curso de Astronomía, aunque no pudo poner en práctica sus conocimientos astronómicos hasta tres años más tarde, como consecuencia de una enfermedad que la obligo a permanecer en su casa durante todo ese tiempo.

En 1895 entró como voluntaria en el Observatorio de Harvard y siete años más tarde entró a formar parte de la plantilla del mismo, bajo la dirección de Charles Pickering. Durante ese tiempo tuvo la oportunidad de realizar trabajos teóricos, pero se convirtió en la jefa del Departamento Fotográfico del Observatorio, donde, junto con su grupo, estudió las imágenes de las estrellas para determinar sus magnitudes. Durante su carrera, Leavitt descubrió más de 2,400 estrellas variables. Se dedicó entonces al estudio de esas estrellas variables, lo que supondría su mayor aportación a la Astronomía: la relación entre el periodo y la luminosidad de las Cefeidas(estrellas variables que muestran un ritmo regular de brillo, oscurecimiento y brillo cuando se observan en períodos de tiempo que van desde unas semanas a unos meses).

Desarrolló un patrón de medidas fotográficas que fue aceptado por el Comité Internacional de Magnitudes Fotográficas en 1913. Para elaborar este patrón de medición, Leavitt utilizó 299 placas de 13 telescopios y empleó ecuaciones logarítmicas para ordenar las estrellas sobre 17 magnitudes de luminosidad. Leavitt continuó redefiniendo este trabajo durante toda su vida.

Debido a los prejuicios de la época, Henrietta no pudo desarrollar sus propios métodos de trabajo, por lo que no tuvo la oportunidad de sacar el máximo rendimiento a su intelecto.

Fue miembro de *Phi Beta Kappa*, de la Asociación Americana de la Universidad de la Mujer, de la Sociedad Americana de Astronomía y Astrofísica, de la Asociación para el Avance de la Ciencia y miembro honorífico de la Asociación de Observadores de estrellas variables.

Trabajó en el Observatorio de Harvard hasta su muerte en 1921 a causa de un cáncer. Desafortunadamente, Henrietta falleció antes de poder concluir otro trabajo sobre las escalas de medición de la magnitud de las estrellas. Sus importantes contribuciones al mundo científico fueron reconocidas en 1925 a título póstumo, cuando fue nominada por la Academia Sueca de Ciencias para el premio Nobel.

Investiga:



1. ¿Crees que los aportes científicos que hacen las mujeres en la actualidad, aun no son valorados y reconocidos por nuestra sociedad?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa su comprensión de la función exponencial $y = a^x$, cuando la reconoce por el valor de su base: $a > 1$ o $0 < a < 1$, la grafica en el plano cartesiano y describe sus propiedades.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Emplea las propiedades de las funciones exponenciales para resolver inecuaciones exponenciales, en los casos $a > 1$ y $0 < a < 1$.

Función exponencial

Veamos ahora cómo se define la función exponencial.

Sea "a" un número real positivo diferente de 1, la función exponencial de base "a" está definida por:

$$f(x) = a^x \; ; \; \forall \; x \in \mathbb{R}$$

Como quiera que $a > 0$, por la condición, entonces a^x es siempre positivo, para todo $x \in \mathbb{R}$; por lo tanto, el rango de la función f está formado por todos los números reales positivos.

Esto significa en consecuencia que el rango de f está formado por el conjunto de todos los reales positivos.

En resumen, la función exponencial de base "a" es:

$$f(x) = a^x \quad ; \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1$$

con: $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [0; +\infty\rangle$

El rango nos indica que la gráfica de $f(x) = a^x$ se encuentra sobre el eje x.

Como ejemplos podemos decir que las funciones definidas por:

$f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $h(x) = (\pi)^x$; $k(x) = 0{,}1^x$

son funciones exponenciales, en cambio:

$$f(x) = (-2)^x; \quad g(x) = (1)^x; \quad h(x) = x^x; \quad k(x) = x^3$$

no son funciones exponenciales.

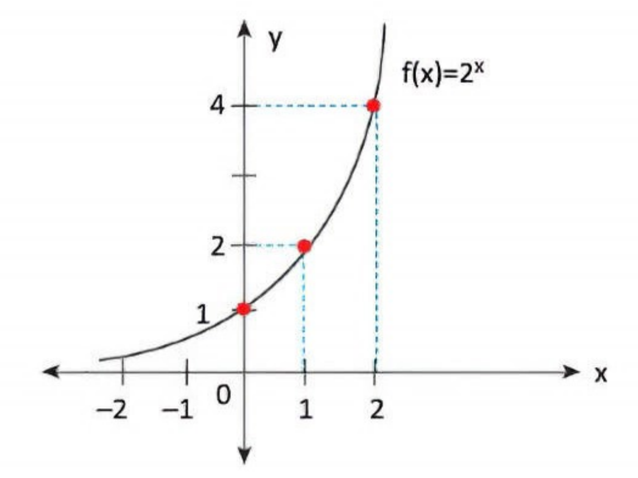
Ejemplo 1 Dada la función exponencial por $f(x) = 2^x$, construye su gráfica, halla el dominio y el rango.

Resolución:

Por tabulación:

x	$y = x^2$
0	$2^0 = 1$
–1	$2^{-1} = 1/2$
–2	$2^{-2} = 1/4$
–3	$2^{-3} = 1/8$

x	$y = x^2$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
h	h



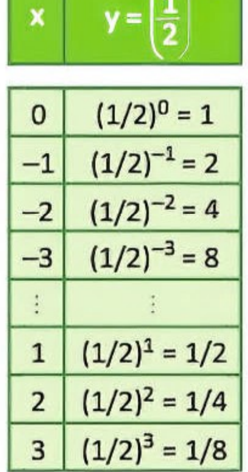
Dominio: $D_f = \mathbb{R}$

Rango: $R_f = \langle 0; +\infty\rangle$

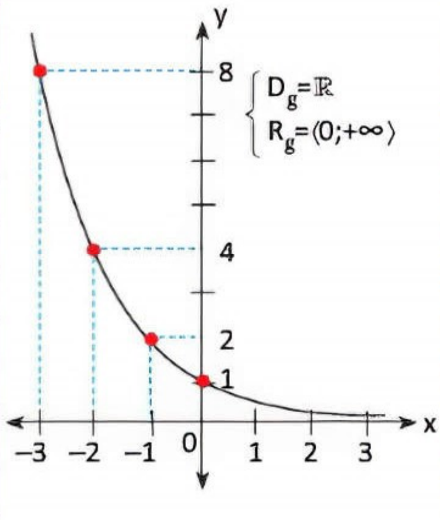
Ejemplo 2 Construye la gráfica de la función exponencial definida por:

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$; halla el dominio y el rango.

Resolución:



x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	$(1/2)^0 = 1$
–1	$(1/2)^{-1} = 2$
–2	$(1/2)^{-2} = 4$
–3	$(1/2)^{-3} = 8$
⋮	⋮
1	$(1/2)^1 = 1/2$
2	$(1/2)^2 = 1/4$
3	$(1/2)^3 = 1/8$



Ejemplo 3 Para la siguiente función $f(x) = 2^{x+3}$; $x \in \langle -4; 1]$. Halla sus extremos y su intercepto con "y", grafícala, indicado su dominio y su rango.

Resolución:

Para hallar la intersección con el eje "y" hacemos:

$$x = 0$$

Luego $f(x) = 2^{x+3}$

$\rightarrow y = 2^{0+3} = 2^3$

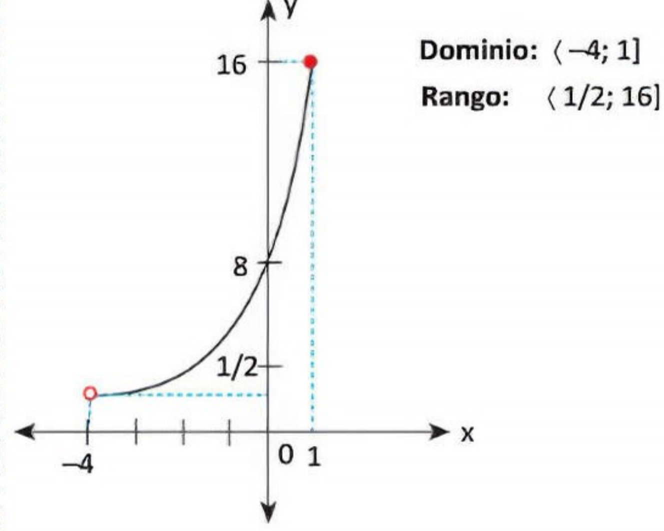
$y = 8$

x	y
⟨–4	1/2⟩
[1	16]

Por tabulación:

x	$y = 2^{x+3}$
0	$2^{0+3} = 8$
–1	$2^{-1+3} = 4$
–2	$2^{-2+3} = 2$
–3	$2^{-3+3} = 1$
–4	$2^{-4+3} = 1/2$
⋮	⋮

x	$y = 2^{x+3}$
⋮	⋮
1	$2^{1+3} = 16$
2	$2^{2+3} = 32$
3	$2^{3+3} = 64$
⋮	
⋮	



Dominio: $\langle -4; 1]$

Rango: $\langle 1/2; 16]$



1. Si la base "a" es un número positivo menor que 1, $f(x) = a^x$ disminuye a medida que el valor de "x" aumenta, es decir, la función es decreciente.

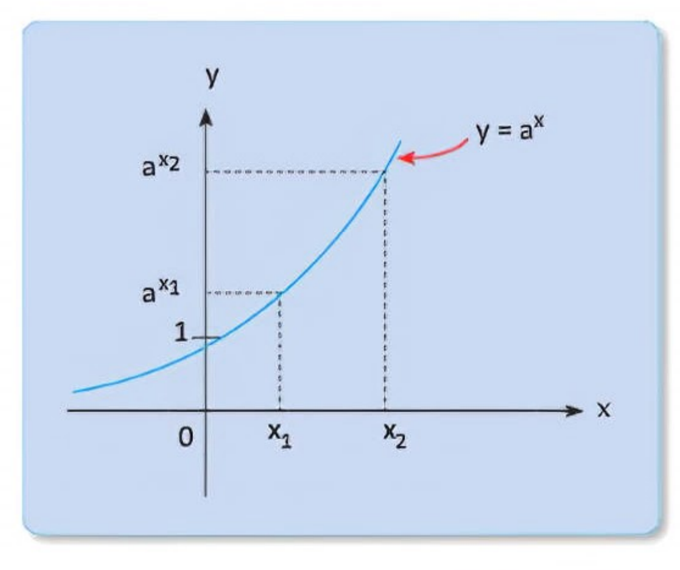
2. Si la base "a" es un número mayor que 1, $f(x) = a^x$ aumenta a medida que el valor de "x" aumenta, es decir, la función es creciente.

Propiedades de la función exponencial

Las propiedades de la función exponencial dependen de la base a. Hay dos casos:

I Cuando $a > 1$

En este caso la gráfica de la función exponencial es similar a la gráfica de $y = 2^x$.



1. La función está definida para todo valor real de x. Es decir: Dominio = $\mathbb{R}$
2. La función toma solo valores positivos. Es decir: Rango = $\langle 0; +\infty \rangle$
3. Es una función creciente. Esto significa que: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$
4. Dando a "x" valores positivos que crecen infinitamente, se obtienen valores de "y" que crecen también infinitamente.

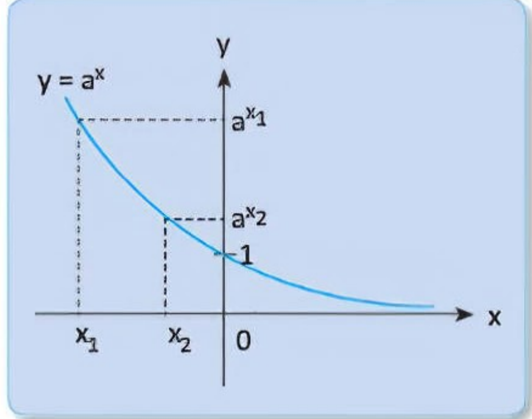
$$x \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$$

5. Dando a "x" valores negativos que decrecen infinitamente se obtienen valores de "y" que se aproximan a cero.

$$x \to -\infty \Leftrightarrow y \to 0$$

II Cuando $0 < a < 1$

En este caso la gráfica de la función exponencial es similar a la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



1. La función está definida para todo valor real de x. Dominio = $\mathbb{R}$
2. La función toma solo valores positivos. Rango = $\langle 0; +\infty \rangle$
3. La función es decreciente. $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$
4. Dando a "x" valores positivos que crecen infinitamente, se obtienen valores de "y" que se aproximan a cero.

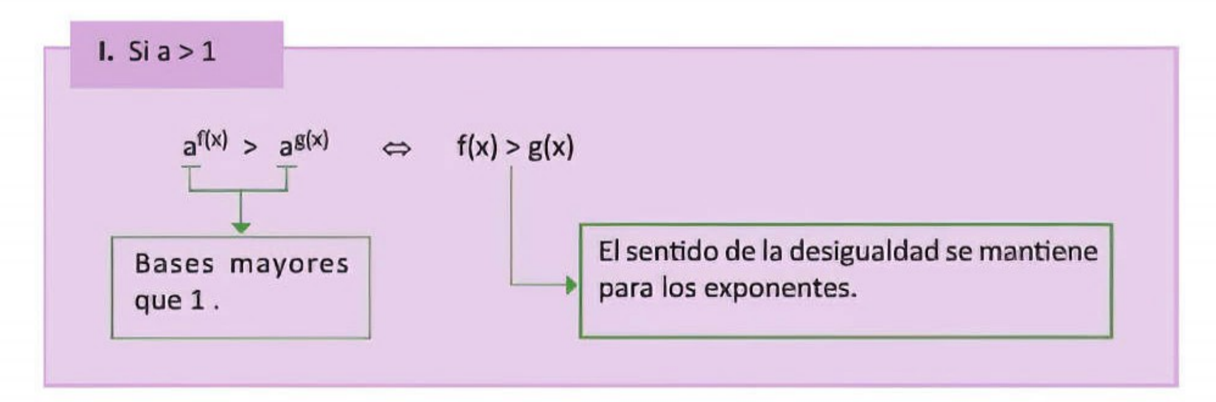
$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow y \rightarrow 0$$

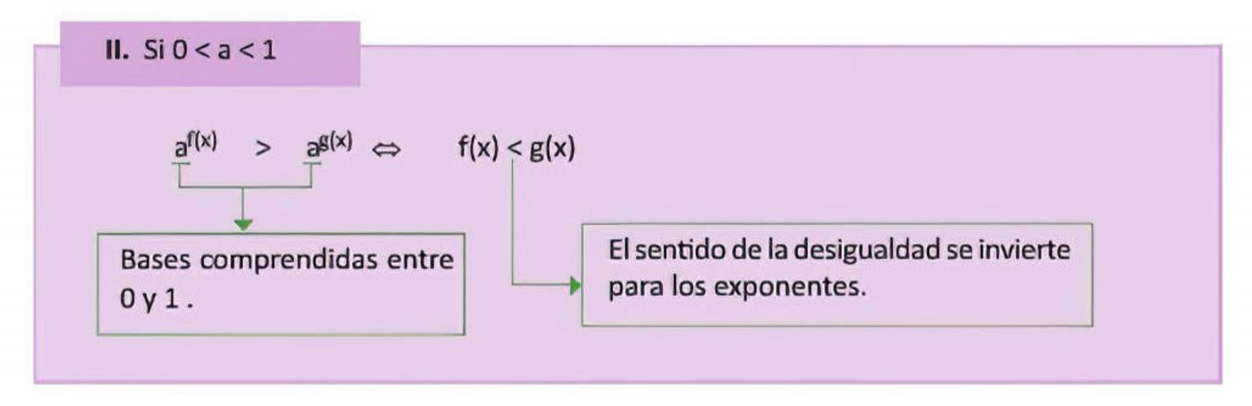
5. Dando a "x" valores negativos que decrecen infinitamente se obtienen valores de "y" que crecen infinitamente.

$$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow y \rightarrow +\infty$$

Inecuaciones exponenciales

Para resolver una inecuación exponencial hay que aplicar las siguientes propiedades de las funciones exponenciales:





Ejercicios resueltos

Sobre inecuaciones exponenciales

1 Resuelve $27^x > 9$.

Resolución

$27^x > 9$

$(3^3)^x > 3^2$

$3^{3x} > 3^2 \rightarrow 3x > 2$

bases > 1 $\quad x > \frac{2}{3}$

El conjunto solución es:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{2}{3}\right\}$$

o $S = \left\langle \frac{2}{3}; +\infty \right\rangle$ **Rpta.**

2 Resuelve: $25^{-x+1} < 0{,}008^{2x-8}$.

Resolución

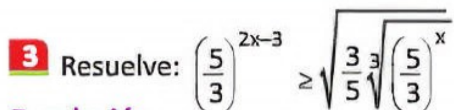
La inecuación se puede escribir así:

$$25^{-(x-1)} < \left(\frac{8}{1000}\right)^{2x-8}$$

$$(25^{-1})^{x-1} < \left(\frac{1}{125}\right)^{2x-8}$$

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right]^{x-1} < \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right]^{2x-8}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{6x-24} \rightarrow 2x-2 > 6x-24$$



La inecuación exponencial dada equivale a la inecuación:

$$2x-2 > 6x-24$$

$$-4x > -22$$

$$x < \frac{-22}{-4}$$

$$x < \frac{11}{2}$$

$$\therefore \quad S = \left\{x \in \mathbb{R} / x < \frac{11}{2}\right\} = \left\langle -\infty; \frac{11}{2}\right\rangle \quad \textbf{Rpta.}$$

3 Resuelve: $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-3} \geq \sqrt{\frac{3}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^{x}}}$

Resolución

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-3} \geq \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^{x}}}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-3} \geq \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}}}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-3} \geq \sqrt[6]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-3+x}}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-3} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{-3+x}{6}} \rightarrow 2x-3 \geq \frac{-3+x}{6}$$

Bases > 1

Multiplicando ambos miembros de la inecuación por 6.

$$6(2x-3) \geq 6\left(\frac{-3+x}{6}\right)$$

$$12x-18 \geq -3+x$$

$$11x \geq 15$$

$$x \geq \frac{15}{11}$$

$$\therefore \quad S = \left[\frac{15}{11}; +\infty\right\rangle \quad \textbf{Rpta.}$$

4 Resuelve: $2^{x^2-9x+30} \leq 1024$.

Resolución

Es necesario que las potencias de ambos miembros estén escritas con las misma base:

$$2^{x^2-9x+30} \leq 2^{10}$$

Bases > 1

$$\rightarrow \quad x^2-9x+30 \leq 10$$

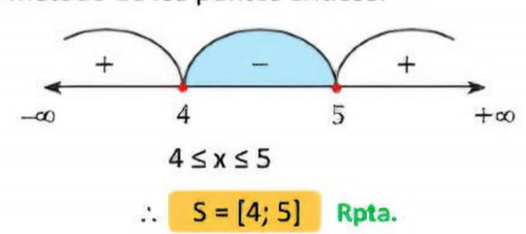
$$x^2-9x+20 \leq 0$$

$$x \quad -4$$

$$x \quad -5$$

$$(x-4)(x-5) \leq 0$$

Por el método de los puntos críticos:



$$4 \leq x \leq 5$$

$$\therefore \quad S = [4; 5] \quad \textbf{Rpta.}$$

5 Resolver: $5^{x-1} + 5^{x-2} \geq 6$

Resolución

Extrayendo el factor común en el primer miembro:

$$5^{x-1} + 5^{x-2} \geq 6$$

$$5^{x-2}(5+1) \geq 6$$

$$5^{x-2} \geq 1$$

$$5^{x-2} \geq 5^{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$\therefore \quad S = [2; +\infty\rangle \quad \textbf{Rpta.}$$

6 Resuelve: $4^{x+1} + 11 \cdot 2^{x} < 3$

Resolución

La inecuación se puede expresar así:

$$4 \cdot 4^{x} + 11 \cdot 2^{x} - 3 < 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 + 11 \cdot (2^x) - 3 < 0$$

$$4 \cdot (2^x) \qquad -1$$

$$(2^x) \qquad 3$$

$$(4 \cdot 2^x - 1)(2^x + 3) < 0$$

Pero el factor $(2^x + 3)$ es mayor que cero para cualquier valor que se le asigne a x, entonces al dividir ambos miembros de la inecuación por $(2^x + 3)$ el sentido de la desigualdad se debe conservar. Veamos:

$$\frac{(4 \cdot 2^x - 1)\cancel{(2^x + 3)}}{\cancel{2^x + 3}} < \frac{0}{2^x + 3}$$

$$4 \cdot 2^x - 1 < 0$$

$$2^{x+2} < 1$$

$$2^{x+2} < 2^0$$

$$\rightarrow \quad x + 2 < 0$$

$$x < -2$$

$\therefore$ $S = \langle -\infty; -2 \rangle$ **Rpta.**

7 Resuelve:

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} > \frac{65}{63}$$

Resolución

Pasando la fracción $\frac{65}{63}$ al primer miembro

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} - \frac{65}{63} > 0$$

$$\frac{63(2^x + 2^{-x}) - 65(2^x - 2^{-x})}{63(2^x - 2^{-x})} > 0$$

$$\frac{63 \cdot 2^x + 63 \cdot 2^{-x} - 65 \cdot 2^x + 65 \cdot 2^{-x}}{63(2^x - 2^{-x})} > 0$$

$$\frac{128 \cdot 2^{-x} - 2 \cdot 2^{-x}}{63(2^x - 2^{-x})} > 0$$

$$\frac{2^7 \cdot 2^{-x} - 2^1 \cdot 2^x}{63(2^x - 2^{-x})} > 0$$

$$\frac{2^{7-x} - 2^{1+x}}{63(2^x - 2^{-x})} > 0$$

Multiplicando ambos miembros por 63 se obtiene:

$$\frac{2^{7-x} - 2^{1+x}}{2^x - 2^{-x}} > 0$$

Ahora tenemos que considerar dos casos ya que para que un cociente sea positivo puede ocurrir que:

❶ El dividendo y el divisor sean mayor que cero.

❷ El dividendo y el divisor sean menor que cero.

El conjunto solución de la inecuación será la unión de las soluciones obtenidas en los casos ❶ y ❷.

Veamos:

$$\frac{2^{7-x} - 2^{1+x}}{2^x - 2^{-x}} > 0$$

❶ $2^{7-x} - 2^{1+x} > 0 \quad \wedge \quad 2^x - 2^{-x} > 0$

$2^{7-x} > 2^{1+x}$	$2^x > 2^{-x}$
$\rightarrow 7 - x > 1 + x$	$\rightarrow x > -x$
$-2x > -6$	$2x > 0$
$x < 3$	$x > 0$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} / x < 3 \wedge x > 0\}$

$\quad = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 3\}$

$S_1 = \langle 0; 3 \rangle$

❷ $2^{7-x} - 2^{1+x} < 0 \quad \wedge \quad 2^x - 2^{-x} < 0.$

$2^{7-x} < 2^{1+x}$	$2^x < 2^{-x}$
$\rightarrow 7 - x < 1 + x$	$\rightarrow x < -x$
$-2x < -6$	$2x < 0$
$x > 3$	$x < 0$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} / x > 3 \wedge x < 0\}$

$\quad = \{x \in \mathbb{R} / x \in \phi\}$

$S_2 = \phi$

Finalmente el conjunto solución de la inecuación exponencial será la unión de S_1 y S_2.

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$S = \langle 0; 3 \rangle \cup \phi$$

$\therefore$ $S = \langle 0; 3 \rangle$ **Rpta.**

8 Resuelve:

$$\frac{9}{3^x} + \frac{1}{9^{x-1}} \geq 90$$

Resolución

La inecuación dada es equivalente a:

$$\frac{9}{3^x} + \frac{1}{9^{x-1}} - 90 \geq 0$$

$$9 \cdot 3^{-x} + 9^{-x+1} - 90 \geq 0$$

$$9 \cdot 3^{-x} + 9^{-1} \cdot 9^{-x} - 90 \geq 0$$

$$9 \cdot 3^{-x} + \frac{1}{9} \cdot (3^{-x})^2 - 90 \geq 0$$

Multiplicando ambos miembros por 9.

$$81\cdot(3^{-x}) + (3^{-x})^2 - 810 \geq 0$$

Ordenando y factorizando

$(3^{-x})^2 + 81(3^{-x}) - 810 \geq 0$

3^{-x} ╲╱ -9

3^{-x} ╱╲ 90

$(3^{-x} - 9)(3^{-x} + 90) \geq 0$

El factor $(3^{-x} + 90)$ es siempre positivo para todo valor de x, por lo tanto se puede cancelar y el sentido de la desigualdad se conservará:

$$\frac{(3^{-x} - 9)\cancel{(3^{-x} + 90)}}{\cancel{(3^{-x} + 90)}} \geq \frac{0}{3^{-x} + 90}$$

$3^{-x} - 9 \geq 0$

$3^{-x} \geq 9$

$3^{-x} \geq 3^2$

$\rightarrow \quad -x \geq 2 \quad \rightarrow \quad x \leq -2$

$\therefore$ $S = \langle -\infty; -2]$ **Rpta.**

Función logarítmica

A la función inversa de $f(x) = a^x$; $x \in \mathbb{R}^+$; $a \neq 1$, se le denomina función logarítmica de base "a".

Esta función logarítmica de base "a" es denotada por $\log_a x$

Es decir: $f(x) = \log_a x$

Ejemplo:

Dado $g(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, su inversa será: $f(x) = \log_{4/5} x$

Veamos otros ejemplos:

Si $g(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x$, su inversa será la función: $f(x) = \log_{3/7} x$

Si $g(x) = \left(\frac{8}{5}\right)^x$, su inversa será la función: $f(x) = \log_{6/5} x$

Gráfica de una función logarítmica

En la función $f(x) = \log_a x$; la variable "x" toma únicamente valores positivos.

Ejemplo 1 Halla el dominio y el rango de:

$$f(x) = \log_2 x$$

Resolución:

Sabemos que: $f(x) = \log_2 x$

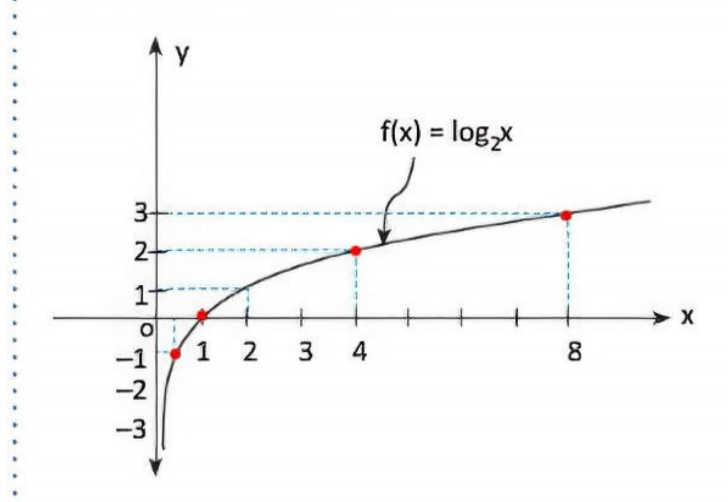
$y = \log_2 x \quad \rightarrow \quad x = 2^y$

Damos valores a esta expresión:

Por tabulación:

y	$2^y = x$
0	$2^0 = 1$
–1	$2^{-1} = 1/2$
–2	$2^{-2} = 1/4$
–3	$2^{-3} = 1/8$
⋮	⋮
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^0 = 1$
⋮	⋮

Para este tipo de expresión es recomendable empezar a dar valores a la variable "y".



Dominio: $D_f = \langle 0; +\infty \rangle$

Rango: $R_f = \mathbb{R}$

Ejemplo 2 Halla el dominio y el rango de:

$$f(x) = \log_{1/3}x$$

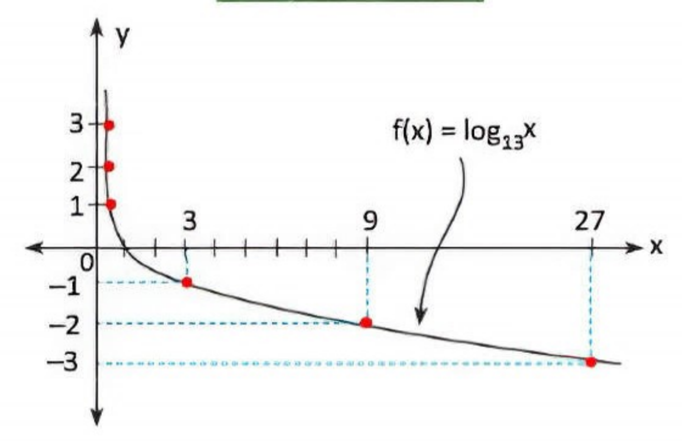
Resolución:

Sabemos que: $f(x) = \log_{1/3}x$

$$y = \log_{1/3}x \rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

Por tabulación:

y	$(1/3)^y = x$
0	$(1/3)^0 = 1$
–1	$(1/3)^{-1} = 3$
–2	$(1/3)^{-2} = 9$
–3	$(1/3)^{-3} = 27$
⋮	⋮
1	$(1/3)^1 = 1/3$
2	$(1/3)^2 = 1/9$
3	$(1/3)^3 = 1/27$



Dominio: $D_f = \langle 0; +\infty\rangle$

Rango: $R_f = \mathbb{R}$

Ejemplo 3 Grafica la función:

$$y = \log_3 x$$

En base al gráfico responde las siguientes preguntas:

A) ¿Cuál es su dominio?

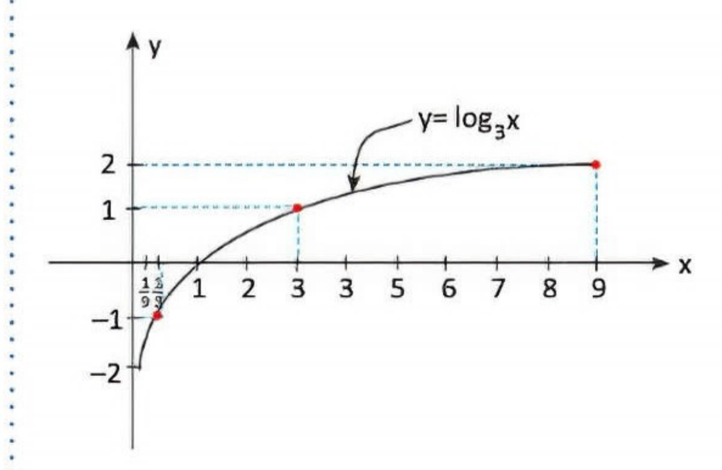
B) ¿Cuál es su rango?

C) ¿Qué signo tiene el logaritmo en base 3 de los números menores que 1?

D) ¿El logaritmo en base 3 de qué números está entre –2 y 2?

E) Grafica la función $y = \log_3(x-2)$ e indica su dominio y su rango.

Resolución:



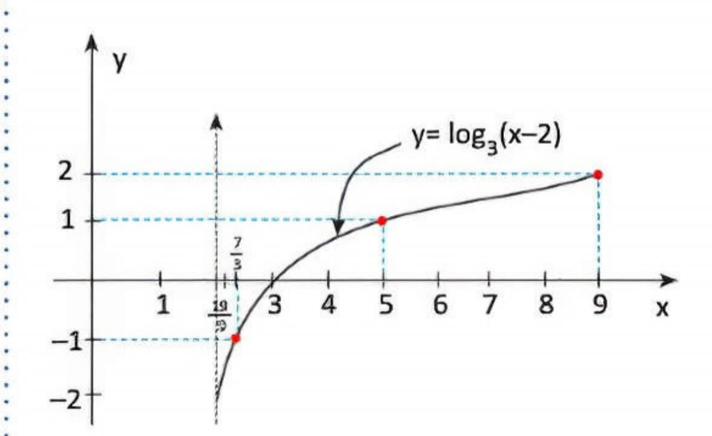
A) Dom $\log_3 x = \mathbb{R}^+$

B) Rango $\log_3 x = \mathbb{R}$

C) Negativo. Si observamos el gráfico, el logaritmo en base 3 de cualquier número menor que 1 es negativo. Por ejemplo: $\log_3 1/3 = -1$

D) Observamos que $\log_3 1/9 = -2$ y $\log_3 9 = 2$; luego el logaritmo en base 3 de los números que están entre 1/9 y 9 están entre –2 y 2.

E) Gráfica:



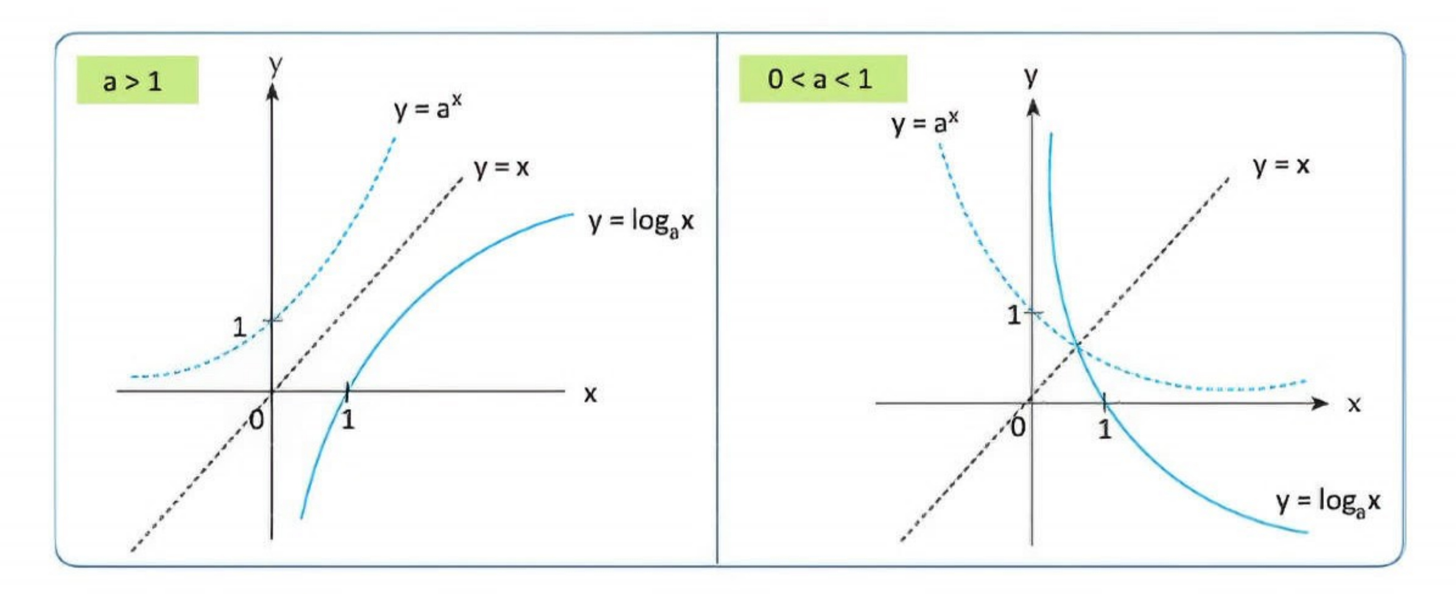
Dom: $\log_3(x-2) = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

Rango: $\log_3(x-2) = \mathbb{R}$

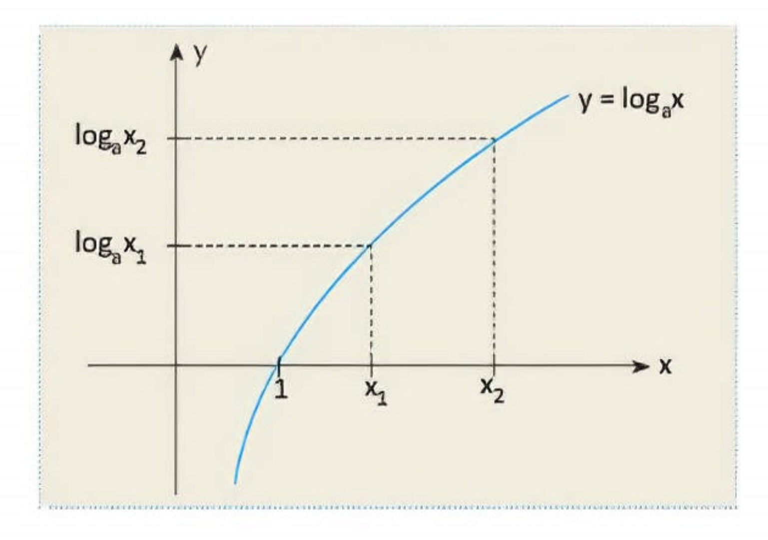
Propiedades de la función logarítmicaica

La gráfica de la función logarítmica nos dará las propiedades más importantes. En la representación gráfica de las funciones se sabe que dos funciones inversas tienen sus gráficas simétricas respecto a la recta $y = x$. Por lo tanto la gráfica de $y = \log_a x$ es simétrica a la gráfica de $y = a^x$ respecto de la recta $y = x$.

Analizando la gráfica de $y = a^x$ para los casos $a > 1$ y $0 < a < 1$, podemos construir la gráfica de $y = \log_a x$ por reflexión con respecto a la recta $y = x$.



I. Cuando $a > 1$



1. La función logarítmica $y = \log_a x$ solamente está definida para los valores positivos de x.
2. La función logarítmica $y = \log_a x$ es INYECTIVA (o univalente), lo que quiere decir que $\forall x_1, x_2 \in \langle 0; +\infty \rangle$ se cumple que:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

3. Es una función creciente $\forall x_1, x_2 \in \langle 0; +\infty \rangle$.

$$x_2 > x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x_2 > \log_a x_1$$

4. Los logaritmos de los números mayores que uno son positivos y crecen a medida que crece el número x.

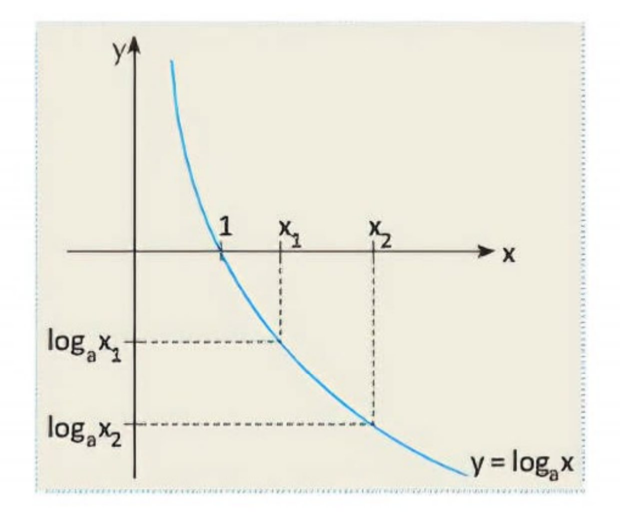
5. Los logaritmos de los números menores que uno son negativos y decrecen indefinidamente a medida que se aproxima el número x a cero.

II. Cuando $0 < a < 1$

1. La función logarítmica $y = \log_a x$ solamente está definida para valores positivos de x.
2. La función $y = \log_a x$ es inyectiva. Es decir:

   $\forall x_1, x_2 \in \langle 0; +\infty\rangle$ $\quad \log_a x_1 = \log_a x_2 \leftrightarrow x_1 = x_2$
3. La función $y = \log_a x$ es decreciente.

   $\forall x_1, x_2 \in \langle 0; +\infty\rangle$ $\quad x_2 > x_1 \leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$
4. Los logaritmos de los números menores que uno son positivos y crecen indefinidamente al aproximarse x a cero.
5. Los logaritmos de los números mayores que uno son negativos y decrecen indefinidamente a medida que crece x.



Ejercicios resueltos

Sobre función logarítmica

1 Grafica la función $y = \log_2(2x - 3)$; halla el dominio y el rango.

Resolución

La función logaritmo está definida para valores positivos del número.

En la función $y = \log_2(2x - 3)$ el número es $(2x - 3)$ y para hallar el dominio resolvemos la inecuación:

$$2x - 3 > 0$$

$$x > 3/2$$

$$\therefore \quad \text{Dominio} = \left\langle \frac{3}{2}; +\infty \right\rangle$$

El rango de una función logarítmica siempre es todos los reales

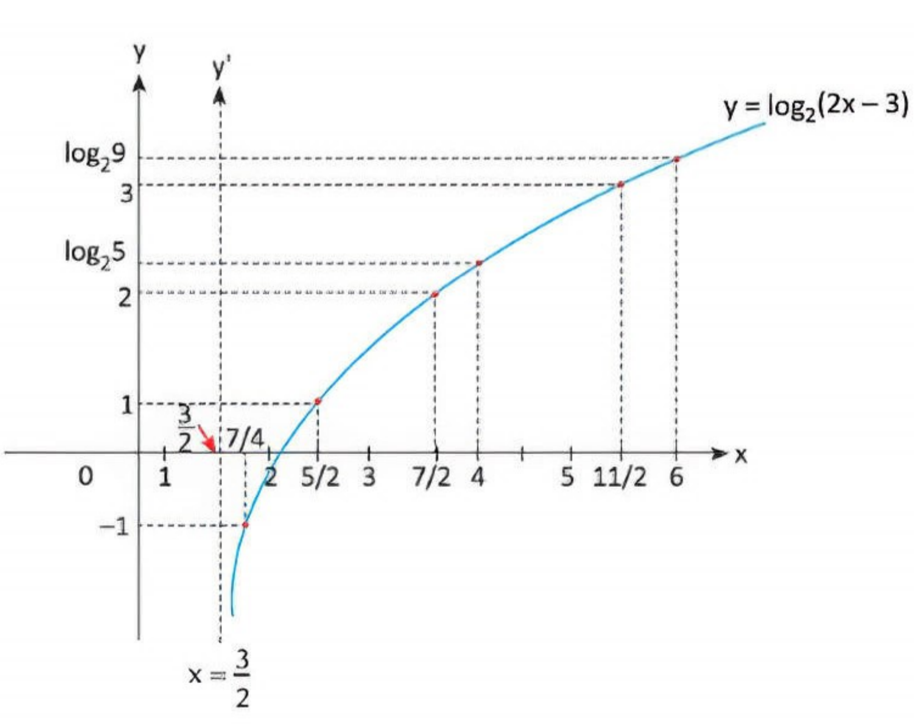
$$\text{Rango} = \mathbb{R}$$

Para hallar la gráfica hay que tomar en cuenta el hecho de que $x > \frac{3}{2}$, lo cual significa que hay que darle valores a

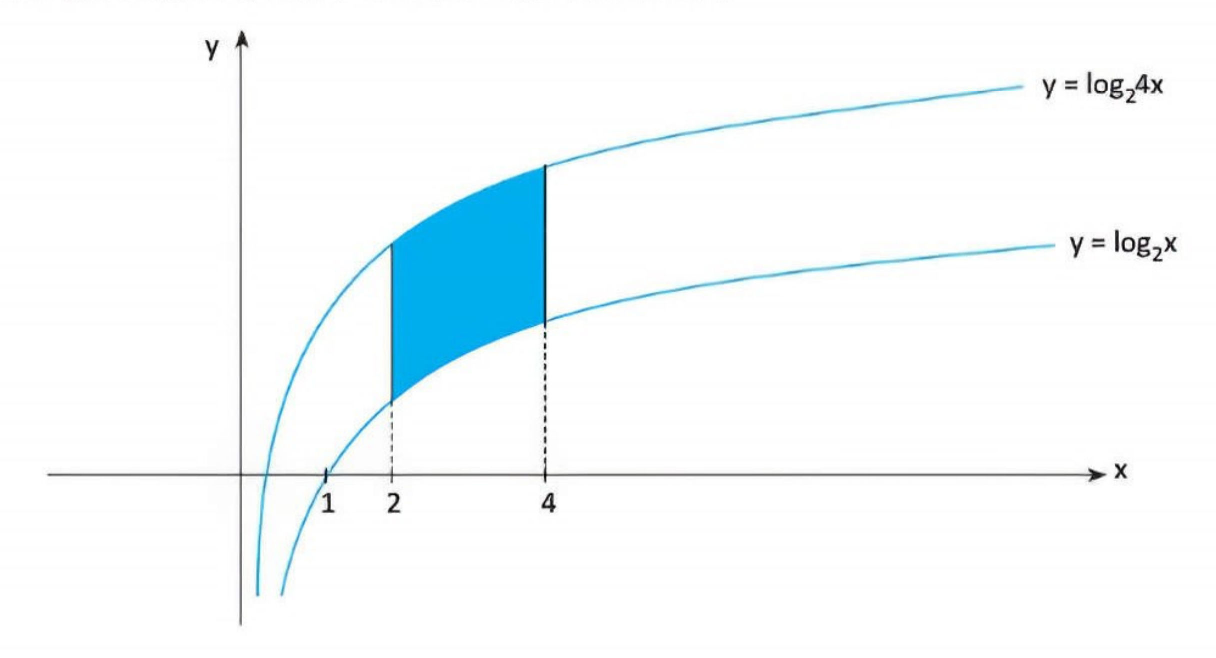
x que son mayores que 3/2, además la recta vertical $x = \frac{3}{2}$ se comportará como una asíntota de la gráfica, lo cual significa que cada vez que se le asigne a x valores más cercanos a 3/2, el valor de la función será cada vez más negativo, o sea tiende a $-\infty$.

Por tabulación:

x	$y = \log_2(2x-3)$
6	$y = \log_2 9 = 3{,}17$
11/2	$y = \log_2 8 = 3$
4	$y = \log_2 5 = 2{,}32$
7/2	$y = \log_2 4 = 2$
5/2	$y = \log_2 2 = 1$
2	$y = \log_2 1 = 0$
7/4	$y = \log_2 1/2 = -1$



2 En el siguiente gráfico, halla el área de la región sombreada.



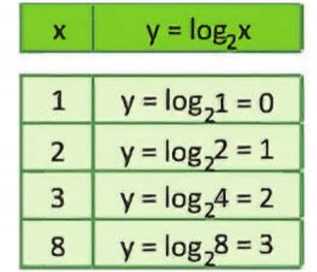
Resolución

Aplicando las propiedades de los logaritmos, la función $y = \log_2 4x$ se puede escribir así:

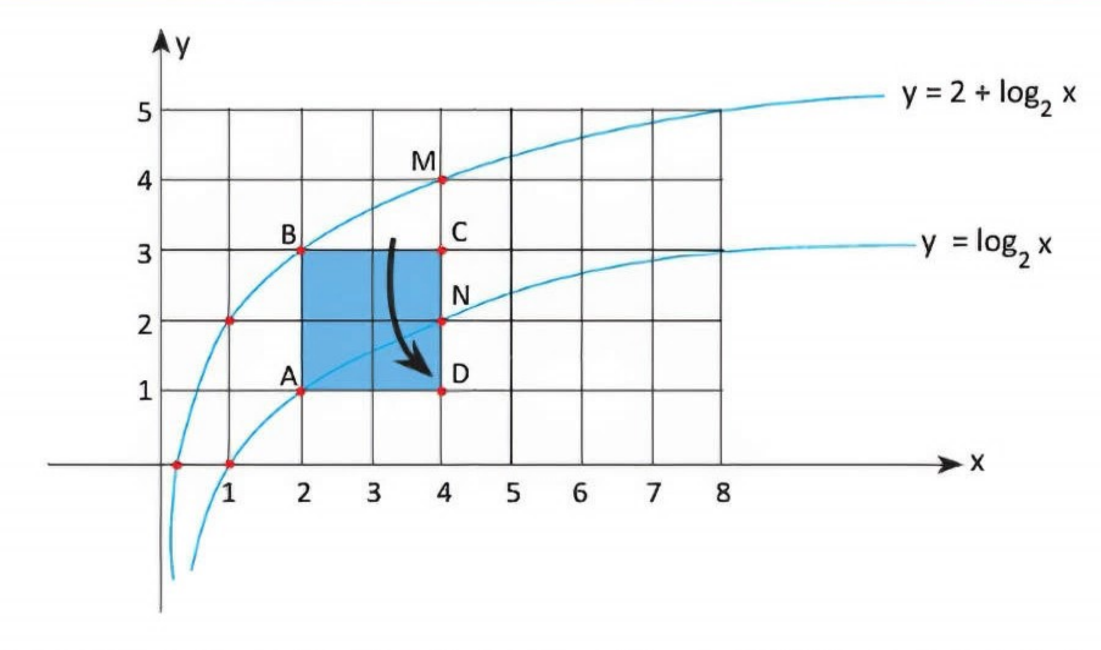
$$y = \log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$$

Entonces la gráfica de la función $y = 2 + \log_2 x$ es la misma que la gráfica de $y = \log_2 x$ pero desplazada 2 unidades hacia arriba.

Tabulando:



x	$y = \log_2 x$
1	$y = \log_2 1 = 0$
2	$y = \log_2 2 = 1$
3	$y = \log_2 4 = 2$
8	$y = \log_2 8 = 3$



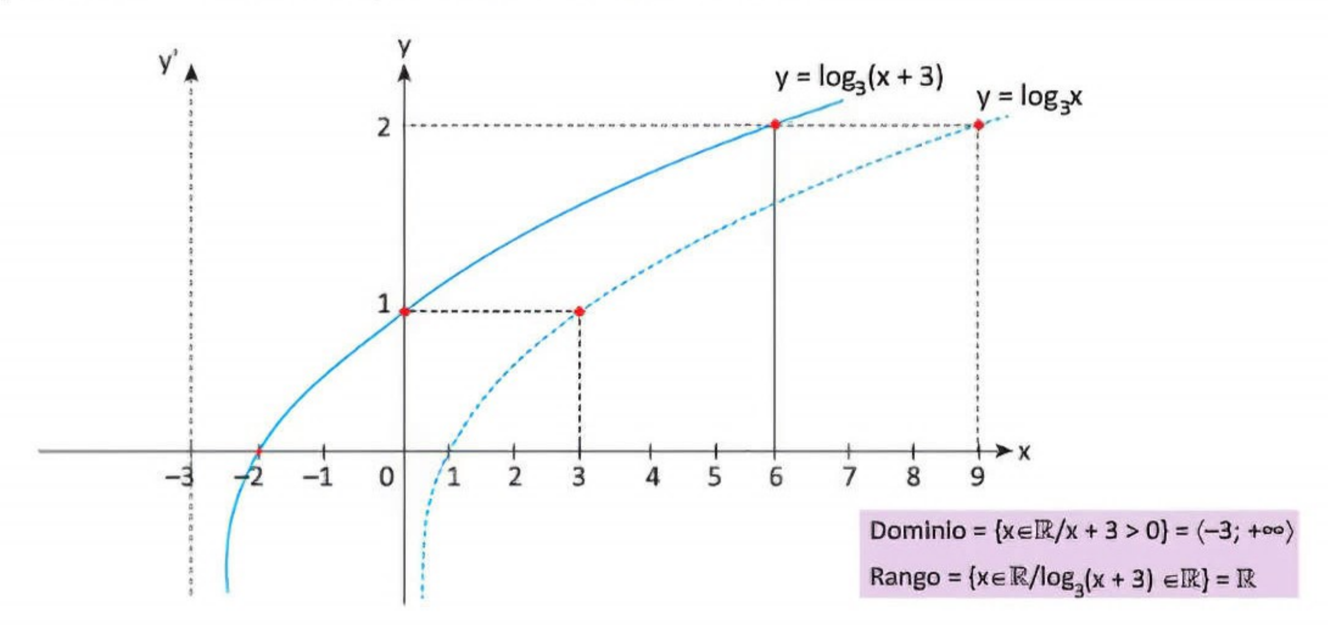
En el gráfico vemos que el área de la región sombreada equivale al área del cuadrado ABCD cuyo lado mide 2 unidades.

$\therefore$ Área de la región sombreada $= (2\ u)^2 = 4\ u^2$ **Rpta.**

3 Halla la gráfica, el dominio y rango de la función $y = \log_3(x + 3)$.

Resolución

Por el criterio de desplazamiento, la gráfica de $y = f(x + 3) = \log_3(x + 3)$ es la misma que la gráfica de $y = f(x) = \log_3 x$ pero desplazada 3 unidades hacia la izquierda, como se ve a continuación.



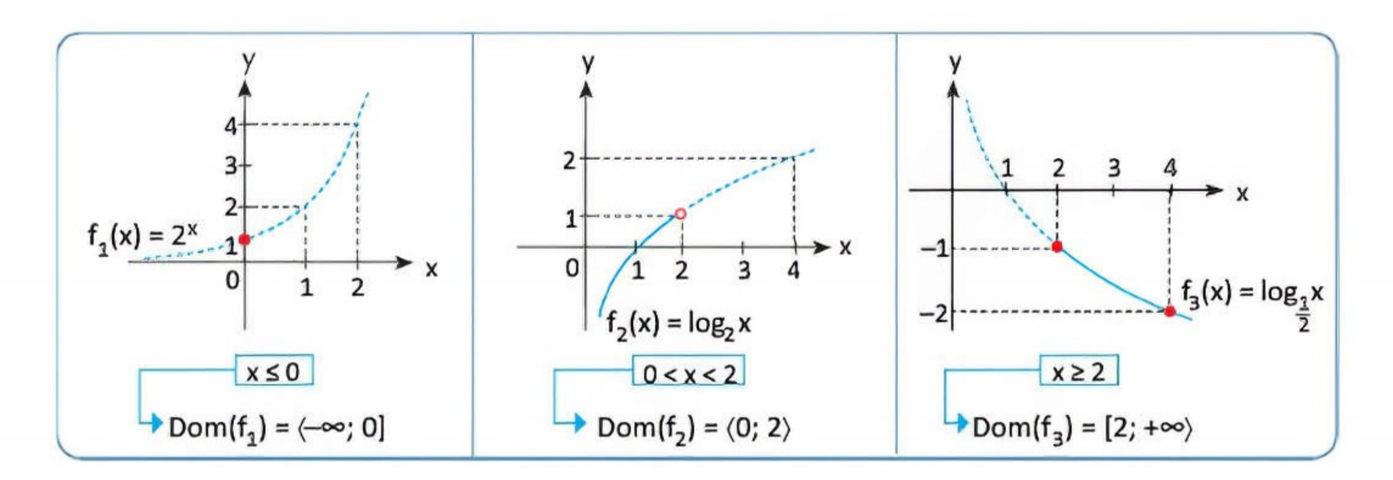
4 Sea f: R → R una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x; & \text{si } x \leq 0 \\ \log_2 x; & \text{si } 0 < x < 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x; & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Halla la gráfica, el dominio y rango de f.

Resolución

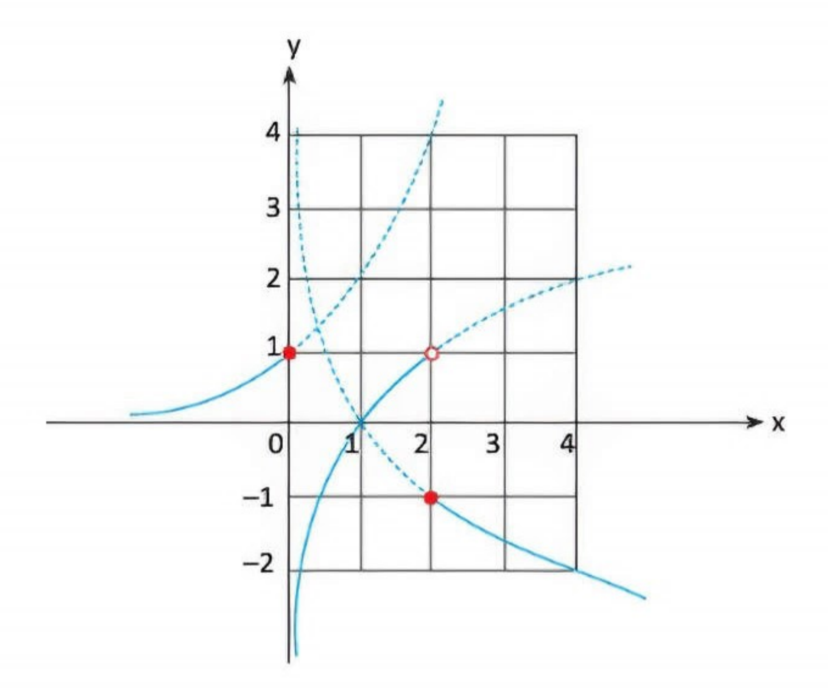
Graficamos cada una de las funciones parciales en su dominio respectivo.



La gráfica de la función f será la reunión de las gráficas de las funciones parciales f_1 , f_2 y f_3

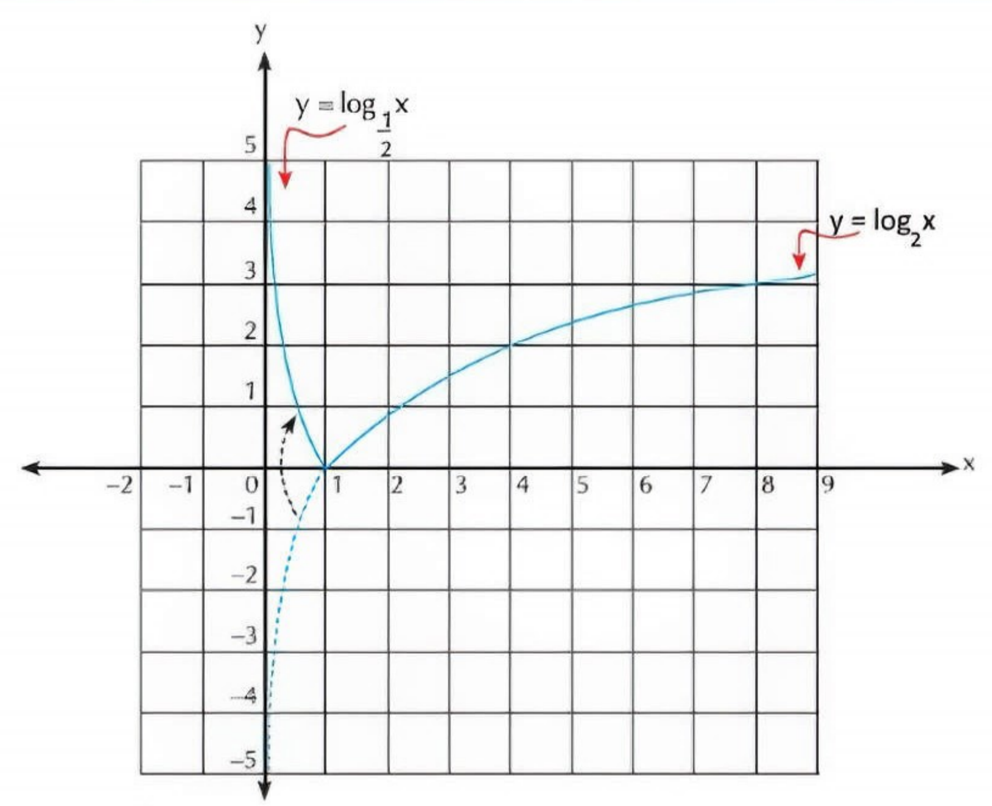
$$
\begin{aligned}
Dom(f) &= Dom(f_1) \cup Dom(f_2) \cup Dom(f_3) \\
&= \langle -\infty; 0] \cup \langle 0; 2\rangle \cup [2; +\infty\rangle \\
&= \langle -\infty; +\infty\rangle \\
&= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$Ran(f) = \langle -\infty; 1]$



5 Traza la gráfica, halla el dominio y rango de la función $f(x) = |\log_2 x|$.

Resolución



Del gráfico: Dom(f) = ⟨0; +∞⟩

Ran(f) = [0; +∞⟩

6 La solución de la ecuación $x \cdot 2^{3^x} = 1$ pertenece al intervalo ⟨a; a + 1⟩ donde **a** ∈ ℤ. ¿Cuál es el valor de **a**?

Resolución

En la ecuación $x \cdot 2^{3^x} = 1$

Tomamos logaritmo en base 2:

$$\log_2\left(x \cdot 2^{3^x}\right) = \log_2 1$$

$$\log_2 x + \log_2 2^{(3^x)} = 0$$

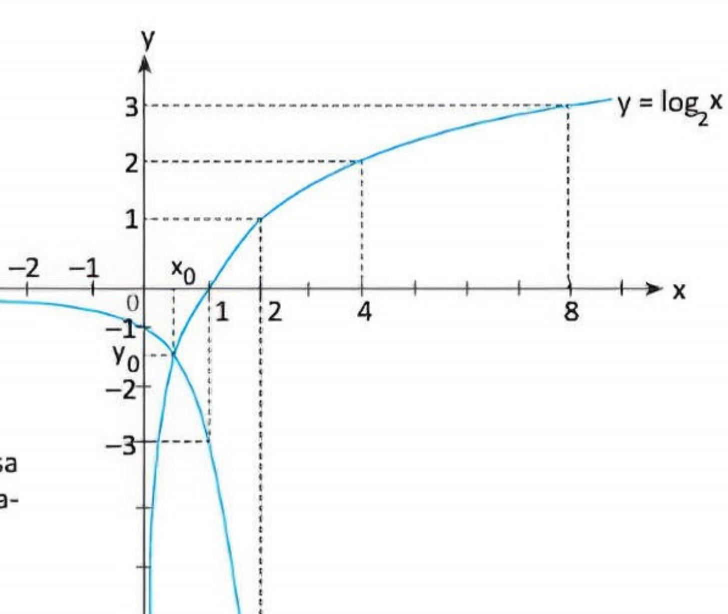
$$\log_2 x + 3^x \log_2 2 = 0$$

$$\log_2 x + 3^x = 0$$

$$\log_2 x = -3^x$$

Sea $y = \log_2 x = -3^x$

Graficamos las funciones $y = \log_2 x \wedge y = -3^x$, la abcisa del punto de intersección será una solución de la ecuación $x \cdot 2^{3^x} = 1$.



De acuerdo al gráfico, las curvas se intersectan en el punto $(x_0; y_0)$, luego:

$$y_0 = \log_2 x_0 = -3^{x_0}$$

entonces x_0 es la solución de la ecuación $\log_2 x = -3^x$.

$$x_0 \in \langle 0; 1\rangle$$

Según datos $x_0 \in \langle a; a + 1\rangle$

$$\therefore \quad \boxed{a = 0} \quad \textbf{Rpta.}$$

Inecuación logarítmica

Para resolver una inecuación logarítmica hay que aplicar las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas:

I. Si $a > 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x)$$

El sentido de la desigualdad se conserva.

Procedimiento:

1° Se resuelve: $\underbrace{f(x) < g(x)}_{\text{Solución } (S_1)}$

2° Por definición: $\underbrace{f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0}_{\text{Solución } (S_2)}$

3° El conjunto solución (S) es de la inecuación logarítmica es:

$$\boxed{S = S_1 \cap S_2}$$

II. Si $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x)$$

El sentido de la desigualdad se invierte.

Procedimiento:

1° Se resuelve: $\underbrace{f(x) < g(x)}_{\text{Solución } (S_1)}$

2° Por definición: $\underbrace{f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0}_{\text{Solución } (S_2)}$

3° El conjunto solución (S) es de la inecuación logarítmica es:

$$\boxed{S = S_1 \cap S_2}$$

Ejercicios resueltos

Sobre inecuaciones logarítmicas

1 Resuelve $\log_3(4x - 1) < \log_3 19$.

Resolución

Como la base común es mayor que 1, entonces el sentido de la desigualdad se conserva:

$$\log_3(4x - 1) < \log_3 19$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x - 1 < 19$$

$$x < 5$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}/x < 5\} = \langle -\infty; 5\rangle$$

Por definición de logaritmo:

$$4x - 1 > 0$$

$$x > \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}/x > \frac{1}{4}\right\} = \left\langle \frac{1}{4}; +\infty\right\rangle$$

El conjunto solución (S) será:

$$\boxed{S = S_1 \cap S_2 = \left\langle \frac{1}{4}; 5\right\rangle} \quad \textbf{Rpta.}$$

2 Resuelve:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+4) > \log_{\frac{1}{2}}20$$

Resolución

Como la base $\left(\frac{1}{2}\right)$ está comprendido entre 0 y 1, el sentido de la desigualdad se invierte. Veamos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+4) > \log_{\frac{1}{2}}20$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 4 < 20$$

$$x < 16$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}/x < 16\} = \langle -\infty; 16\rangle$$

Por definición de logaritmo

$$x + 4 > 0$$

$$x > -4$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}/x > -4\} = \langle -4; +\infty\rangle$$

Luego, el conjunto solución es:

$$S = S_1 \cap S_2 = \langle -4; 16\rangle$$ **Rpta.**

3 Resuelve:

$$\log\left(\frac{x}{4} - 3\right) > \log(x - 15)$$

Resolución

La base común es 10. Tenemos:

$$\log_{10}\left(\frac{x}{4} - 3\right) > \log_{10}(x - 15)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{4} - 3 > x - 15$$

$$x - 12 > 4x - 60$$

$$-3x > -48$$

$$x < 16$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}/x < 16\} = \langle -\infty; 16\rangle$$

Por definición de logaritmo

$$\frac{x}{4} - 3 > 0 \;\wedge\; x - 15 > 0$$

$$x > 12 \;\wedge\; x > 15$$

$$\Rightarrow \quad x > 15$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}/x > 15\} = \langle 15; +\infty\rangle$$

Finalmente

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}/15 < x < 16\rangle$$

$$\therefore \quad S = \langle 15; 16\rangle$$ **Rpta.**

4 Resuelve:

$$2\log\sqrt{7} < \log(x^2 - 4x - 5)$$

Resolución

La inecuación se puede escribir así:

$$\log_{10}\sqrt{7}^2 < \log_{10}(x^2 - 4x - 5)$$

$$\log 7 < \log(x^2 - 4x - 5)$$

$$7 < x^2 - 4x - 5$$

$$x^2 - 4x - 12 > 0$$

x ⟍ −6
x ⟋ 2

$$(x - 6)(x + 2) > 0$$

$$S_1 = \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$$

Por definición de logaritmo

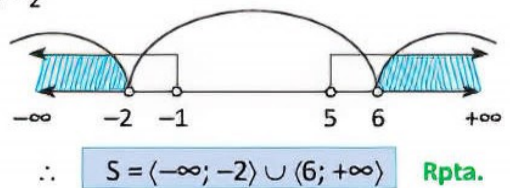
$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

x ⟍ −5
x ⟋ 1

$$(x - 5)(x + 1) > 0$$

$$S_2 = \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$$

Finalmente, el conjunto solución será la intersección de S_1 y S_2.



$$\therefore \quad S = \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$$ **Rpta.**

5 Resuelve:

$$\log_2 x + \log_2(2x - 1) > \log_2 10$$

Resolución

$$\log_2[x(2x - 1)] > \log_2 10$$

$$\log_2(2x^2 - x) > \log_2 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x > 10$$

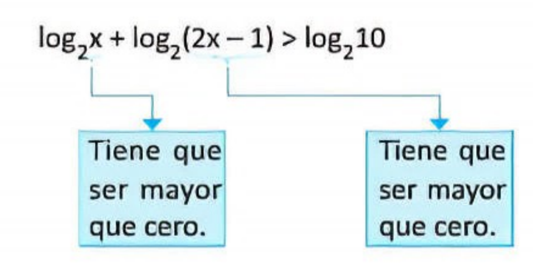
$$2x^2 - x - 10 > 0$$

2x ⟍ −5
x ⟋ 2

$$(2x - 5)(x + 2) > 0$$

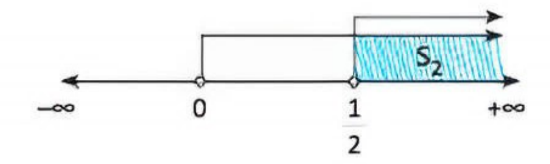
$$S_1 = \langle -\infty; -2\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}; +\infty\right\rangle$$

En la inecuación original



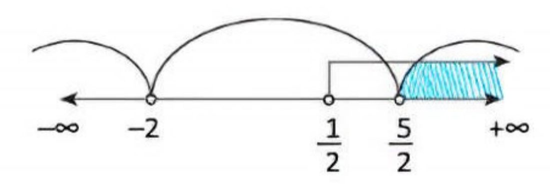
$$x > 0 \wedge 2x - 1 > 0$$

$$S_2: \quad x > 0 \wedge x > \frac{1}{2}$$



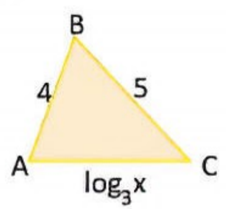
$$S_2 = \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$$

Finalmente, el conjunto solución de la inecuación es la intersección de S_1 y S_2.



$$\therefore \quad S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{5}{2} \right\} = \left\langle \frac{5}{2}; +\infty \right\rangle \quad \textbf{Rpta.}$$

6 Los lados de un triángulo ABC miden AB = 4 ; BC = 5 ; AC = $\log_3 x$, donde $x \in \mathbb{Z}$. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar x?



Resolución

Por el teorema de la desigualdad triangular:

$$BC - AB < AC < BC + AB$$

$$1 < \log_3 x < 9$$

$$\log_3 3 < \log_3 x < \log_3 3^9$$

$$\rightarrow \quad 3 < x < 3^9$$

$$3 < x < 19\,683$$

$$\therefore \quad x_{máx} = 19\,682 \quad \textbf{Rpta.}$$

7 Resuelve:

$$\log_{\frac{1}{3}}(10 - x^2) \leq 0$$

Resolución

Como $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$, la inecuación se puede escribir así:

$$\log_{\frac{1}{3}}(10 - x^2) \leq \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$\rightarrow \quad 10 - x^2 \geq 1$$

$$-x^2 \geq -9$$

$$x^2 \leq 9$$

$$S_1: -3 \leq x \leq 3$$

$$S_1 = [-3; 3]$$

Por definición de logaritmo

$$10 - x^2 > 0$$

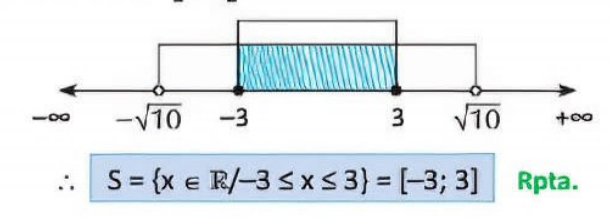
$$-x^2 > -10$$

$$x^2 < 10$$

$$S_2: -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$$

$$S_2 = [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$$

Intersectando S_1 y S_2.



$$\therefore \quad S = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 3\} = [-3; 3] \quad \textbf{Rpta.}$$

8 Resuelve $2\log x - \log(x - 16) \leq 2$

Resolución

$$2\log x - \log(x - 16) \leq 2$$

$$\log x^2 - \log(x - 16) \leq \log 10^2$$

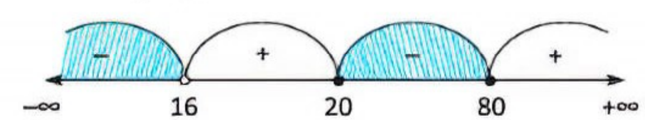
$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) \leq \log 100$$

$$\rightarrow \quad \frac{x^2}{x-16} \leq 100$$

$$\frac{x^2}{x-16} - 100 \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 100x + 1600}{x - 16} \leq 0$$

$$\frac{(x-20)(x-80)}{x-16} \leq 0$$



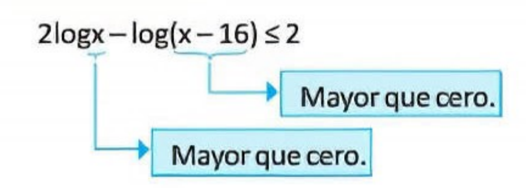
Resolviendo por el método de los puntos crítico

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} / x < 16 \vee 20 \leq x \leq 80\}$$

$$S_1 = \langle -\infty; 16 \rangle \cup [20; 80]$$

Por definición de logaritmo, en la inecuación original

$2\log x - \log(x-16) \leq 2$



S_2: $x > 0 \ \wedge \ x - 16 > 0$

$x > 0 \ \wedge \ x > 16$

$\rightarrow \quad x > 16$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} / x > 16\} = \langle 16; +\infty \rangle$

Finalmente:

$S = S_1 \cap S_2 = [20; 80]$

$\therefore$ $S = \{x \in \mathbb{R} / 20 \leq x \leq 80\} = [20; 80]$ **Rpta.**

9 ¿Cuántos valores enteros de x se satisfacen la siguiente inecuación?

$$\log_2(x^2 - 2x - 3) \leq \log_2 21$$

Resolución

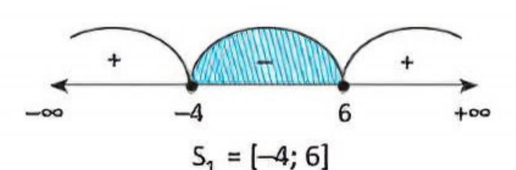
$\log_2(x^2 - 2x - 3) \leq \log_2 21$

$\rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 \leq 21$

$x^2 - 2x - 24 \leq 0$

x ⟍ ⟋ −6
x ⟋ ⟍ 4

$(x-6)(x+4) \leq 0$



$S_1 = [-4; 6]$

Por definición de logaritmo:

$x^2 - 2x - 3 > 0$

x ⟍ ⟋ −3
x ⟋ ⟍ 1

$(x-3)(x+1) > 0$

$S_2 = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$

+ − +

−∞ −1 3 +∞

El conjunto solución(S) es:

$S = S_1 \cap S_2 = [-4; 6] \cap \{\langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle\}$

$S = [-4; -1\rangle \cup \langle 3; 6]$

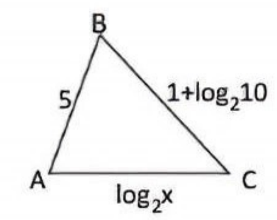
Valores enteros de x: $\{-4; -3; -2; 4; 5; 6\}$

$\therefore$ 6 valores enteros **Rpta.**

10 Los lados de un triángulo ABC miden AB = 5 ; $BC = 1 + \log_2 10$; $AC = \log_2 x$, $x \in \mathbb{R}$

¿Cuántos valores puede tomar x?

Resolución



Por el teorema de la desigualdad triangular:

$AB - BC < AC < AB + BC$

$5 - (1 + \log_2 10) < \log_2 x < 5 + (1 + \log_2 10)$

$4 - \log_2 10 < \log_2 x < 6 + \log_2 10$

$\log_2 16 - \log_2 10 < \log_2 x < \log_2 64 + \log_2 10$

$\log_2\left(\frac{16}{10}\right) < \log_2 x < \log_2(64 \cdot 10)$

$\log_2 1{,}6 < \log_2 x < \log_2 640$

$\rightarrow 1{,}6 < x < 640$

Valores enteros de $x = \{2; 3; 4; \ldots ; 639\}$

Cantidad de valores enteros: $639 - 1 = 638$

Rpta.

Amplía tus conocimientos

¿Cómo se enfría la sopa?

Los objetos calientes se enfrían hasta llegar a la temperatura ambiente. Supongamos que, un objeto caliente que tiene la temperatura inicial T_0 (temperatura en el instante cero) se coloca en un medio donde la temperatura es T_a (llamada temperatura ambiente) ¿cómo calcularíamos la temperatura que tendrá este objeto después de un tiempo t?. Esta pregunta se hizo Newton y le llevó a plantear una ecuación diferencial cuya solución es:

$$T_{(t)} = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \; ..... (1)$$

La expresión (1) se conoce como la Ley de enfriamiento de Newton.$T_{(t)}$ es la temperatura del objeto al cabo de un tiempo t, "e" es la base de los logaritmos neperianos y "k" es una constante de proporcionalidad.

Una aplicación de la ley de enfriamiento de Newton se verá al resolver el siguiente problema:

Un tazón de sopa se enfría de 90°C a 60°C en 10 minutos, en una habitación donde la temperatura es 20° C.

¿Cuánto más tardará la sopa en enfriarse hasta 35°C?

La sopa inicialmente tiene una temperatura de 90°C entonces T_0 = 90°C, luego de un tiempo de 10 minutos tiene una temperatura de 60°C, o sea $T_{(10)}$ = 60°C. Además la temperatura ambiente es 20°C, T_a = 20°C. Con estos datos calculamos, en primer lugar, el valor de la constante k. Reemplazando en (1).

$$T_{(t)} = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

$$T_{(10)} = 20 + (90 - 20)e^{-k \cdot 10}$$

$$60 = 20 + 70e^{-10k}$$

$$e^{-10k} = \frac{4}{7}$$

Tomando logaritmo neperiano a ambos miembros:

$$\ln e^{-10k} = \ln\frac{4}{7}$$

$$-10k = \ln 4 - \ln 7$$

$$k = \frac{\ln 7 - \ln 4}{10} = 0{,}056$$

Reemplazando el valor de k por 0, 056, la expresión (1) se convierte en la función:

$$T_{(t)} = 20 + 70e^{-0{,}056t}$$

Esta función nos permite conocer la temperatura de la sopa en cualquier instante t. ¿Para qué valor de t la sopa tendrá una temperatura de 35°C?

$$35 = 20 + 70e^{-0{,}056t}$$

$$e^{-0{,}056t} = \frac{3}{14}$$

$$-0{,}056t = \ln\frac{3}{14}$$

$$t = \frac{\ln 14 - \ln 3}{0{,}056} = 27{,}5 \text{ minutos}$$

Descontando los 10 minutos, faltarían 17,5 minutos para que la sopa alcance los 35°C.

Alfred Rossemblatt
(Investigador Polaco)

Personaje de la Matemática



Nació en Kradow (Cracovia), la ciudad más antigua de Polonia, el 22 de junio de 1880. Su padre fue el Dr. José Rossemblatt, profesor de Derecho Penal y miembro de la Comisión encargada de confeccionar el Código Penal de Austria. Sus estudios los realizó en la Escuela Politécnica de Viena y en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Cracovia, en la que obtuvo el grado académico de filosofía presentando como tesis su trabajo: *Las funciones Enteras con Variables Complejas*. Posteriormente estudió en la Universidad de Gottingen, en Alemania, y trabajó como profesor de matemática en la Universidad de Cracovia donde se había graduado. El 10 de agosto de 1936 llegó al Perú, contratado por la Facultad de ciencias de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, gracias a la gestión del decano de entonces el Dr. Godofredo García Díaz, y se hizo cargo de las Cátedras de Astronomía y Geodesia; luego de los cursos de Análisis I,II y III, de Cálculo de Probabilidades, Geometría Proyectiva, Física Matemática, Geofísica y Astrofísica.

Fue un destacado investigador científico y publicó más de 225 trabajos en diferentes idiomas (francés, polaco, inglés, alemán, español e italiano), años más tarde adoptó la nacionalidad peruana y permaneció en Lima hasta su fallecimiento. En este largo periodo contribuyó de una manera decisiva en un cambio sustancial de los estudios de la matemática en la Universidad y dio impulso al renacimiento de la actividad científica en todos los campos. Gracias a él no solo se modernizó la enseñanza de la matemática, sino se intensificó gradualmente la investigación en diferentes campos que hasta entonces se desconocían.

Por sus dotes de investigador sustentó conferencias en las universidades de Roma, Sofía, Belgrano, en la Sorbona de París y diferentes universidades de los Estados Unidos (Chicago, Princeton, Philadelphia, Harvard, etc.).

En el año 1929 participó en los congresos de matemática de Bologna, donde fue presidente de la sección de hidrodinámica, de Lwow, de Cambridge y de Zurich. También fue miembro honorario de la revista de la facultad de ciencias de la Universidad de San Marcos.

Sus trabajos versaron principalmente sobre la búsqueda de un método que sirviese a la vez para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones de derivadas parciales. También investigó sobre mecánica e hidrodinámica.

Murió en Lima el 9 de julio de 1947 a la edad de 67 años.

Investiga:

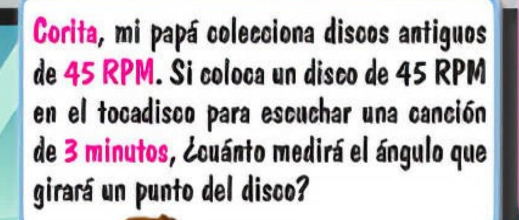


1. ¿Crees que en nuestro país, la educación impartida permite a los jovenes desarrolar la investigación y el interés por la ciencia?

2. ¿Qué aptitudes o habilidades desarrollan los jovenes que demuestran un carácter científico ?



Sistemas de medidas angulares y razones trigonométricas de un ángulo agudo



Memo, 45 RPM significa 45 revoluciones o vueltas por minuto. En 3 minutos que dura la canción un punto del disco girará $45 \times 3 = 135$ vueltas. Cada vuelta mide $360°$, entonces el ángulo que gira un punto del disco medirá $135 \times 360°$, esto es $48\,600°$, que equivale a 270π radianes.





Corita

Competencia	Temas
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Ángulo trigonométrico. Ángulos coterminales. Sistema sexagesimal. Sistema centesimal. Sistema radial. Relación entre los tres sistemas de medidas angulares. Sector circular. Longitud de arco. Área del sector circular. Área del trapecio circular. Aplicaciones de la longitud de arco.
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Propiedades fundamentales de las razones trigonométricas. Razones trigonométricas recíprocas. Razones trigonométricas de ángulos complementarios. Resolución de triángulos rectángulos. Estudio del triángulo pitagórico. Razones trigonométricas de ángulos notables. Aplicación de triángulos rectángulos. Ángulos horizontales.

ENFOQUE AMBIENTAL

Valor	Actitudes que suponen
Solidaridad planetaria y equidad intergeneracional	Disposición para colaborar con el bienestar y la calidad de vida de las generaciones presentes y futuras, así como la naturaleza asumiendo el cuidado del planeta.

Recupera saberes previos



Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:

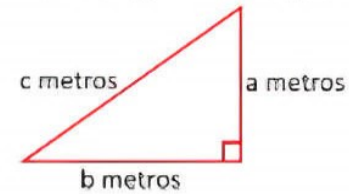
1 En el sistema sexagesimal un ángulo mide 60°. ¿Cuánto medirá dicho ángulo en un sistema donde el ángulo de una vuelta mide 300 grados N?

Marca la respuesta.

80 grados N | 50 grados N | 42 grados N

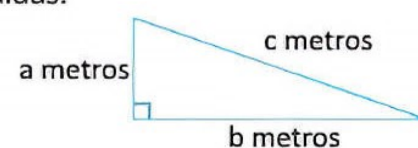
2 Un ángulo recto mide 90° en el sistema sexagesimal. ¿ Cuánto medirá dicho ángulo en un sistema donde el ángulo de una vuelta mide 420 grados R?

3 Observa el triángulo rectángulo.



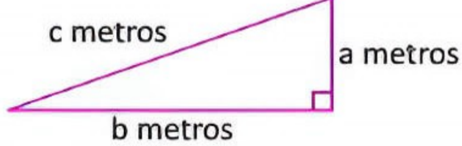
Si $\frac{a}{b} = 0{,}75$, ¿cuál es una medida para c?

4 En el triángulo rectángulo se indican sus medidas.



Si $\frac{a}{b} = 0{,}333...$, ¿cuál es el valor de $\frac{b}{a}$?

5 El triángulo presenta sus medidas.



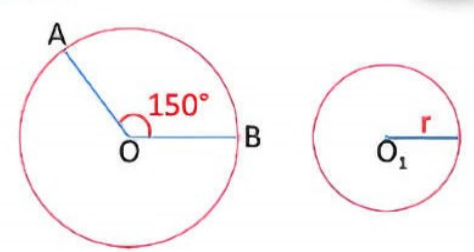
Se sabe que $\frac{b}{a} = 2{,}4$

a. ¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b}$?

b. ¿Cuál es el valor de $\frac{c}{a}$?

c. ¿Cuál es el valor de $\frac{c}{b}$?

6 El radio de la circunferencia mayor mide 12 m. La longitud del arco menor AB es igual a la longitud de la circunferencia pequeña.

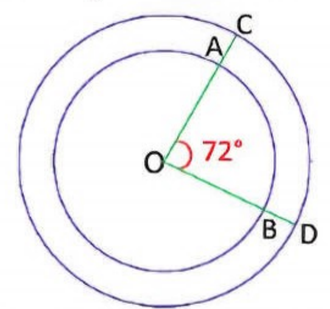


a. ¿Cuál es la longitud del arco menor AB?

b. ¿Cuál es la medida del radio r?

7 En las circunferencias concéntricas.

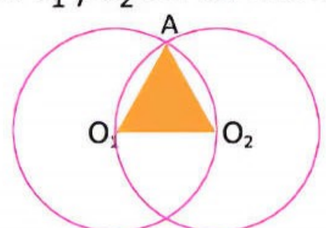
OA = 6 m y AC = 3 m.



a. ¿Cuál es la longitud del arco AB?

b. ¿Cuál es la longitud del arco CD?

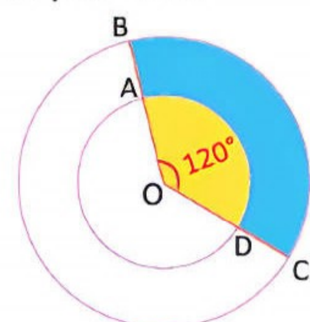
8 El radio de las dos circunferencias mide 24 cm. Los puntos O_1 y O_2 son los centros.



¿Cuál es el área de la región triangular O_1AO_2?

9 En las circunferencias concéntricas

OA = 4 m y AB = 5 m.



a. ¿Cuál es el área del sector circular AOD?

b. ¿Cuál es el área del sector circular BOC?

c. ¿Cuál es el área del trapecio circular ABCD?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa su comprensión del ángulo trigonométrica positivo y negativo, cuando considera el sentido de giro (antihorario un horario) de los ángulos al resolver problemas que presentan sus medidas en función incognita.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Emplea $\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$ para expresar una medida en grados sexagesimales, en grados centesimales o radianes, y $\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}=K$ cuando la condición de un problema lo exige.

Ángulo Trigonométrico

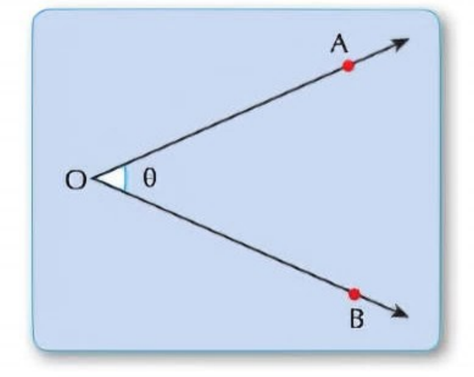
Ángulo Trigonométrico

Cuando nos referimos al ángulo trigonométrico tenemos que recurrir a un efecto comparativo con el ángulo geométrico, para la mejor comprensión del alumno.

I. La geometría plana

Ha definido al ángulo como la abertura determinada por dos rayos a partir de un mismo punto.

Para su mejor ilustración, veamos el gráfico siguiente:



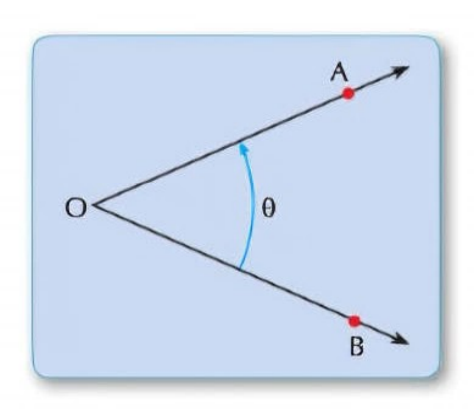
Características:

1. Son estáticos (no tienen movimiento.)
2. No tienen sentido de giro, por lo tanto no se puede hablar de ángulos negativos ya que todos son positivos.
3. Por no tener movimiento, están limitados en su magnitud; o sea:

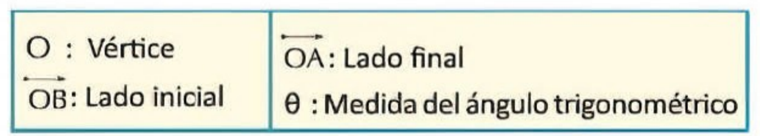
$$0° \leq \text{ángulo geométrico} \leq 360°$$

II. La trigonometría plana

Ha definido al ángulo como el que se genera por el movimiento de rotación de un rayo alrededor de su origen, desde una posición inicial hasta una posición final. La amplitud de la rotación es la medida del ángulo trigonométrico. La posición final se llama lado terminal, y el origen del rayo se llama vértice del ángulo.




Donde:



O : Vértice	$\overleftrightarrow{OA}$: Lado final
$\overleftrightarrow{OB}$: Lado inicial	θ : Medida del ángulo trigonométrico

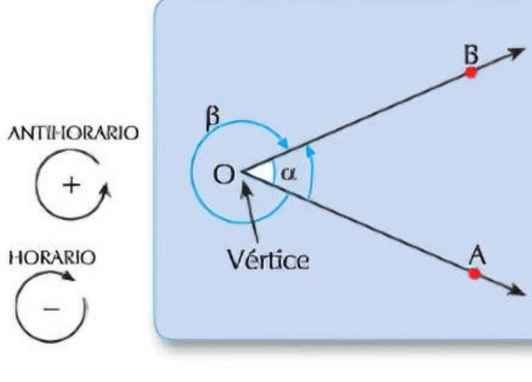
Características:

1. Son móviles (requieren rotación para su formación).
2. Su sentido de giro, está definido así.

   Para su mejor comprensión, veamos el siguiente gráfico:

   → α Es un ángulo positivo (sentido antihorario)

   → β Es un ángulo negativo (sentido horario)



3. Su magnitud, no tiene límites.

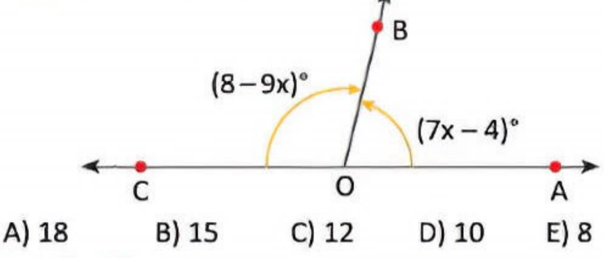


Luego: $-\infty <$ ángulo trigonométrico $< +\infty$

Ejercicios resueltos

Sobre ángulos trigonométricos

1 A partir del gráfico, calcula el valor de "x".



A) 18 B) 15 C) 12 D) 10 E) 8

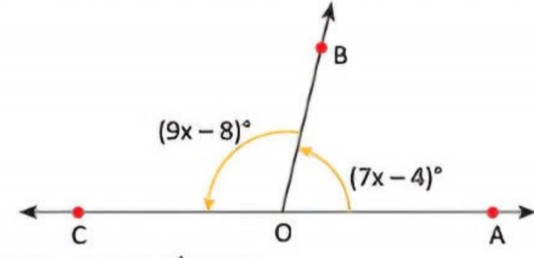
Resolución

- Del gráfico observamos que:

  ∢ AOB es (+)

  ∢ COB es (–)

  Entonces, cambiamos el sentido de giro del ∢COB:

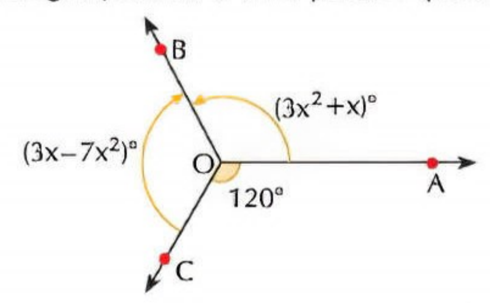


- Luego se cumple que:

$$(7x-4)^\circ + (9x-8)^\circ = 180^\circ$$
$$7x - 4 + 9x - 8 = 180$$
$$16x = 192$$
$$x = 12$$

Rpta. C

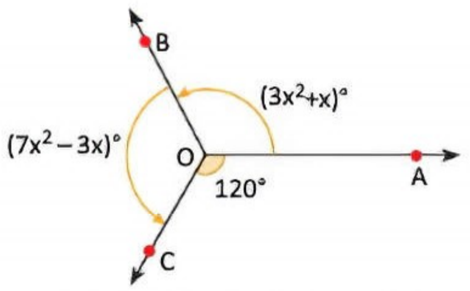
2 De la figura, calcula el valor positivo que toma "x".



A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Resolución

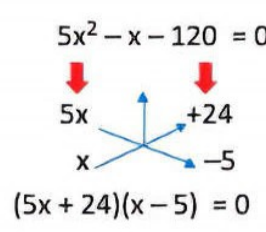
- Cambiamos el sentido de giro del ∢COB por ser negativo:



- Entonces: $(3x^2 + x)^\circ + (7x^2 - 3x)^\circ + 120^\circ = 360^\circ$

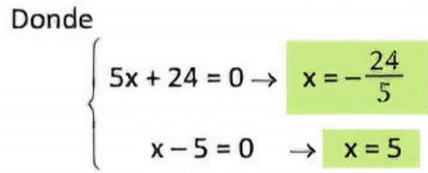
$$3x^2 + x + 7x^2 - 3x + 120 = 360$$
$$10x^2 - 2x - 240 = 0$$

$$5x^2 - x - 120 = 0$$



$$(5x + 24)(x - 5) = 0$$

Donde



$$\begin{cases} 5x + 24 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{24}{5} \\ x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \end{cases}$$

- Por condición del problema "x" es positivo, entonces:

$x = 5$ **Rpta.** D

3 De la figura, indica qué relación existe entre α, β y θ.

A) $\alpha - \beta - \theta = 720°$

B) $\alpha + \beta - \theta = 360°$

C) $\beta - \alpha + \theta = 360°$

D) $\theta - \alpha - \beta = -720°$

E) $\beta + \theta - \alpha = -360°$

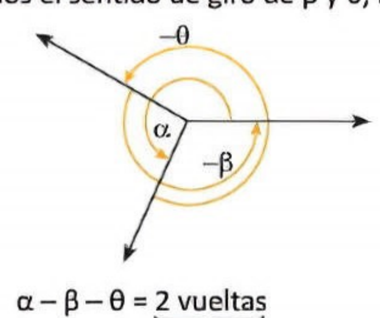
Resolución

- Del gráfico observamos que: α es (+)

β es (–)

θ es (–)

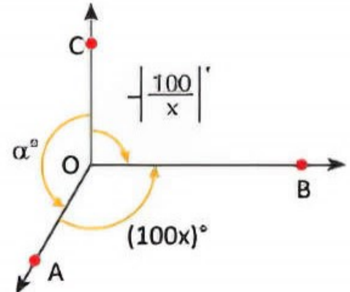
- Cambiamos el sentido de giro de β y θ, luego:



$$\alpha - \beta - \theta = \underbrace{2 \text{ vueltas}}_{360°}$$

$\therefore \alpha - \beta - \theta = 720°$ **Rpta.** A

4 De la figura, halla el máximo valor que puede tomar "α", si $x \in \mathbb{R}^+$.



A) 180 B) 160 C) 150 D) 135 E) 120

Resolución

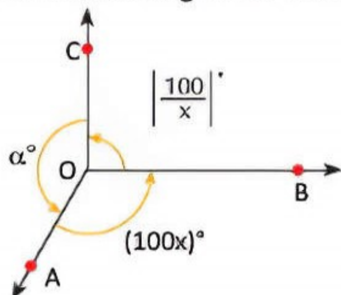
- En la figura se observa que:

∢AOB es (+) → x es (+)

∢COB es (–)

∢COA es (+)

- Cambiamos el sentido de giro del ∢COB, luego:



- Se cumple que: $\alpha° + (100x)° + \left|\dfrac{100}{x}\right|° = 360°$

$$\alpha + 100x + \frac{100}{x} = 360$$

$$\underbrace{\alpha}_{\text{máximo}} = 360 - 100\underbrace{\left|x + \frac{1}{x}\right|}_{\text{mínimo}=2} \ldots (1)$$

- Recordemos que: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$x + \dfrac{1}{x} \leq 2$; $\forall x \in \mathbb{R}^-$

- Luego en (1): $\alpha_{máximo} = 360 - 100(2)$

$\alpha_{máximo} = 160$ **Rpta.** B

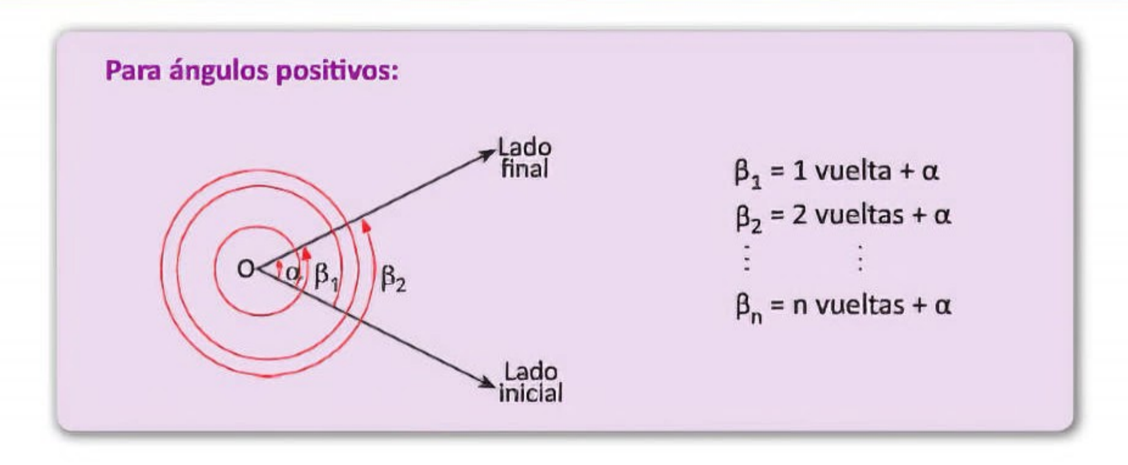
Ángulos coterminales o cofinales

Hablar de ángulos coterminales o cofinales, significa demostrar el porqué los ángulos trigonométricos no tienen límites en su magnitud.

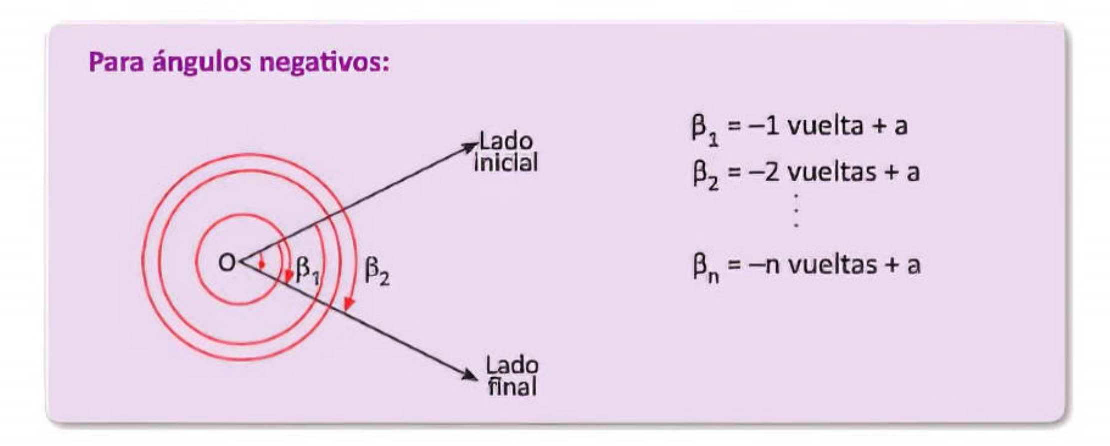
Se denominan ángulos coterminales, a aquellos ángulos que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal, diferenciándolos solamente del número de vueltas.

Para su mejor comprensión, veamos algunos ángulos coterminales con relación al ángulo "α".

Para ángulos positivos:



Para ángulos negativos:



- Entonces podemos concluir que: ∢ s coterminales de α = n vueltas + α $n \in \mathbb{Z}$.

- En general:

  Siendo α y β dos ángulos coterminales, se cumple que:

$$\alpha - \beta = 360°n \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$



A partir de la definición de ángulos coterminales se deduce que si dos ángulos son coterminales, entonces sus medidas se diferencian en un número entero de vueltas.

Ejercicios resueltos

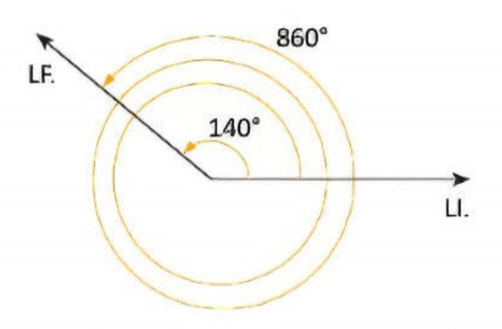
1 Señala si los ángulos 140° y 860° son coterminales.

Resolución

- Recordemos que si dos ángulos son coterminales, entonces su diferencia es un número entero de vueltas, luego:

  860° - 140° = 720° = 2(360°) <> 2 vueltas

- Gráficamente:



∴ 140° y 860° son ángulos coterminales. **Rpta.**

2 Indica si los ángulos –285° y –1365° son coterminales.

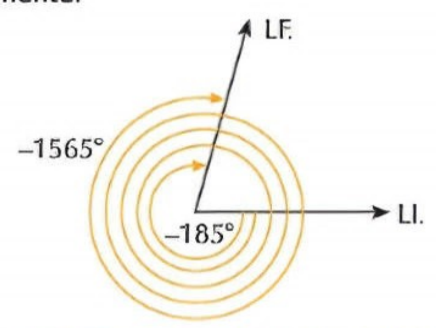
Resolución

- Aplicando el criterio establecido en el problema anterior, tenemos:

  $(-285°) - (-1365°) = 1080° = 3(360°) <> 3$ vueltas o también

  $(-1365°) - (-285°) = -1080° = 3(-360°) <> -3$ vueltas

- Gráficamente:



∴ **-285° y - 1365° son ángulos coterminales.** Rpta

3 Indica si los ángulos –420° y 1020° son coterminales.

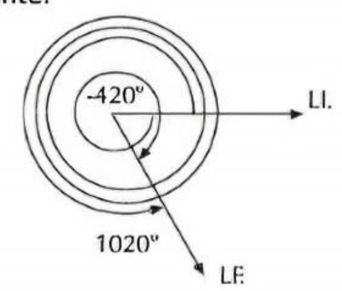
Resolución

- Aplicando el criterio establecido en los problemas anteriores:

  $(1020°) - (-420°) = 1440° = 4(360°) <> 4$ vueltas o también:

  $(-420°) - (1020°) = -1440° = 4(-360°) <> -4$ vueltas.

- Gráficamente:



∴ **-420° y 1020° son ángulos coterminales.** Rpta.

4 Averigua si los ángulos 120° y 930° son coterminales.

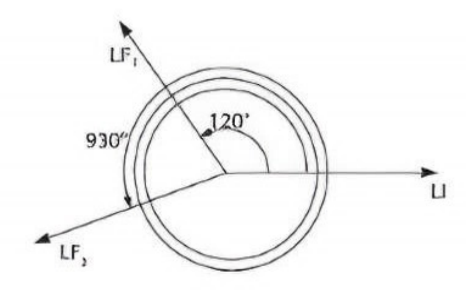
Resolución

- De acuerdo al criterio establecido:

  $$930° - 120° = 810° <> 2{,}25\ (360°)$$

  Observamos que la diferencia de dichos ángulos no es un número entero de vueltas.

- Gráficamente:



Se observa que tienen el mismo lado inicial (LI), pero no tienen el mismo lado final (LF_1 y LF_2)

∴ **120° y 930° no son ángulos coterminales.** Rpta.

5 Indica si los ángulos 510°, 870° y 1230° son coterminales.

Resolución

- Aplicamos el criterio establecido a dos pares de ángulos:

  i) $870° - 510° = 360° <> 1$ vuelta

  ∴ 870° y 510° son coterminales.

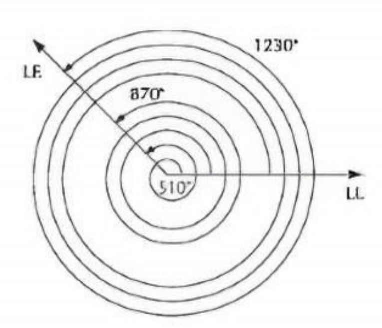
  ii) $1230° - 510° = 720° <> 2$ vueltas

  ∴ 1230° y 510° son coterminales.

  iii) De acuerdo a la propiedad transitiva podemos señalar que 870° y 1230° son coterminales

  → 510° ; 870° y 1230° son ángulos coterminales.

- Gráficamente:



Método práctico:

Este método consiste en dividir los ángulos dados entre 360°, si los residuos son iguales, entonces esto implica que los ángulos son coterminales.

- Aplicando el método en el problema tenemos:

510°	360°	870°	360°	1230°	360°
(150°)	1	(150°)	2	(150°)	3

∴ 510° ; 870° y 1230° son ángulos coterminales.

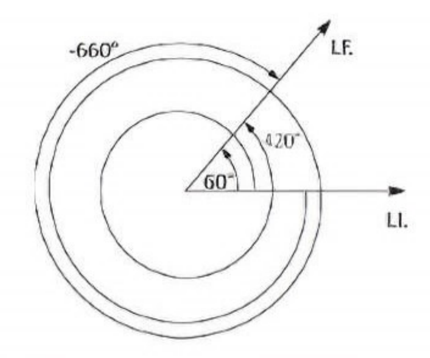
6 Señala si los ángulos: 60°; 420 y – 660° son coterminales.

Resolución

- Aplicando el método práctico indicado en el problema anterior, tenemos:

60°	360°	420°	360°	–660°	360°
0°	0	360°	1	–720°	–2
r = 60°		r = 60°		r = 60°	

- Gráficamente:



∴ 60° ; 420° y – 660° son ángulos coterminales. **Rpta.**

7 Dos ángulos coterminales son entre sí como 2 es a 11. Hallar la medida del mayor de dichos ángulos, si el menor se encuentra comprendido entre 90° y 180°.

A) 825° B) 858° C) 88° D) 902° E) 935°

Resolución

- Sean α y β ángulos coterminales tal que $\alpha < \beta$, entonces:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{11} \longrightarrow \beta = \frac{11}{2}\alpha \quad ... \ (1)$$

Además: $\beta = \alpha + 360°\, n$

$$\frac{11}{2}\alpha = \alpha + 360°\, n$$

$$\alpha = 80°\, n \ ; \ n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\alpha = \{80°, 160°, 240°, ...\}$$

pero: $90° < a < 180°$ $\therefore$ $a = 160°$

Reemplazando en (1): $\beta = \frac{11}{2}(160°)$

$\therefore$ $\beta = 880°$ **Rpta.**

8 La suma de dos ángulos coterminales es 1200°. Calcular la medida del mayor de ellos, si el menor se encuentra comprendido en el intervalo de –360° a –180°.

A) 1500° B) 1200° C) 1000° D) 900° E) 800°

Resolución

- Sean α y β dos ángulos coterminales tal que $\alpha > \beta$, entonces del enunciado:

$$\alpha + \beta = 1200° \quad ... \ (1)$$

- Por ser α y β ángulos coterminales se cumple que:

$$\alpha - \beta = 360°\ n \quad ... \ (2)$$

- Restando m. a m. (1) y (2):

$$2\beta = 1200° - 360°\, n$$

$$\beta = 600° - 180°\, n$$

- Pero: $-360° < \beta < -180°$

$$-360° < 600° - 180°\, n < -180°$$

$$-960° < -180° n < -780°$$

$$4{,}33 < n < 5{,}33$$

$$n \in \mathbb{Z} \rightarrow n = 5$$

- Luego: $\beta = 600° - 180°(5)$

$$\beta = -300°$$

- En (1): $\alpha + (-300°) = 1200°$

$a = 1500°$ **Rpta.**

Sistemas de Medidas Angulares

Introducción

Para realizar cualquier medición (longitud, masa, tiempo, ángulo, etc) se necesitará siempre una unidad de medida. En el caso de los ángulos, pueden existir diversos sistemas de medición, dependiendo en cuántas partes se divide el ángulo de una vuelta (unidad de medida).

Para nuestro estudio trabajaremos con tres sistemas de medición angular:

1. Sistema sexagesimal o Inglés.
2. Sistema centesimal o Francés.
3. Sistema radial o circular.



En el Sistema Internacional (S.I.) los ángulos se miden en radianes (rad).

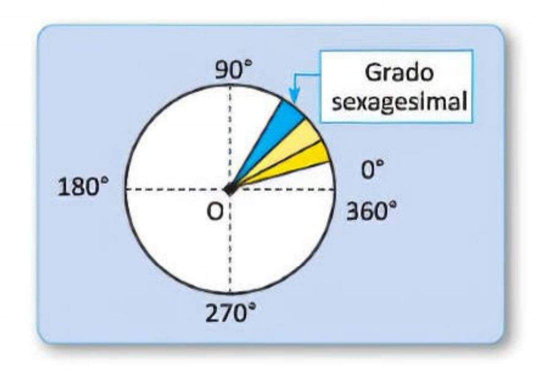
Sistema sexagesimal

Llamado también inglés, es aquel sistema cuya unidad de medida angular es el "grado sexagesimal" (°) que es igual a la 360 ava parte de 1 vuelta (una circunferencia).

Grado sexagesimal

Notación:

Grado sexagesimal ... 1°
Minuto sexagesimal ... $1'$
Segundo sexagesimal ... $1''$



Equivalencias:

1 circunferencia 360 ° < > 1 vuelta
1 circunferencia < > 4 cuadrantes
1 cuadrante < > 90°
$1^\circ <> 60'$
$1' <> 60''$
$1^\circ <> 3\,600''$



En este sistema la circunferencia se divide en 360 partes iguales.

1 Convierte 84°45'36" a grados sexagesimales.

Resolución:

- Tendremos en cuenta la siguiente equivalencia:

$$a' <> \frac{a^\circ}{60}$$

$$b'' <> \frac{b^\circ}{3600}$$

- Aplicamos:

$$84^\circ45'36'' \begin{cases} 84^\circ \\ 45' <> \dfrac{45^\circ}{60} = 0{,}75^\circ \\ 36'' <> \dfrac{36^\circ}{3600} = 0{,}01^\circ \end{cases}$$

- Luego: $84^\circ45'36'' <> 84^\circ + 45' + 36''$

$84^\circ45'36'' <> 84^\circ + 0{,}75^\circ + 0{,}01^\circ$

$\rightarrow$ $84^\circ45'36'' <> 84{,}76^\circ$

2 Convierte 16,5125° a grados, minutos y segundos sexagesimales.

Resolución:

- Recordemos la equivalencia:

$$a^\circ <> a \times 60'$$

$$b' <> b \times 60''$$

- Luego:

i) $16{,}5125^\circ <> 16^\circ + \underbrace{0{,}5125^\circ}$

ii) $0{,}5125^\circ <> 0{,}5125 \times 60'$

$<> 30{,}75'$

$<> 30' + \underbrace{0{,}75'}$

iii) $0{,}75' <> 0{,}75 \times 60''$

$<> 45''$

$\therefore$ $16{,}5125^\circ <> 16^\circ30'45''$

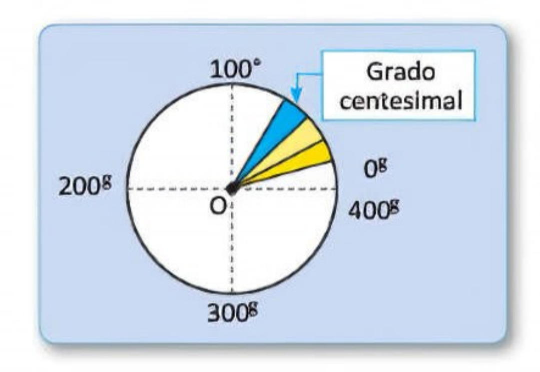
Sistema centesimal

Llamado también sistema francés, es aquel sistema que tiene como unidad de medida angular el grado centesimal (g), que es igual a la 400 ava parte del ángulo de una vuelta (una circunferencia).

Grado centesimal:

Notación:

- Grado centesimal ... 1g ó 1^g
- Minuto centesimal ... 1 m ó 1^m
- Segundo centesimal ... 1 s ó 1^s



Equivalencias:

1 circunferencia 400^g < >1 vuelta
1 circunferencia < > 4 cuadrantes
1 cuadrante < >100^g
1^g < >100^m
1^m < >100^s
1^g < >$10\,000^s$



NOTA

En este sistema la circunferencia se divide en 400 partes iguales.

1 Convertir $42^g 58^m 72^s$ a grados centesimales.

Resolución:

- En el sistema centesimal tenemos la siguiente regla práctica:

$$\overline{ab}^g\,\overline{cd}^m\,\overline{ef}^s <> \overline{ab,cdef}^g$$

- Aplicando:

$$42^g\,58^m\,72^s <> 42{,}5872^g$$

2 Expresa $38{,}7356^g$ en grados, minutos y segundos centesimales.

Resolución:

- Observa esta regla práctica que se cumple en el sistema centesimal:

$$\underbrace{ab}_{\text{grados}},\underbrace{cd}_{\text{minutos}}\underbrace{ef}_{\text{segundos}}{}^g <> ab^g cd^m ef^s$$

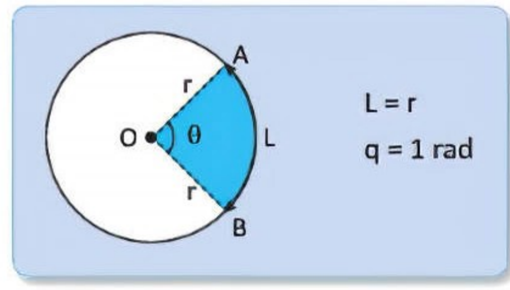
- Aplicando:

$$38{,}7356^g <> 38^g 73^m 56^s$$

Sistema radial

Llamado también sistema circular, es aquel sistema que tiene por unidad de medida el Radián (rad).

Un radián es la medida del ángulo central en una circunferencia que genera un arco cuya longitud tiene la misma medida que el radio de la circunferencia.





NOTA

Para los cálculos se puede considerar como valor aproximado de π:

$$\pi = 3{,}141592654... = 3{,}1416$$

También cuando el problema lo señala se puede tomar:

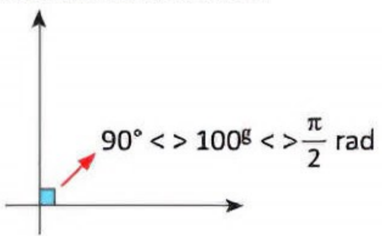
$$\pi = \frac{22}{7}$$
$$\pi = \frac{355}{113}$$
$$\pi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Equivalencias:

- 1 vuelta < > 2π rad
- 1 circunferencia < > 4 cuadrantes
- 1 cuadrante < > $\frac{\pi}{2}$ rad

Relación entre los tres sistemas de medidas angulares

Analizando un caso particular observamos que para un cuadrante tenemos:

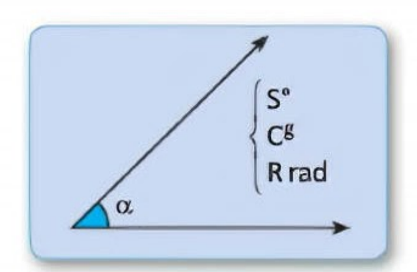


Pero, recordemos que un cuadrante representa 1/4 de vuelta, entonces:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{100^g}{400^g} = \frac{\frac{\pi}{2}\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}} = \frac{1}{4}\text{ vuelta}$$

De aquí observamos que los números que representan la medida del ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial serán diferentes entre sí, pero lo que sí permanece constante es la relación que nos indica qué parte del ángulo de una vuelta, es dicho ángulo.

Ahora, generalizamos:



$$S^\circ <> C^g <> R\text{ rad}$$

$$\frac{S^\circ}{360^\circ} = \frac{C^g}{400^g} = \frac{R\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}}$$

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Donde:

- S : n.° de grados sexagesimales.
- C : n.° de grados centesimales.
- R : n.° de radianes.

Ejercicios resueltos

1 Convierte 153° a grados centesimales.

Resolución

- Aplicando las fórmulas de conversión tenemos:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \begin{cases} S = 153^\circ \\ C = ? \end{cases}$$

- Reemplazando: $\frac{153}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow C = 170$

$\therefore$ $153^\circ <> 170^g$ **Rpta.**

2 Convierte 80^g a grados sexagesimales.

Resolución

- De la fórmula de conversión tenemos:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \begin{cases} S = ? \\ C = 80 \end{cases}$$

- Reemplazando: $\frac{S}{9} = \frac{80}{10} \Rightarrow S = 72$

$\therefore$ $80^g <> 72^\circ$ **Rpta.**



Para transformar la medida de un ángulo del sistema sexagesimal al centesimal o viceversa se puede emplear la equivalencia:

$9^\circ <> 10^g$

Ejemplos:

A
$$\begin{cases} 45^\circ <> 45^\circ\left[\frac{10^g}{9^\circ}\right] = 50^g \\ 99^\circ <> 99^\circ\left[\frac{10^g}{9^\circ}\right] = 110^g \end{cases}$$

B
$$\begin{cases} 210^g <> 210^g\left[\frac{9^\circ}{10^g}\right] = 189^\circ \\ 290^g <> 290^g\left[\frac{9^\circ}{10^g}\right] = 261^\circ \end{cases}$$

- En general:

$$A^\circ <> \frac{10A^g}{9} \qquad B^g <> \frac{9B^\circ}{10}$$

3 Convierte 84°30'36'' al sistema sexagesimal.

Resolución

- Recordemos:

$$84°30'36' \begin{cases} 84° \\ 30' <> \dfrac{30°}{60°} = 0{,}5° \\ 36'' <> \dfrac{36°}{3600} = 0{,}01° \end{cases}$$

84°30'36'' = 84° + 30' + 36'' = 84° + 0,5° + 0,01°

84°30'36'' < > 84,51°

- Luego: 84°30'36'' < > 84,51°

$$84°30'36'' <> \frac{10 \times 84{,}51^g}{9}$$

84°30'36'' < > 93,9^g

∴ 84°30'36'' < > 93^{g}90^m **Rpta.**

4 Convierte 56^{g}35^{m}71^s al sistema sexagesimal.

Resolución

- Recordemos: 56^{g}35^{m}71^s < > 56,3571^g
- Luego: $56^g35^m71^s <> \dfrac{9 \times 56{,}3571°}{10}$

56^{g}35^{m}71^s < > 50,72139 < > $\underline{50}$° + 0,72139°

0,72139×60' = 43,2834' = $\underline{43}$ + 0,2834'

0,2834 × 60'' = 17,004'' = $\underline{17}$'' + 0,004''

∴ 56^{g}35^{m}71^s < > 50°43'17'' **Rpta.**

5 Convierte 108° a radianes.

Resolución

- Usando la fórmula de conversión tenemos:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} S = 108 \\ R = ? \end{cases}$$

- Reemplazando: $\dfrac{108}{180} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow R = \dfrac{3\pi}{5}$

∴ $108° <> \dfrac{3\pi}{5}$ rad **Rpta.**

6 Convierte 250^g a radianes.

Resolución

- De la fórmula de conversión tenemos:

$$\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} C = 250 \\ R = ? \end{cases}$$

- Reemplazando: $\dfrac{250}{200} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow R = \dfrac{5\pi}{4}$

∴ $250^g <> \dfrac{5\pi}{4}$ rad **Rpta.**

7 Convierte $\dfrac{2\pi}{5}$ rad a grados radianes.

Resolución

- Aplicando las fórmulas de conversión tenemos:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} S = ? \\ R = \dfrac{2\pi}{5} \end{cases}$$

- Reemplazando: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{\frac{2\pi}{5}}{\pi} \Rightarrow S = 72$

∴ $\dfrac{2\pi}{5}$ rad < > 72° **Rpta.**

8 Convierte $\dfrac{3\pi}{25}$ rad a grados centesimales:

Resolución

- De la fórmula de conversión tenemos:

$$\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} C = ? \\ R = \dfrac{3\pi}{25} \end{cases}$$

- Reemplazando: $\dfrac{C}{200} = \dfrac{\frac{3\pi}{25}}{\pi} \Rightarrow C = 24$

∴ $\dfrac{3\pi}{25}$ rad < > 24^g **Rpta.**



NOTA

Para transformar la medida de un ángulo del sistema sexagesimal o centesimal al sistema radial, o viceversa, emplearemos la siguiente equivalencia:

π rad < > 180° < > 200^g

Ejemplos:

A
$$\begin{cases} 60° <> 60°\left[\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right] = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad} \\ 288° <> 288°\left[\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right] = \dfrac{8\pi}{5} \text{ rad} \end{cases}$$

B $\begin{cases} 40^g <> 40^g\left[\dfrac{\pi\ rad}{200^g}\right] = \dfrac{\pi}{5}\ rad \\ 300^g <> 300^g\left[\dfrac{\pi\ rad}{180^\circ}\right] = \dfrac{3\pi}{2}\ rad \end{cases}$

C $\begin{cases} \dfrac{5\pi}{4}\ rad <> \dfrac{5\times 180^\circ}{4} = 225^\circ \\ \dfrac{7\pi}{12}\ rad <> \dfrac{7\times 180^\circ}{12} = 105^\circ \end{cases}$

D $\begin{cases} \dfrac{5\pi}{8}\ rad <> \dfrac{5\times 200^g}{4} = 125^g \\ \dfrac{9\pi}{40}\ rad <> \dfrac{9\times 200^g}{40} = 45^g \end{cases}$

En general:

$$A^\circ <> \frac{A\pi}{180}\ rad$$

$$B^g <> \frac{B\pi}{200} rad$$

9 Convierte 11°15′ a radianes.

Resolución

- Recordemos:

$$11^\circ 15' \begin{cases} 11^\circ \\ 15' <> \dfrac{15^\circ}{60} = 0{,}25^\circ \end{cases}$$

$$11^\circ 15' = 11^\circ + 15' = 11^\circ + 0{,}25^\circ$$

$$11^\circ 15' <> 11{,}25^\circ$$

- Luego: $11^\circ 15' <> 11{,}25^\circ \left[\dfrac{\pi\ rad}{180^\circ}\right]$

$$\therefore\ 11^\circ 15' <> \frac{\pi}{16}\ rad$$ **Rpta.**

9 Convierte $50^g 50^m$ a radianes.

Resolución

- Tenemos: $50^g 50^m <> 50{,}50^g$
- Luego: $50^g 50^m <> 50{,}50^g\left[\dfrac{\pi\ rad}{200^g}\right]$

$$\therefore\ 50^g 50^m <> \frac{101\pi}{400}\ rad$$ **Rpta.**



Para hallar el número de minutos y segundos centesimales a partir de la coma decimal, hacia la derecha se separan en grupos de 2, siendo el primer grupo para los minutos y el segundo grupo para los segundos, veamos cómo se separan los grupos.

$C = 40{,}4630^g$

Primer grupo (# de minutos) | Segundo grupo (# de segundos)

Luego: $C = 40^g\ 46^m\ 30^s$

Ejercicios resueltos

Sobre sistemas de medidas angulares

1 Si $(x + 24)^\circ <> (x + 60)^g$, calcula el valor de "x".

A) 100 B) 150 C) 200
D) 250 E) 300

Resolución

- Recordemos:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \rightarrow \begin{cases} S = x + 24 \\ C = x + 60 \end{cases}$$

- Reemplazando: $\dfrac{x + 24}{9} = \dfrac{x + 60}{10}$

$$10x + 240 = 9x + 540$$

$x = 300$ **Rpta.** E

2 Simplifica la expresión:

$$P = \frac{5S + 4C}{3S - C}$$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

Resolución

- De la fórmula de conversión:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = n \rightarrow \begin{cases} S = 9n \\ C = 10n \end{cases}$$

- Reemplazando: $P = \dfrac{5(9n) + 4(10n)}{3(9n) - (10n)} = \dfrac{85\cancel{n}}{17\cancel{n}}$

$P = 5$ **Rpta.** B

3 Si $\frac{\pi}{64}$rad < > a°b'c'', halla E = (b – c) ^{a}.

A) 0 B) 1 C) 4
D) 9 E) 16

Resolución

- Expresamos el ángulo dado en el sistema sexagesimal:

i) $\frac{\pi}{64}$ rad < > $\frac{180°}{64}$ = 2,8125°
ii) 0,8125° < > 0,8125 × 60' = 48,75'
iii) 0,75' < > 0,75 × 60'' = 45''

$\therefore$ $\frac{\pi}{64}$ rad < > 2°48'45''

- Luego:

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=48 \\ c=45 \end{array}\right\} \quad E=(48-45)^2$$

E = 9 Rpta. D

4 Siendo S y C los números que representan la medida de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal respectivamente, que cumplen:

$$4S - 3C = 30$$

Halla la medida de dicho ángulo en radianes.

A) π rad B) $\frac{2\pi}{3}$ rad C) $\frac{3\pi}{4}$ rad
D) $\frac{\pi}{4}$ rad E) $\frac{\pi}{2}$ rad

Resolución

- Recordemos que:

$$\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi} \rightarrow \begin{cases} S=\frac{180\,R}{\pi} \\ C=\frac{200\,R}{\pi} \end{cases}$$

- En la condición: 4S – 3C = 30

$$4\left(\frac{180\,R}{\pi}\right)-3\left(\frac{200\,R}{\pi}\right)=30$$

$$\frac{720\,R}{\pi}-\frac{600\,R}{\pi}=30$$

$$\frac{120\,R}{\pi}=30$$

$R=\frac{\pi}{4}$ rad Rpta. D

5 Determina la medida de un ángulo en radianes, tal que verifique la siguiente condición:

$$\frac{SC}{S^2+C^2}=\frac{9}{181}(C-S)$$

A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{4}$ rad D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

Resolución

- Aplicando la relación:

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10} \rightarrow \begin{cases} S=9n \\ C=10n \end{cases}$$

- Reemplazando en la condición:

$$\frac{SC}{S^2+C^2}=\frac{9}{181}(C-S)$$

$$\frac{(9n)(10n)}{(9n)^2+(10n)^2}=\frac{9}{181}(10n-9n)$$

$$\frac{90n^2}{181n^2}=\frac{9}{181}n$$

$$n = 10$$

- Luego: i) S = 9n = 9 (10) = 90°

ii) $R=90°\left(\frac{\pi}{180°}\right)$

$R=\frac{\pi}{2}$ rad Rpta. A

6 Halla la medida de un ángulo expresado en radianes, tal que cumpla la siguiente condición:

$$\sqrt{\frac{SR}{20\pi}}+\sqrt{\frac{CR}{8\pi}}=1$$

Siendo S, C y R los números de grados sexagesimales, centesimales y radianes respectivamente.

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{9}$ C) $\frac{\pi}{8}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{5}$

Resolución

- De la fórmula de conversión:

$$\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}=K \rightarrow \begin{cases} S=180K \\ C=200K \\ R=\pi K \end{cases}$$

- Reemplazando en la condición:
- Luego:

$$\sqrt{\frac{(180K)(\pi K)}{20\pi}}+\sqrt{\frac{(200K)(\pi K)}{8\pi}}=1$$

$$\sqrt{9K^2}+\sqrt{25K^2}=1$$

$$3K + 5K = 1$$

$$K=\frac{1}{8}$$

$$R = \pi K = \pi\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{\pi}{8}}$$ **Rpta.** C

7 Halla la medida de un ángulo expresado en radianes, si se cumple que: $S = 3x^x$

$C = x^{x+1} + 9$

Donde S y C representan el número de grados sexagesimales y centesimales contenidos en un mismo ángulo.

A) $\frac{5\pi}{18}$ rad B) $\frac{4\pi}{15}$ rad C) $\frac{6\pi}{13}$ rad

D) $\frac{9\pi}{20}$ rad E) $\frac{8\pi}{25}$ rad

Resolución

- Tenemos que: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$
- Reemplazando en la condición:

$$\frac{3x^x}{9} = \frac{x^{x+1}+9}{10}$$

$$10x^x = 3x^{x+1} + 27$$

$$10x^x - 3x^x \cdot x = \underbrace{27}$$

$$x^x(10 - 3x) = 3^3(10 - 3 \cdot 3)$$

$$\therefore \quad x = 3$$

- Luego: i) $S = 3x^x = 3 \cdot 3^3 = 81$

ii) $R = 81\left(\frac{\pi}{180}\right)$

$$\boxed{R = \frac{9\pi}{20} \text{ rad}}$$ **Rpta.** D

8 Si se cumple que:

$$1 + \frac{S}{3} + \frac{C}{2} = \frac{160\,R}{\pi} + R$$

Determina la medida del ángulo en radianes si S, C y R representan el número de grados sexagesimales, centesimales y radianes respectivamente.

A) 0,25 rad B) 0,50 rad C) 0,75 rad D) 1 rad E) 2 rad

Resolución

- Reemplazando:

$$\begin{cases} S = 180K \\ C = 200K \\ R = \pi K \end{cases}$$

- En la condición:

$$1 + \frac{180K}{3} + \frac{200K}{2} = \frac{160\pi K}{\pi} + R$$

$$1 + 60K + 100K = 160K + R$$

$$1 + \cancel{160K} = \cancel{160K} + R$$

$$\boxed{R = 1 \text{ rad}}$$ **Rpta.** D

9 Los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son números pares consecutivos. Halla el complemento de dicho ángulo expresado en radianes.

A) $\frac{2\pi}{5}$ rad B) $\frac{2\pi}{3}$ rad C) $\frac{3\pi}{8}$ rad

D) $\frac{\pi}{8}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

Resolución

- Se observa que la diferencia de dos números pares consecutivos es siempre igual a 2, entonces del enunciado:

$$C - S = 2; \ (C > S)$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\frac{200R}{\pi} - \frac{180R}{\pi} = 2$$

$$\frac{20R}{\pi} = 2$$

$$\boxed{R = \frac{\pi}{10}}$$

- El complemento será:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \boxed{\frac{2\pi}{5} \text{ rad}}$$ **Rpta. A**

10 En la expresión:

$$5S\sqrt{S} - 3\sqrt[4]{S^3} = 296$$

Sabiendo que S representa un número entero de grados sexagesimales contenidos en un ángulo, halla la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{9\pi}{50}$ rad B) $\frac{8\pi}{25}$ rad C) $\frac{6\pi}{35}$ rad

D) $\frac{5\pi}{64}$ rad E) $\frac{4\pi}{45}$ rad

Resolución

- En la condición:

$$5\sqrt{S^3} - 3\sqrt[4]{S^3} - 296 = 0 \ ; \ x\sqrt{x} = \sqrt{x^3}$$

- Hacemos: $S^3 = a^4$ ... ❶

$$5\sqrt{a^4} - 3\sqrt[4]{a^4} - 296 = 0$$

$$5a^2 - 3a - 296 = 0$$

5a +37

a −8

$$(5a + 37)(a - 8) = 0$$

i) $5a + 37 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{37}{5}$ ¡No!

ii) $a - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 8$

- Reemplazando en ❶: $S^3 = 8^4$

$$S^3 = 2^{12}$$
$$S = 16$$

- Luego: $R = 16\left(\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow \boxed{R = \frac{4\pi}{45}\text{ rad}}$ **Rpta.** E

11 Calcula el valor de "α" expresado en radianes:
$a = 180° + 90° + 45° + 22°30' + 11°15' + ...$

A) 6π rad B) 5π rad C) 4π rad

D) 3π rad E) 2π rad

Resolución

- Expresando "α" en radianes:

$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} + ...$$

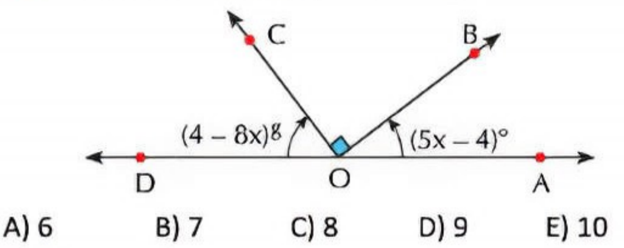
- Multiplicando ambos miembros de la igualdad por 2:

$$2\alpha = 2\pi + \underbrace{\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + ...}_{\boxed{\alpha}}$$

$$2\alpha = 2\pi + \alpha$$

$\boxed{\alpha = 2\pi \text{ rad}}$ **Rpta.** E

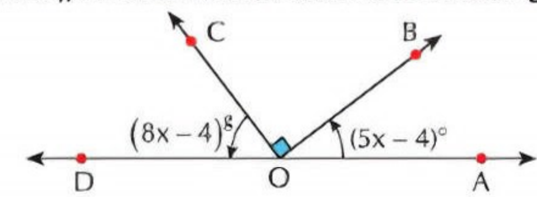
12 Del gráfico mostrado, calcula "x".



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Resolución

- Se observa que el ∢ DOC es negativo (giro en sentido horario), entonces cambiamos su sentido de giro:



- Además:

$$(8x-4)^g <> (8x-4)^g\left(\frac{9°}{10^g}\right) = \left(\frac{36x-18}{5}\right)°$$

- Del gráfico, se observa:

$$(5x-4)° + \left(\frac{36x-18}{5}\right)° = 90°$$

$$25x - 20 + 36x - 18 = 450$$

$$61x = 488$$

$\boxed{x = 8}$ **Rpta.** C

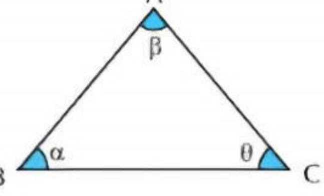
13 En un triángulo sus ángulos están en progresión aritmética de razón 20°. Halla la diferencia del mayor y menor en radianes.

A) $\frac{2}{9}\pi$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{9}$ rad

D) $\frac{5}{18}\pi$ rad E) $\frac{7}{9}\pi$ rad

Resolución

- Como los tres ángulos del triángulo, están en progresión aritmética de razón 20°, estos estarán representados de la siguiente manera:



Primer ángulo:
α (ángulo menor).

Segundo ángulo:
$\beta = \alpha + 20°$

Tercer ángulo:
$\theta = \alpha + 40°$ (ángulo mayor)

Por propiedad: $\alpha + \beta + \theta = 180°$

$a + (a + 20°) + (a + 40°) = 180°$

$$3a + 60° = 180° \rightarrow 3a = 180° - 60°$$

$$3a = 120° \rightarrow a = \frac{120°}{3} = 40°$$

ángulo menor

- Ahora, calculamos el valor del ángulo mayor:

$$a + 40° = 40° + 40° = 80°$$

∴ ángulo mayor = 80°

- Incógnita:

Ángulo mayor - Ángulo menor = 80° - 40° = 40°

- Convertimos los 40° a radianes, veamos:

$$40° = 40° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$

$\boxed{40 = \frac{2}{9}\pi \text{ rad}}$ **Rpta.** A

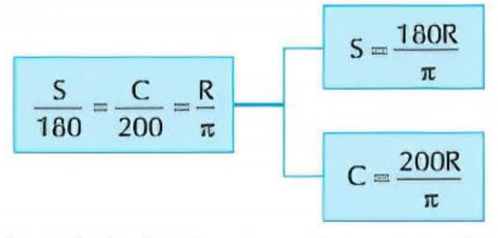
14 Se ha medido un ángulo en grados S; grados C y en radianes R. Halla lo que mide dicho ángulo en radianes. Si $2S - C = 2R^2$.

A) π rad B) 80 rad C) $\frac{180}{\pi}$ rad

D) $\frac{80}{\pi}$ rad E) $\frac{8}{\pi}$ rad

Resolución

- Por fórmula:



- Los valores hallados, los reemplazamos en la expresión:

$$2S-C=2R^2 \rightarrow 2\left(\frac{180R}{\pi}\right)-\left(\frac{200R}{\pi}\right)=2R^2$$

$$\frac{160R}{\pi}=2R^2 \rightarrow \frac{80}{\pi}=R$$

$R=\frac{80}{\pi}$ rad **Rpta.** D

15 Calcula "n".

Si $\underbrace{C+S+C+S+C+S+.....+C+S}_{\text{"2n" sumandos}}=3800\frac{R}{\pi}$

A) 1 B) 10 C) 30 D) 40 E) 50

Resolución

- Como en el primer miembro de la expresión hay "2n" sumandos, esto quiere decir que hay la mitad de términos para cada sistema, o sea:

$$\underbrace{C+C+C+...+C}_{\text{"n" sumandos}}+\underbrace{S+S+S+...+S}_{\text{"n" sumandos}}=3800\frac{R}{\pi}$$

$$Cn+Sn=3800\frac{R}{\pi}$$

$$n(C+S)=3800\frac{R}{\pi} \;...\; ❶$$

- De la fórmula:

$\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$ → $S=\frac{180R}{\pi}$; $C=\frac{200R}{\pi}$

- Los valores hallados los reemplazamos en ❶:

$$n\left(\frac{200R}{\pi}+\frac{180R}{\pi}\right)=3800\frac{R}{\pi}$$

$$n\left(\frac{380R}{\pi}\right)=\frac{3800R}{\pi}$$

$$n=\frac{3800}{380}$$

$n=10$ **Rpta.** B

16 Si los números de grados sexagesimales (S) y centesimales (C) que contiene un ángulo, se relacionan del siguiente modo:

$$C-S=x+\frac{1}{x} \;;\; x\in \mathbb{R}^+$$

¿Cuál es la medida del menor ángulo expresado en radianes que verifica la condición anterior?

A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{4}$ rad C) $\frac{\pi}{5}$ rad

D) $\frac{\pi}{10}$ rad E) $\frac{\pi}{20}$ rad

Resolución

- Recordamos:

$$\begin{cases} S=\frac{180R}{\pi} \\ C=\frac{200R}{\pi} \end{cases}$$

- En la condición:

$$\frac{200R}{\pi}-\frac{180R}{\pi}=x+\frac{1}{x}$$

$$\frac{20R}{\pi}=x+\frac{1}{x}$$

$$\underset{\text{mínimo}}{R}=\frac{\pi}{20}\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\text{mínimo}} \;...\; ❶$$

- Por propiedad de los números reales:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \;;\; \forall x\in \mathbb{R}^+$$

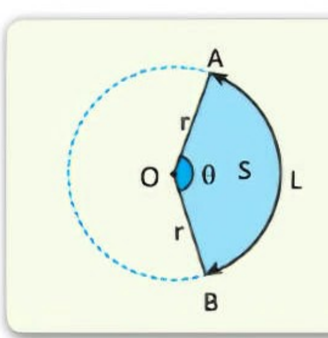
- Luego, en ❶: $R=\frac{\pi}{20}(2)$

$R=\frac{\pi}{10}$ rad **Rpta.** D

Longitud de arco, área de un sector circular y sus aplicaciones

Sector circular

Un sector circular es aquella región limitada por dos radios y un arco en una circunferencia.



θ : ángulo central.

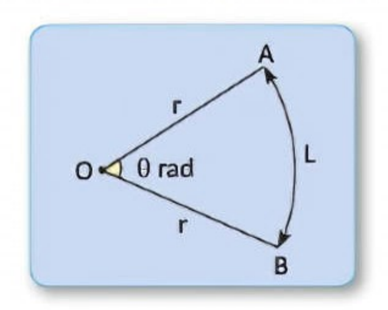
r : radio.

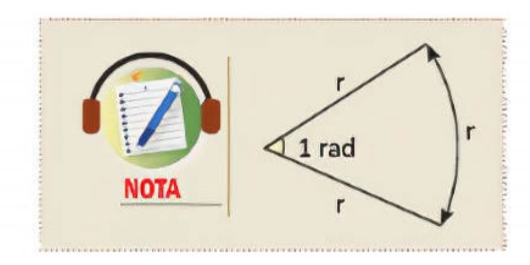
L : longitud del arco AB.

S : área del sector circular AOB.

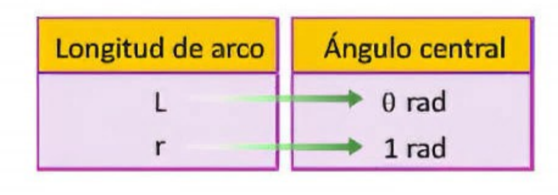
Longitud de arco

Es la medida del arco expresado en unidades lineales (cm, m, km, ...).





A partir del gráfico podemos deducir que la longitud de arco (L) y el ángulo central (θ) son magnitudes directamente proporcionales, luego:



Longitud de arco	Ángulo central
L →	θ rad
r →	1 rad

$$\frac{L}{r} = \frac{\theta \text{ rad}}{1 \text{ rad}} \quad \therefore \quad \boxed{L = \theta r}$$

Ejemplo 1

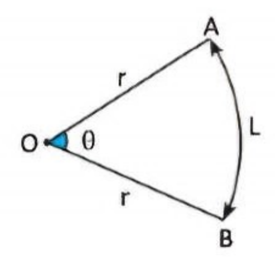
Halla la longitud de arco de un sector circular, si el ángulo central mide 60° y el radio 21 m. $\left(\text{tomar } \pi = \frac{22}{7}\right)$.

Resolución:

- De acuerdo al enunciado:

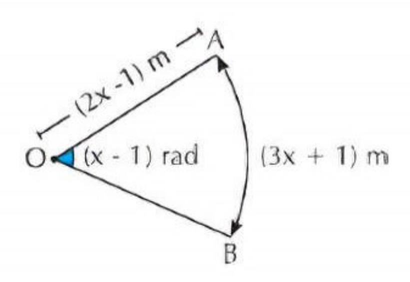
$$\begin{cases} \theta = 60^\circ <> \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ r = 21\text{m} \end{cases} \rightarrow L = \frac{\pi}{3} \times 21$$

$$L = 7\pi = 7\left[\frac{22}{7}\right] \quad \therefore \quad L = 22 \text{ m}$$





De la figura, halla "x"



Resolución:

- Sabemos que: $L = \theta r$
- Reemplazando: $3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$

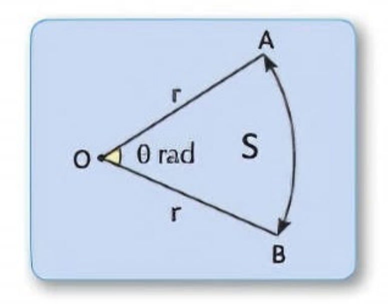
$$3x + 1 = 2x^2 - 3x + 1$$
$$2x^2 - 6x = 0$$
$$2x(x - 3) = 0$$

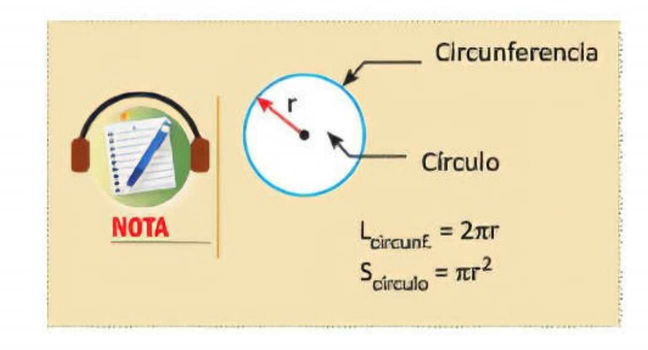
i) $2x = 0 \rightarrow x = 0$ ¡No!

ii) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ $\quad \therefore$ $x = 3$

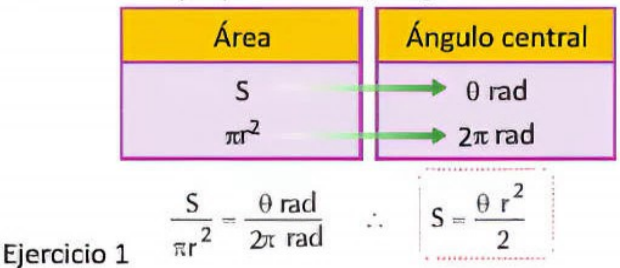
Área del sector circular

Es la medida del área de un sector del círculo expresado en unidades lineales al cuadrado (cm^2; m^2; km^2; ...).





A partir de la figura podemos deducir que, el área del sector circular (S) y el ángulo central (θ) son magnitudes directamente proporcionales, luego:



Área	Ángulo central
S	θ rad
πr^2	2π rad

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \quad \therefore \quad S = \frac{\theta r^2}{2}$$

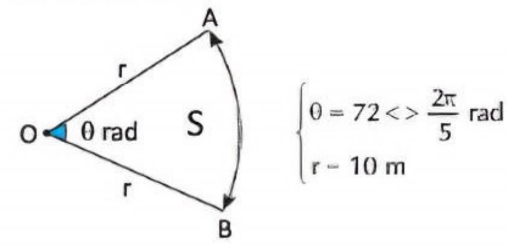
Ejercicio 1

Ejemplo 1

Halla el área de un sector circular sabiendo que el radio mide 10 m y el ángulo central es de 72°.

Resolución:

- Del enunciado:



$$\begin{cases} \theta = 72 <> \frac{2\pi}{5} \text{ rad} \\ r = 10 \text{ m} \end{cases}$$

- Aplicamos:

$$S = \frac{\theta r^2}{2}$$

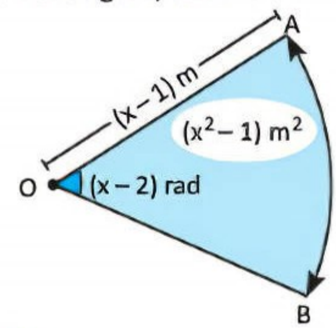
- Reemplazando:

$$S = \frac{\frac{2\pi}{5} \cdot (10)^2}{2}$$

$$\therefore \quad S = 20\pi \text{ m}^2$$

Ejemplo 2

A partir de la figura, halla "x".



Resolución:

- Aplicamos: $S = \dfrac{\theta r^2}{2}$

- Reemplazando:

$$x^2 - 1 = \frac{(x-2)(x-1)^2}{2}$$

$2(x-1)(x+1) - (x-2)(x-1)^2 = 0$

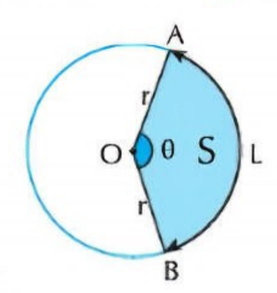
$(x-1)[2(x+1) - (x-2)(x-1)] = 0$

$(x-1)(5x - x^2) = 0$

$x(x-1)(5-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ¡No!} \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ¡No!} \\ 5 - x = 0 \rightarrow x = 5 \end{cases}$

$\therefore$ $x = 5$

Relaciones básicas entre "S" y "L"



Recordemos:

$L = \alpha r$ ... ❶

$S = \dfrac{\alpha r^2}{2}$ ... ❷

- En ❷: $S = \dfrac{\alpha r \cdot r}{2}$

Reemplazando ❶:

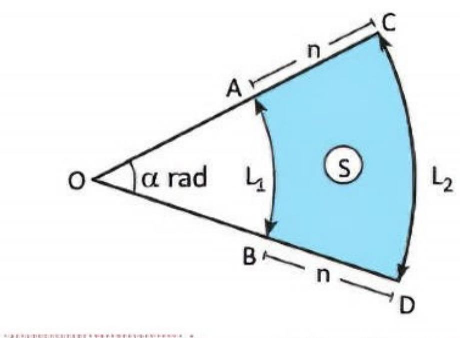
$S = \dfrac{Lr}{2}$ **(Fórmula)**

- En ❷: $S = \dfrac{\alpha r^2 \cdot \alpha}{2 \cdot \alpha} = \dfrac{(\alpha r)^2}{2\alpha}$

Reemplazando ❶:

$S = \dfrac{L^2}{2\alpha}$ **(Fórmula)**

Área del trapecio circular



$S = \left[\dfrac{L_1 + L_2}{2}\right] n$

(Fórmula para calcular el área de un trapecio circular)

Demostración:

$S = \underbrace{S\triangleleft COD}_{} - \underbrace{S\triangleleft AOB}_{}$

$S = \dfrac{L_2^2}{2\alpha} - \dfrac{L_1^2}{2\alpha}$; ($m\measuredangle COD = \alpha$ rad)

$S = \dfrac{(L_2 + L_1)(L_2 - L_1)}{2\alpha}$

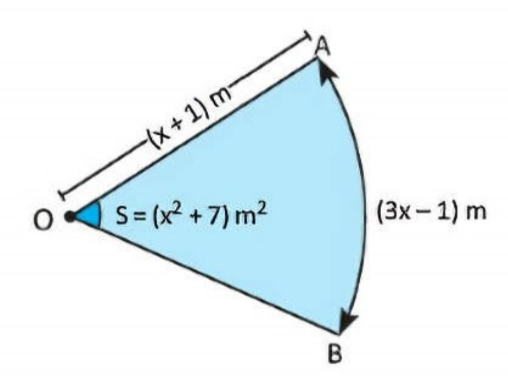
$S = \dfrac{L_2 + L_1}{2} \cdot \left(\dfrac{L_2}{\alpha} - \dfrac{L_1}{\alpha}\right)$

$S = \dfrac{(L_1 + L_2)}{2} \cdot (OC - OA)$; pero: $(OC - OA = n)$

$\therefore\ S = \left[\dfrac{L_1 + L_2}{2}\right] n$

Ejemplo 1

Del gráfico, halla "x".



Resolución:

- Aplicamos la relación: $S = \frac{Lr}{2}$
- Reemplazando:

$$x^2 + 7 = \frac{(3x-1)(x+1)}{2}$$

$$2x^2 + 14 = 3x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x+5)(x-3) = 0$$

$\rightarrow$ i) $x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$ ¡No!

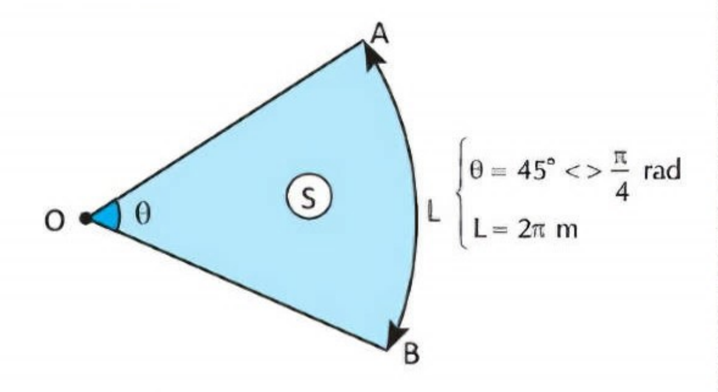
ii) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$\therefore$ $x = 3$

Ejemplo 2

Halla el área de un sector circular sabiendo que el ángulo central mide 45° y su longitud de arco es de 2π m.

Resolución:



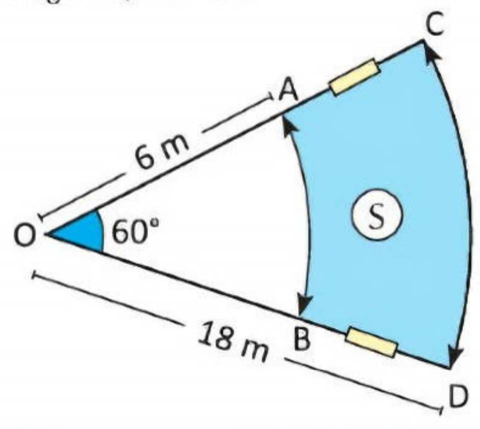
- Aplicamos:

$$S = \frac{L^2}{2\theta} \qquad S = \frac{(2\pi)^2}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4\pi^2}{\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore$ $S = 8\pi \text{ m}^2$

Ejemplo 3

A partir del gráfico, halla "S".



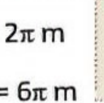
Resolución:

- De la figura, calculamos:

i) $L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi}{3} \cdot 6 = 2\pi$ m

ii) $L_{\widehat{CD}} = \frac{\pi}{3} \cdot 18 = 6\pi$ m

iii) AC = 18 m – 6 m = 12 m



NOTA

$60° <> \frac{\pi}{3}$ rad

- Aplicamos:

$$S = \left[\frac{L_1 + L_2}{2}\right]n \rightarrow \begin{cases} L_{\widehat{AB}} = L_1 = 2\pi \text{ m} \\ L_{\widehat{CD}} = L_2 = 6\pi \text{ m} \\ AC = n = 12 \text{ m} \end{cases}$$

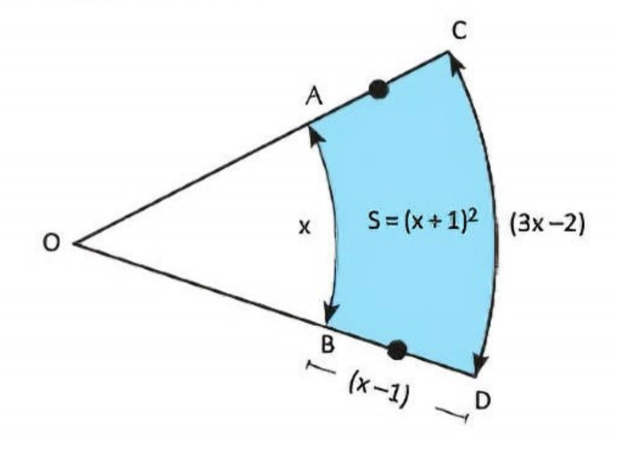
- Reemplazando:

$$S = \left[\frac{2\pi + 6\pi}{2}\right] \cdot 12$$

$\therefore$ $S = 48\pi \text{ m}^2$

Ejemplo 4

De la figura, halla "x".



Resolución:

- Aplicamos:

$$S=\left[\frac{L_1+L_2}{2}\right]n \rightarrow \begin{cases} S=(x+1)^2 \\ L_1=L_{AB}=x \\ L_2=L_{CD}=3x-2 \\ n=BD=x-1 \end{cases}$$

- Reemplazando:

$$(x+1)^2=\frac{(x+3x-2)}{2}(x-1)$$

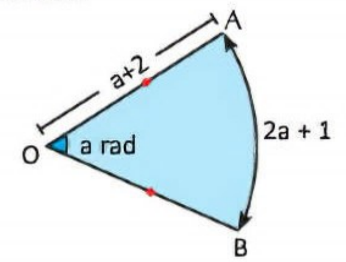
$$(x+1)^2=(2x-1)(x-1)$$
$$x^2+2x+1=2x^2-3x+1$$
$$x^2-5x=0$$
$$x(x-5)=0$$
$$\begin{cases} \text{i)}\ x=0\ \text{¡No!} \\ \rightarrow \text{ii)}\ x-5=0 \rightarrow x=5 \end{cases} \qquad \therefore\ x=5$$

Ejercicios resueltos

Sobre longitud de arco y área del sector circular

1 De la figura mostrada, calcula el perímetro del sector circular AOB.

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10



Resolución

- Aplicamos la fórmula: $L=\theta r \begin{cases} L=2a+1 \\ \theta=a \\ r=a+2 \end{cases}$

- Reemplazando: $2a+1=a(a+2)$

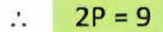
$$2a+1=a^2+2a$$
$$1=a^2 \qquad a=1$$

- Nos piden:

$2P=2(a+2)+2a+1$

$2P=4a+5$

$2P=4(1)+5$

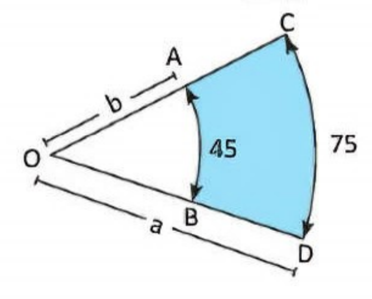

$\therefore$ $2P=9$ **Rpta.** D



2p: perímetro

2 A partir del gráfico, halla $E=\dfrac{a+b}{a-b}$

A) 4
B) 5
C) 6
D) 8
E) 10



Resolución

- Sea: $\measuredangle AOB=\measuredangle COD=\alpha$ rad

- En el sector COD: $L_{CD}=\measuredangle COD\cdot OD$

$75=\alpha\cdot a$ ... **1**

- En el sector AOB: $L_{AB}=\measuredangle AOB\cdot OB$

$45=\alpha\cdot b$ ... **2**

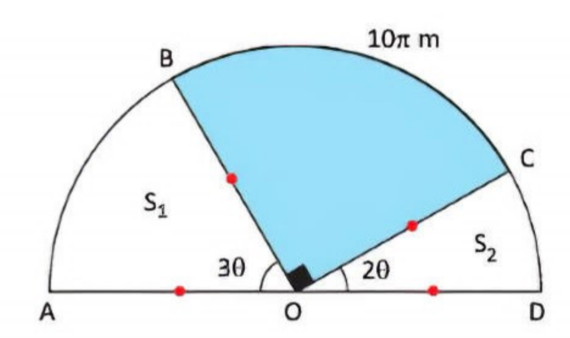
- Dividiendo m.a.m. **1** : **2**:

$$\frac{75}{45}=\frac{\alpha\cdot a}{\alpha\cdot b}$$
$$\frac{5}{3}=\frac{a}{b}$$
$$\frac{5+3}{5-3}=\frac{a+b}{a-b} \text{ (Prop. de proporciones)}$$

$\therefore$ $E=4$ **Rpta.** A

3 En la figura, halla S_1-S_2.

A) $2\pi\ m^2$ B) $24\pi\ m^2$ C) $20\pi\ m^2$ D) $18\pi\ m^2$ E) $15\pi\ m^2$



Resolución

- De la figura: $3\theta+2\theta=\frac{\pi}{2}$ rad

$$\theta=\frac{\pi}{10}\text{ rad}$$

- En el sector BOC: $L_{BC}=\measuredangle BOC\cdot OB$

$$10\pi=\frac{\pi}{2}\cdot r \qquad \therefore\ r=20\text{ m}$$

- En el sector AOB: $S_1 = \dfrac{\frac{3\pi}{10}\cdot 20^2}{2} \rightarrow S_1 = 60\pi\ m^2$
- En el sector COD: $S_2 = \dfrac{\frac{2\pi}{10}\cdot 20^2}{2} \rightarrow S_2 = 40\pi\ m^2$
- Finalmente: $S_1 - S_2 = 60\pi - 40\pi$

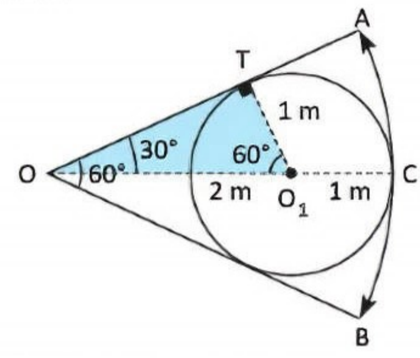
$\therefore$ $S_1 - S_2 = 20\pi\ m^2$ **Rpta.** C

4 En un sector circular de ángulo central 60° se inscribe una circunferencia de radio 1 m. Calcula la longitud de arco de AB.

A) 3π m B) π m C) $\frac{\pi}{3}$ m D) 1 m E) 3 m

Resolución

- Graficando:



- Trazamos OC, bisectriz del ∢ AOB
- Trazamos el radio $\overline{O_1T} \perp \overline{OA}$
- El ⊿ OTO_1 : es de 30° y 60°:

$O_1T = 1\ m \rightarrow OO_1 = 2\ m$

- Luego: $OC = OO_1 + O_1C$

$OC = 2\ m + 1\ m = 3\ m$

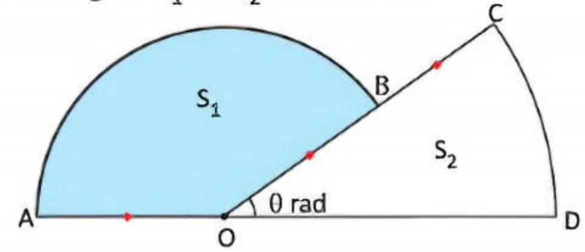
- Entonces:

$L_{AB} = \sphericalangle AOB \cdot OA$; $(OA = OC)$

$L_{AB} = \frac{\pi}{3}\cdot 3$

$\therefore$ $L_{AB} = \pi\ m$ **Rpta.** B

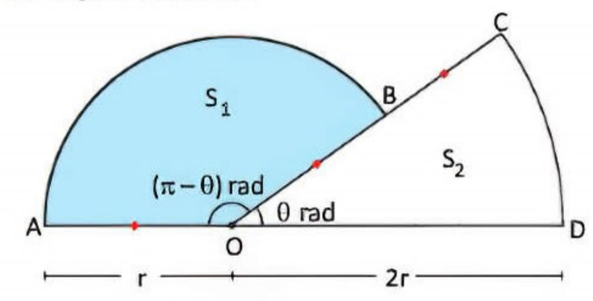
5 En la figura $S_1 = 2\,S_2$. Calcula "θ".



A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{9}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{6}$

Resolución

- En la figura notamos:



- Además: $S_1 = \dfrac{(\pi-\theta)r^2}{2}$

$S_2 = \dfrac{\theta(2r)^2}{2} = 2\theta r^2$

- De la condición:

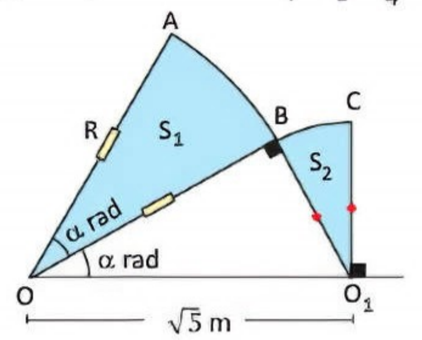
$S_1 = 2S_2$

$\dfrac{(\pi-\theta)r^2}{2} = 2\left(2\theta r^2\right)$

$\pi - \theta = 8\theta$


$\theta = \frac{\pi}{9}$ **Rpta.** C

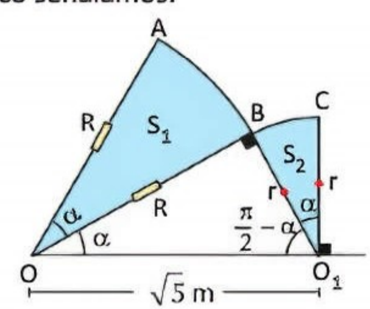
6 Del gráfico, halla "α". Si $S_1 + S_2 = \frac{\pi}{4}\ m^2$



A) $\frac{\pi}{16}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{10}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{4}$

Resolución

- En el gráfico señalamos:



- En el ◺ OBO_1:

$$R^2 + r^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$ teorema de Pitágoras

$$R^2 + r^2 + 5 \ ... ❶$$

- De la condición: $\underbrace{S_1} + \underbrace{S_2} = \frac{\pi}{4}$

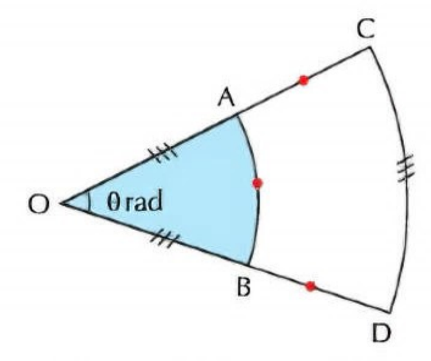
$$\frac{\alpha R^2}{2} + \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$a(R^2 + r^2) = \frac{\pi}{2} \ ... ❷$$

- Reemplazamos ❶ en ❷:

$$a(5) = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad a = \frac{\pi}{10}$$ **Rpta.** C

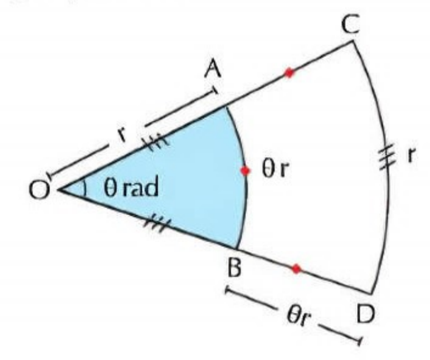
7 A partir de la figura, halla $E = \theta^2 + \theta + 2$



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución

- De la figura, se tiene:



- En el sector AOB: $L_{\overset{\frown}{AB}} = \theta r$
- En el sector COD: $\underbrace{L_{\overset{\frown}{CD}}} = \theta(r + \theta r)$

$$r = \theta r(1 + \theta)$$

$$1 = \theta + \theta^2$$

- Nos piden: $E = \underbrace{\theta^2 + \theta} + 2$

$$E = 1 + 2$$

$$\therefore \quad E = 3$$ **Rpta.** D

8 Del gráfico, halla el área de la región coloreada.

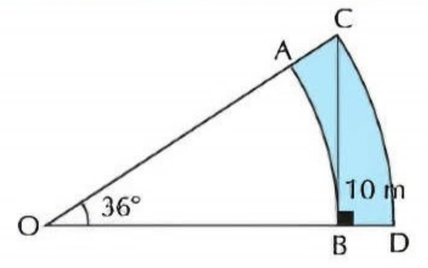
A) $2\pi \ m^2$

B) $4\pi \ m^2$

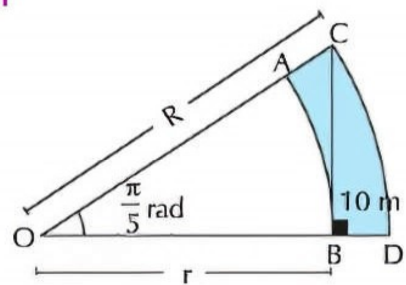
C) $5\pi \ m^2$

D) $8\pi \ m^2$

E) $10\pi \ m^2$



Resolución



- En el ◺ OBC: (Pitágoras)

$$R^2 = r^2 + 10^2$$

$$R^2 - r^2 = 100 \ ... ❶$$

- Además: $S_{color.} = S◁COD - S◁AOB$

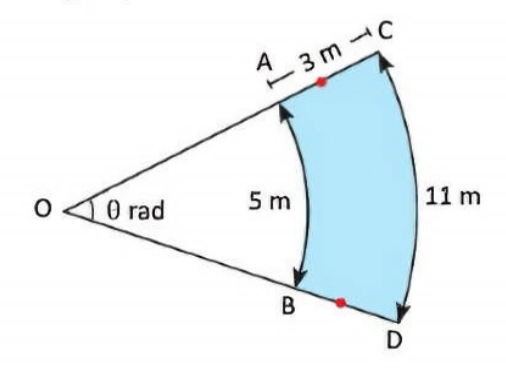
$$S_{color.} = \frac{\frac{\pi}{5} \cdot R^2}{2} - \frac{\frac{\pi}{5} \cdot r^2}{2}$$

$$S_{color.} = \frac{\pi}{10}(R^2 - r^2) \ ... ❷$$

- Reemplazamos ❶ en ❷:

$$S_{color.} = \frac{\pi}{10}(100) \quad \therefore \quad S_{color.} = 10\pi \ m^2$$ **Rpta.** E

9 En la figura, halla "θ".



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución

- Sea: OA = OB = r
- En el sector AOB: $L_{\overset{\frown}{AB}} = \theta \cdot OA$

$$5 = \theta \cdot r \quad ... ❶$$

- En el sector COD: $L_{\overset{\frown}{CD}} = \theta \cdot OC$

$$11 = \theta(r + 3)$$

$$11 = \theta r + 3\theta \; ... \; ❷$$

- Reemplazamos ❶ en ❷: $11 = 5 + 3\theta$

$$6 = 3\theta \;\therefore\; \boxed{\theta = 2}$$ **Rpta.**

⑩ Halla la medida del radio de un sector circular de 16 m de perímetro y cuya área es la máxima posible.

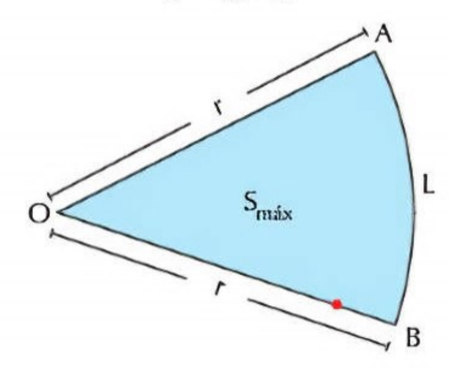
A) 4 m B) 6 m C) 8 m D) 10 m E) 12 m

Resolución

- De acuerdo al enunciado:

$$2r + L = 16$$

$$L = 16 - 2r$$



- Además:

$$S = \frac{Lr}{2}$$

$$S = \frac{(16 - 2r)r}{2}$$

$a \in \mathbb{R}$
$\rightarrow a^2 \geq 0$
$\therefore a^2_{min} = 0$

$$S = 8r - r^2$$

$$S = 16 - (r^2 - 8r + 16)$$

$$\underbrace{S}_{\text{Máximo}} = 16 - \underbrace{(r-4)^2}_{\text{Mínimo}\,=\,0}$$

$$r - 4 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{r = 4m}$$ **Rpta.**

Aplicaciones de longitud de arco

Número de vueltas de un sistema de ruedas

La rueda es un invento cuyo origen es difícil precisar, pero todo parece indicar que fueron los sumerios, alrededor del año 5 000 A.C. , a quienes les debemos este genial aporte.

Este invento, de gran importancia para el desarrollo de la civilización, es una pieza circular cuya función básica es el giro y muchas maquinarias modernas dependen de ello.



Rueda sumeria

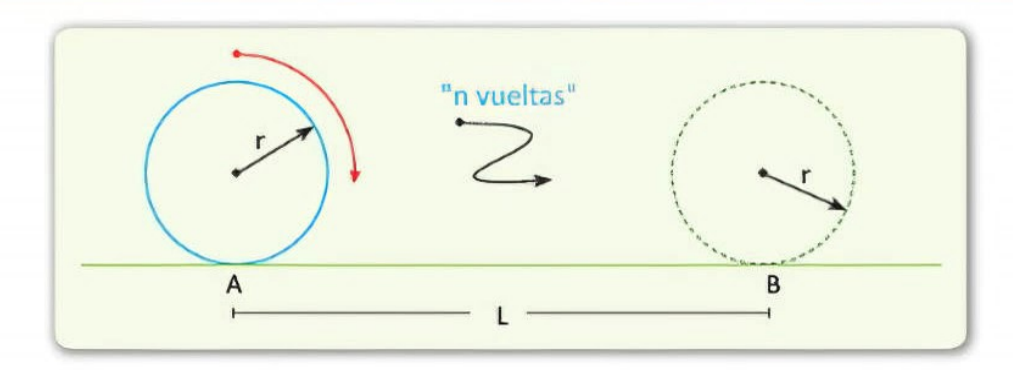
Número de vueltas de una rueda

Al rodar una rueda barre arcos cuya longitud está en función de su radio y el número de vueltas que da la rueda.

A continuación analizaremos cada uno de los casos que se presentan.

A. Rotación de una rueda sobre un plano:

Analicemos la siguiente situación: tenemos una rueda que rodará desde la posición "A" hasta "B" recorriendo una longitud "L".



i) Al dar una vuelta la rueda barre la longitud de su circunferencia , es decir: $2\pi r$.

ii) Si da "n" vueltas la rueda barrerá una longitud de "n" veces su circunferencia, es decir: $(2\pi r)n$

Entonces: $L = 2\pi rn$

o también: $n = \dfrac{L}{2\pi r}$

Donde:
- L: longitud de arco barrido por la rueda.
- r: radio de la rueda.
- n: número de vueltas que da la rueda.

Ejemplo:

Los radios de las ruedas de una bicicleta miden 50 cm y 40 cm. Si la bicicleta recorre una distancia de 80 m , ¿cuántas vueltas ha dado cada rueda?

Resolución:



Sea : N = número de vueltas que da la rueda de radio R.
n = número de vueltas que da la rueda de radio r.

i) $N_R = \dfrac{L}{2\pi R} \rightarrow N_R = \dfrac{80}{2(3{,}14)\cdot(0{,}5)} =$ **25,5 vueltas**

ii) $n_r = \dfrac{L}{2\pi r} \rightarrow n_r = \dfrac{80}{2(3{,}14)(0{,}4)} =$ **31,8 vueltas**

B. Rotación de una rueda sobre una superficie circular

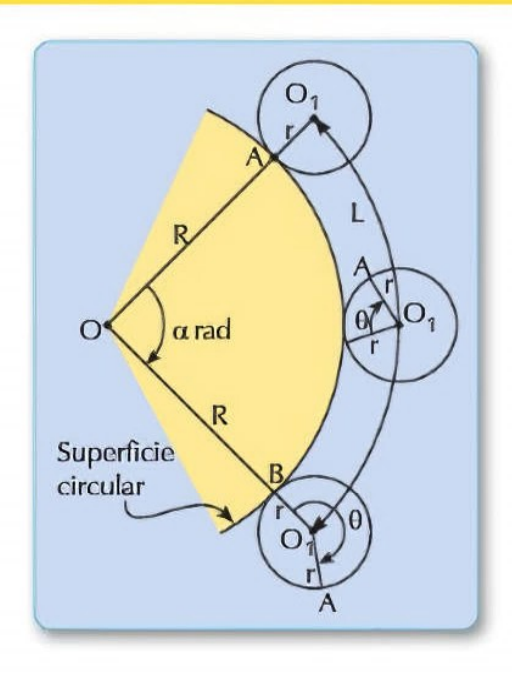
B.1 Si rota exteriormente:

Si una rueda de radio r se desplaza exteriormente sobre una superficie circular de radio R desde una posición inicial A hasta una posición final B, el punto A va ocupando diferentes posiciones, el ángulo central q irá variando desde 0°, el centro O_1 de la rueda recorre la longitud L, el punto A que se encuentra sobre la rueda irá describiendo un arco.

En la posición B, la longitud del arco descrito por el punto A es igual a la longitud L recorrida por el centro de la rueda.

$$L = L_{BA} \qquad \ldots ❶$$

Se sabe que:



$$L_{\overset{\frown}{BA}} = r \cdot \theta \qquad \ldots ❷$$

Usando la propiedad transitiva de ❶ y ❷:

$$\therefore \quad \boxed{L = r \cdot \theta} \qquad \ldots ❸$$

Usando la fórmula de la longitud del arco L de centro O, radio (R + r) y ángulo central α:

$$L = (R + r) \cdot \alpha \quad \ldots ❹$$

Por la propiedad transitiva de ❸ y ❹:

$$(R + r)a = r \cdot q \qquad \therefore \quad \boxed{\theta = \frac{(R+r)\alpha}{r}}$$

El número de vueltas n que da la rueda es:

$$n = \frac{\theta}{2\pi}$$

Reemplazo θ:

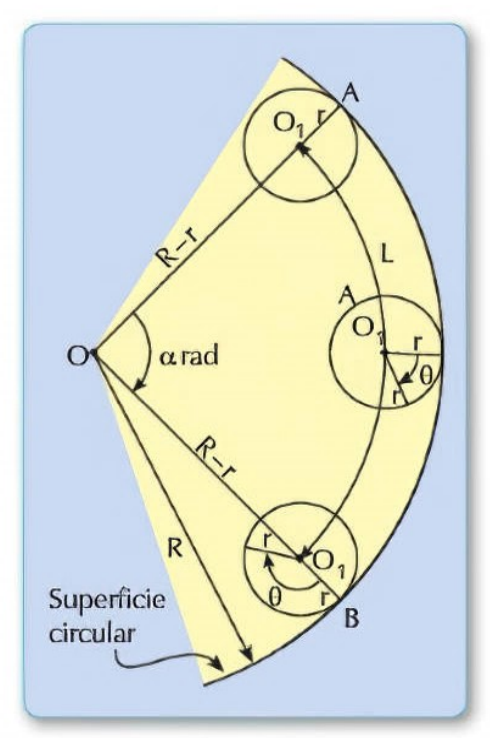
$$\therefore \quad \boxed{n = \frac{(R + r) \cdot \alpha}{2\pi r}}$$



El análisis es similar al caso anterior.

Sea L la longitud del arco recorrido por el centro O_1 de la rueda de la posición inicial A a la posición final B.

En la posición B, la longitud L descrita por el centro O_1 de la rueda en su desplazamiento es igual a la longitud del arco BA sobre la rueda.



$$L = L_{BA} \qquad \ldots ❶$$

Se sabe que:

$$L_{BA} = r \cdot \theta \qquad \ldots ❷$$

Por la propiedad transitiva de ❶ y ❷:

$$\therefore \quad L = r \cdot \theta \qquad \ldots ❸$$

Usando la fórmula de la longitud del arco L de centro O, radio (R – r) y ángulo central α:

$$L = (R - r) \cdot \alpha \ldots ❹$$

Por la propiedad transitiva de ❸ y ❹:

$$(R - r)\alpha = r \cdot \theta \qquad \therefore \quad \boxed{\theta = \frac{(R-r)\alpha}{r}}$$

El número de vueltas n que da la rueda es:

$$n = \frac{\theta}{2\pi}$$

Reemplazo θ:

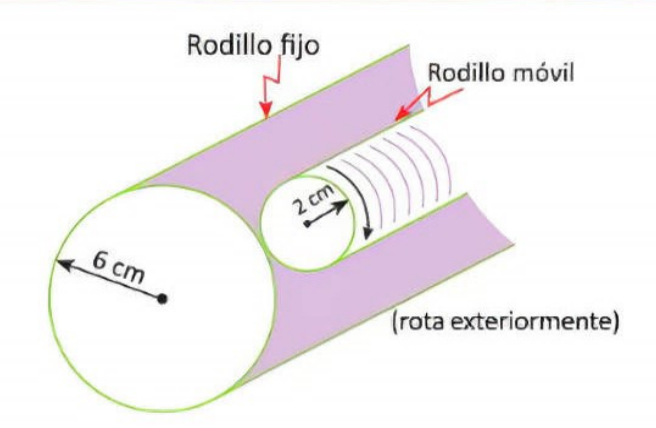
$$\therefore \quad \boxed{n = \frac{(R - r) \cdot \alpha}{2\pi\, r}}$$

Ejemplo:

Una máquina laminadora se compone de dos rodillos, uno fijo de 12 cm de diámetro y el otro móvil de 4 cm de diámetro. Si el rodillo móvil gira completamente alrededor del fijo, ¿cuántas vueltas dará el rodillo móvil sobre su eje?

Resolución:

Como el rodillo móvil recorre completamente al rodillo fijo, el ángulo barrido será $\alpha = 2\pi$ rad, luego:



$$n = \frac{\alpha(R + r)}{2\pi\, r} \qquad \begin{cases} \alpha = 2\pi \text{ rad} \\ R = 6 \text{ cm} \\ r = 2 \text{ cm} \end{cases}$$

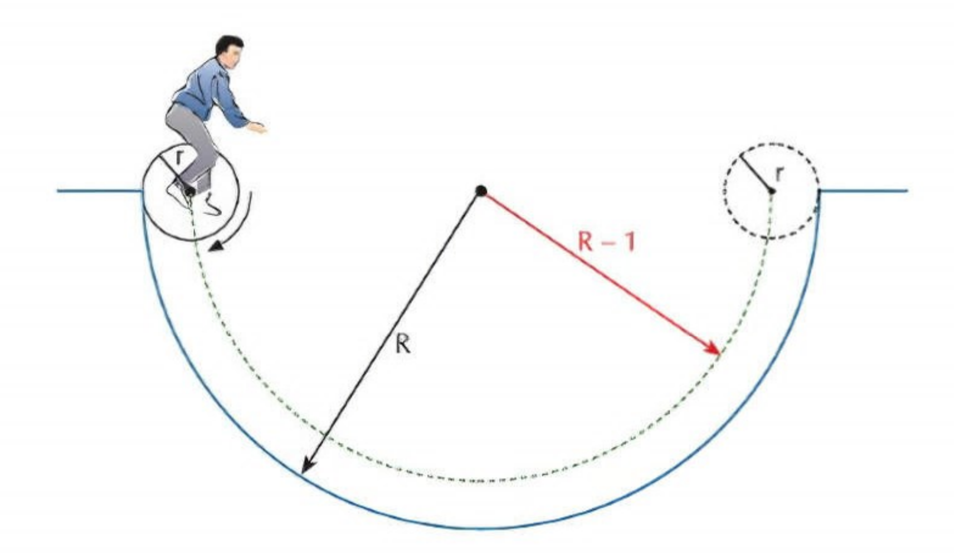
$$n = \frac{2\pi(6+2)}{2\pi\ (2)}$$

n = 4 vueltas

Ejemplo

Un acróbata recorre interiormente una pista semicircular de radio 5 m con un monociclo cuya rueda tiene un radio de 50 cm. Determina el número de vueltas que da la rueda del monociclo al recorrer completamente la pista.

Resolución:



Del gráfico, observamos que el ángulo barrido por la rueda del monociclo en la pista es $\alpha = \pi$ rad, entonces:

$$n = \frac{\alpha(R-r)}{2\pi r} \qquad \begin{cases} \alpha = 2\pi \text{ rad} \\ R = 5 \text{ cm} \\ r = 50 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \quad n = \frac{\pi(5-0{,}5)}{2\pi(0{,}5)} \Rightarrow$$

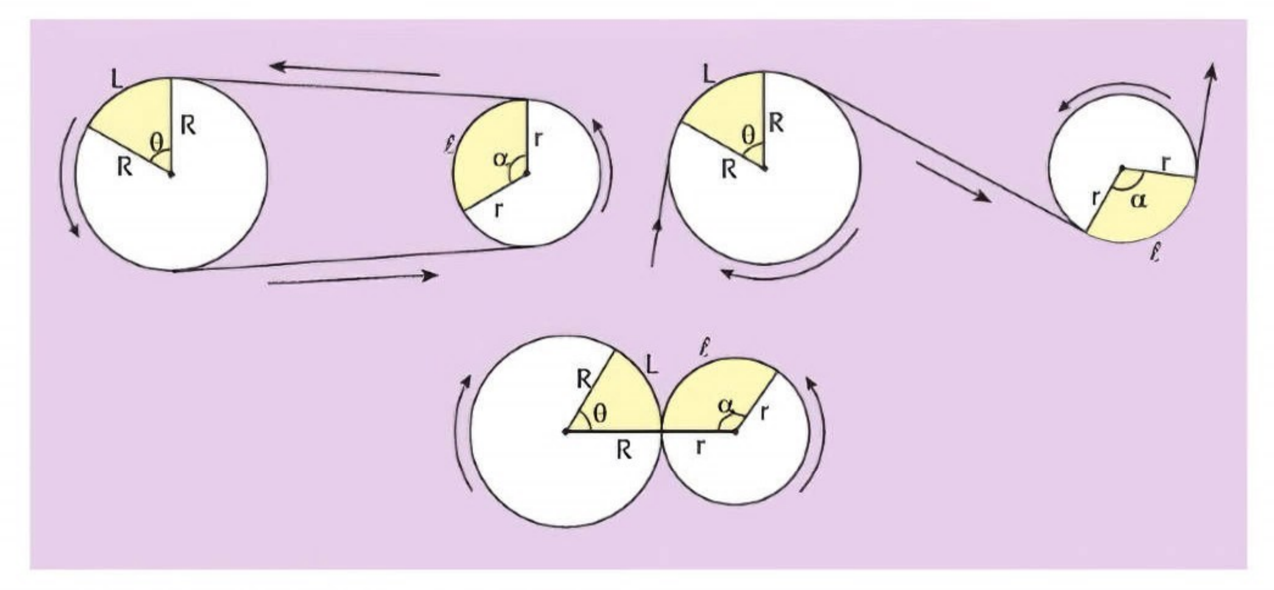
n = 4,5 vuelta

C. Rotación en un sistema de ruedas:

C.1 Ruedas unidas por fajas o engranadas:

Para un sistema de ruedas que están en contacto con una misma faja o que están en contacto entre ellas (engranadas) se cumple que la longitud de arco barrido en un instante de tiempo es la misma.

Observemos los siguientes casos:



En cada caso se cumple que $L = \ell$ entonces:

$$\left.\begin{array}{r} L = \theta R \\ \ell = \alpha r \end{array}\right\} \rightarrow \quad \theta \cdot R = \alpha \cdot r$$

Además, los números de vueltas de las ruedas ("N" de la rueda de radio R y "n" de la rueda de radio r) cumplen que:

$$N = \frac{L}{2\pi R} \quad y \quad n = \frac{\ell}{2\pi r}$$

de donde:

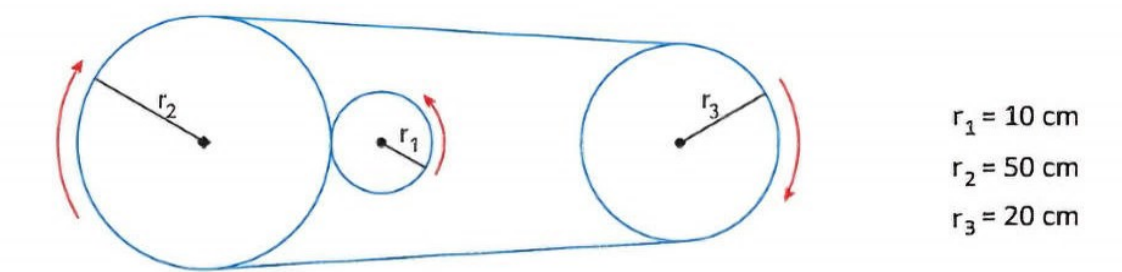
$$2\pi\, RN = L \ \ y \ 2\pi\, rn = \ell$$

Como: $L = \ell \rightarrow \quad 2\pi\, RN = 2\pi\, rn$

$$N \cdot R = n \cdot r$$

Ejemplo:

En el sistema mostrado, la rueda de radio r_1 da 100 vueltas, ¿cuántas vueltas da la rueda de radio r_3?



$r_1 = 10$ cm

$r_2 = 50$ cm

$r_3 = 20$ cm

Resolución:

Entre las ruedas que están en contacto se cumple que:

$$n_1 \cdot r_1 = n_2 \cdot r_2$$

$$(100)\,(10) = n_2\,(50) \qquad \therefore \quad n_2 = 20 \text{ vueltas}$$

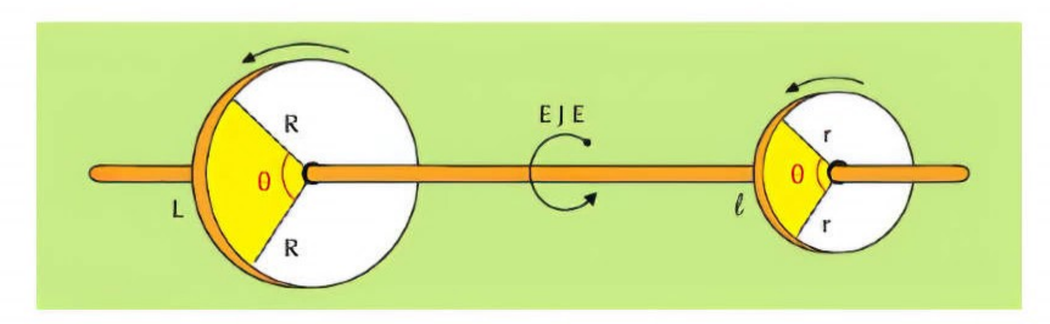
Ahora, entre las ruedas que están conectadas por la faja se cumple que:

$$n_2 \cdot r_2 = n_3 \cdot r_3$$

$$(20)\,(50) = n_3(20) \qquad \therefore \quad n_3 = 50 \text{ vueltas}$$

C.2 Ruedas con un eje común:

Cuando las ruedas están conectadas por un mismo eje (por sus centros) entonces el eje transmite un mismo giro a ambas ruedas. Es decir que las ruedas barren ángulos iguales (o dan el mismo número de vueltas).



Según el gráfico se cumple que:

$$L = \theta \cdot R \ \text{ y } \ \ell = \theta r$$

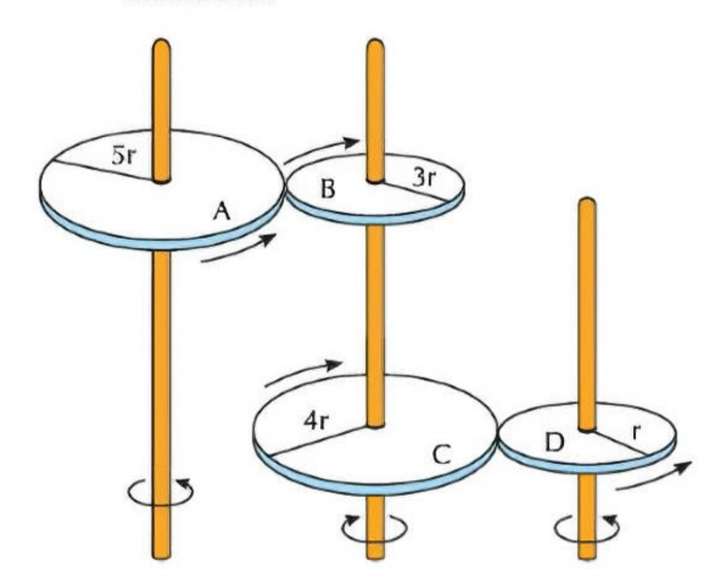
Dividiendo miembro a miembro ambas igualdades tenemos: $\frac{L}{\ell} = \frac{\theta R}{\theta r} \rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{R}{r}$

también: $N_R = n_r$

Ejemplo

En el sistema de engranajes mostrado, el disco mayor gira a razón de 120 rpm ¿a cuántos rpm gira el disco menor?

Resolución:



Entre las ruedas A y B se cumple:

$n_A \cdot R_A = n_B \cdot R_B$

$(120)\,(5r) = n_B\,(3r)$

$\Rightarrow \ n_B = 200 \text{ rpm}$

Entre las ruedas B y C se cumple:

$n_B = n_C$

$\Rightarrow \ n_C = 200 \text{ rpm}$

Entre las ruedas C y D se cumple:

$n_C \cdot R_C = n_D \cdot R_D$

$(200)\,(4r) = n_D\,(r)$

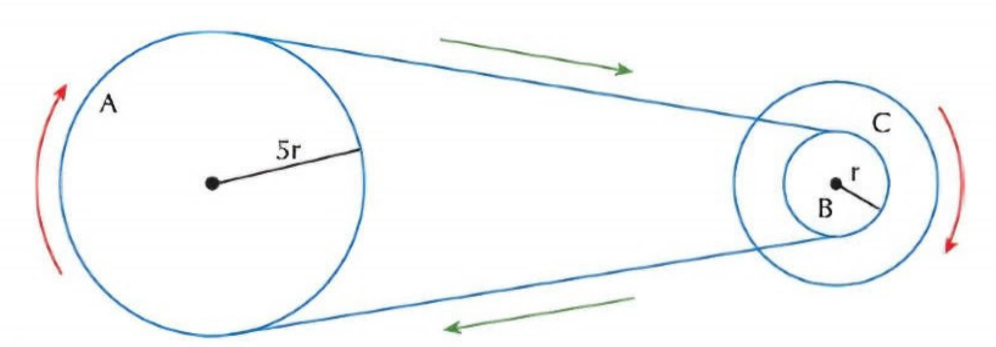
$\Rightarrow \ n_D = 800 \text{ rpm}$



1 rpm <> 1 revolución por minuto o también es el número de vueltas que gira una rueda en un minuto.

Ejemplo

En el sistema mostrado la rueda mayor (A) da 1 vuelta en 10 segundos. ¿A cuántas rpm gira la rueda C?



Resolución:

Entre las ruedas A y B se cumple:

$n_A \cdot R_A = n_B \cdot R_B$

$(1)\ (5r) = n_B\ (r)$

$\Rightarrow \quad n_B = 5$

Entre las ruedas B y C se cumple:

$n_B = n_C$

$\Rightarrow \quad n_C = 5$

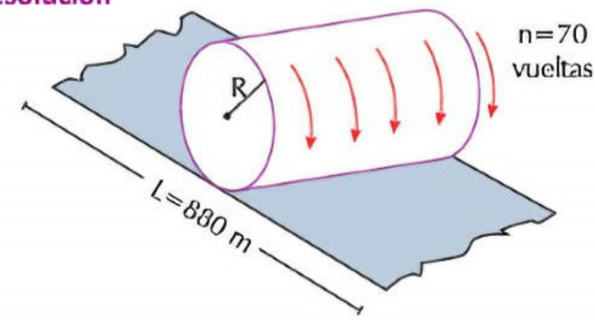
Entonces la rueda (C) da 5 vueltas en 10 segundos de lo cual se concluye que dará 30 vueltas en 1 minuto, es decir gira a razón de 30 rpm.

Probemas resueltos

Sobre números de vueltas

Problema 1 Una aplanadora que consta de un rodillo debe allanar un camino recto de 880 m de longitud, para lo cual da 70 vueltas al recorrerlo una vez. Calcula el radio del rodillo. $\left(\text{Tomar } \pi = \frac{22}{7}\right)$

Resolución



Recordemos que: $n = \frac{L}{2\pi R}$

Entonces: $R = \frac{L}{2\pi n}$

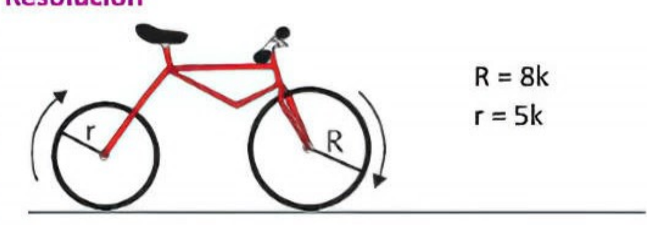
Reemplazando los datos:

$$R = \frac{880}{2\left(\frac{22}{7}\right)(70)}$$

$R = 2$ m **Rpta.**

Problema 2 Los radios de las ruedas de una bicicleta están en la relación de 8 a 5. Si la bicicleta se desplaza en línea recta un cierto tramo, la rueda menor gira un ángulo de 7 200°. ¿Cuántas vueltas dará la rueda mayor?

Resolución



Al avanzar un cierto tramo, entonces se cumplirá que:

$$\theta_r \cdot r = \theta_R \cdot R$$

$$7\,200° \cdot 5k = \theta_R \cdot 8k$$

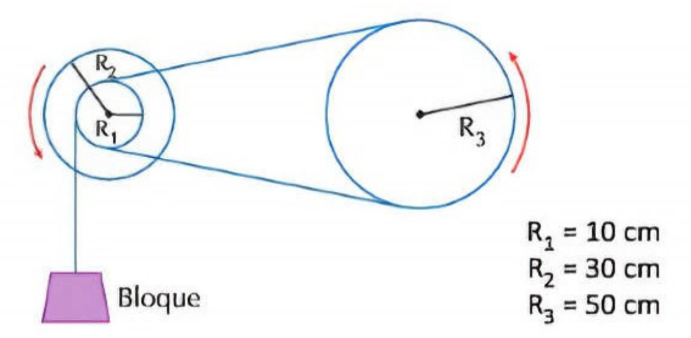
$$\theta_R = \frac{7\,200° \cdot 5k}{8k} \rightarrow \theta_R = 4\,500°$$

Luego, el número de vueltas que da la rueda mayor será:

$$n = \frac{4\,500°}{360°}$$

$n = 12{,}5$ vueltas **Rpta.**

Problema 3 En el sistema de poleas mostrado, el bloque desciende 1 m, determina el ángulo barrido por la polea mayor.



Resolución

Si el bloque ha descendido una altura de 1m <> 100 cm, entonces calculamos el número de vueltas de la polea de radio R_1 así:

$$n_1 = \frac{L}{2\pi R_1}$$

$$n_1 = \frac{100}{2\pi(10)} \rightarrow n_1 = \frac{5}{\pi} \text{ vueltas}$$

Además:

$$n_1 = n_2 \rightarrow n_2 = \frac{5}{\pi} \text{ vueltas}$$

También sabemos que:

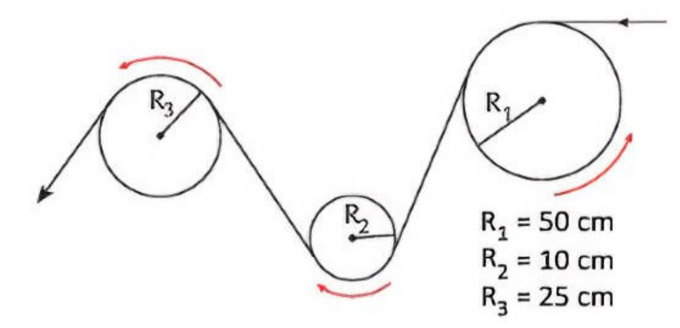
$$n_2 \cdot R_2 = n_3 \cdot R_3$$

$$\left(\frac{5}{\pi}\right)(30) = n_3(50) \rightarrow n_3 = \frac{3}{\pi} \text{ vueltas}$$

Luego, el ángulo barrido por la polea mayor será:

$$\theta_3 = \frac{3}{\pi}(2\pi \text{ rad}) \rightarrow \theta_3 = 6 \text{ rad}$$ **Rpta.**

Problema 4 En el sistema mostrado, si la faja avanza 500π cm, ¿cuántas vueltas dan en conjunto los tres engranajes?



Resolución

- Dado que la faja avanza 500π cm, entonces calculamos el número de vueltas de cada engranaje del modo siguiente:

$$n_1 = \frac{L}{2\pi R_1} \rightarrow n_1 = \frac{500\pi}{2\pi(50)} = 5 \text{ vueltas}$$

$$n_2 = \frac{L}{2\pi R_2} \rightarrow n_2 = \frac{500\pi}{2\pi(10)} = 25 \text{ vueltas}$$

$$n_3 = \frac{L}{2\pi R_3} \rightarrow n_3 = \frac{500\pi}{2\pi(25)} = 10 \text{ vueltas}$$

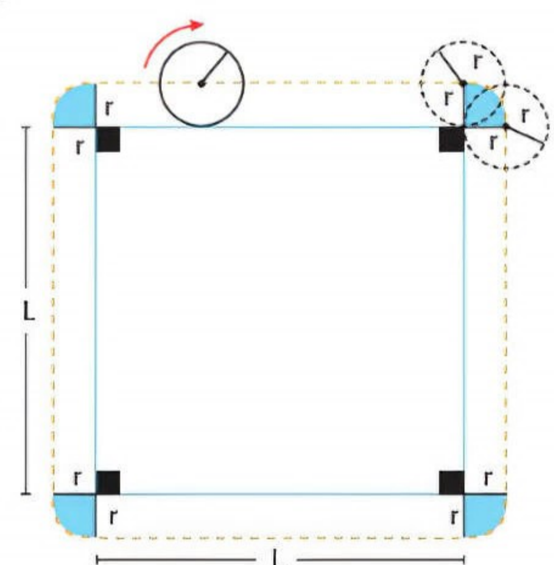
- Luego, el número de vueltas dado por el conjunto de engranajes será:

$$n_T = 5 + 25 + 10 \rightarrow n_T = 40 \text{ vueltas}$$ **Rpta.**

Problema 5 Halla el número de vueltas que realiza la rueda de radio r = 3,5 cm al recorrer exteriormente el contorno de un cuadrado de lado L = 22 cm completamente. $\left(\text{Tomar } \pi = \frac{22}{7}\right)$

Resolución

De acuerdo al enunciado, tenemos la siguiente situación:



Se observa que en cada vértice del cuadrado se forma, debido al giro de la rueda, un cuarto de circunferencia; entonces la longitud recorrida por la rueda será:

$$L_T = 4L + 4\left(\frac{2\pi r}{4}\right)$$

$$L_T = 4(22) + 2\left(\frac{22}{7}\right)(3,5)$$

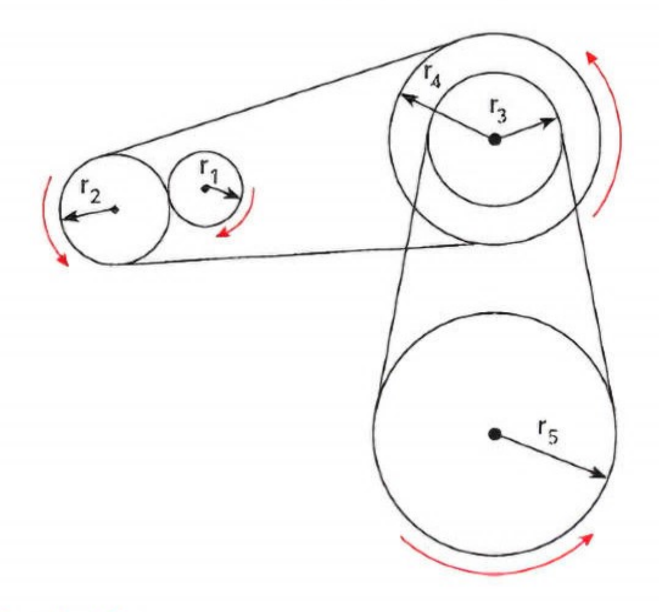
$$L_T = 110 \text{ cm}$$

Ahora el número de vueltas dado por la rueda será:

$$n = \frac{L_T}{2\pi r} \rightarrow n = \frac{110}{2\left(\frac{22}{7}\right)(3,5)}$$

$$\therefore \; n = 5 \text{ vueltas}$$ **Rpta.**

Problema 6 En el sistema mostrado, si la rueda de radio r_1 gira un ángulo de 200°, ¿qué ángulo gira la rueda de radio r_5? Además: $r_1 = \frac{r_2}{2} = \frac{r_3}{3} = \frac{r_4}{4} = \frac{r_5}{5}$.



Resolución

- Entre las ruedas 1 y 2 se cumple:

$$\alpha_1 \cdot r_1 = \alpha_2 \cdot r_2$$
$$200° \cdot r_1 = \alpha_2 (2r_1)$$
$$100° = \alpha_2$$

- Para las ruedas 2 y 4 se cumple:

$$\alpha_2 \cdot r_2 = \alpha_4 \cdot r_4$$
$$100° \cdot r_2 = \alpha_4 (2r_2)$$
$$50° = \alpha_4$$

- Además entre las ruedas 3 y 4 tenemos:

$$\alpha_3 = \alpha_4 \rightarrow \quad \alpha_3 = 50°$$

- Finalmente entre las ruedas 3 y 5 se cumple:

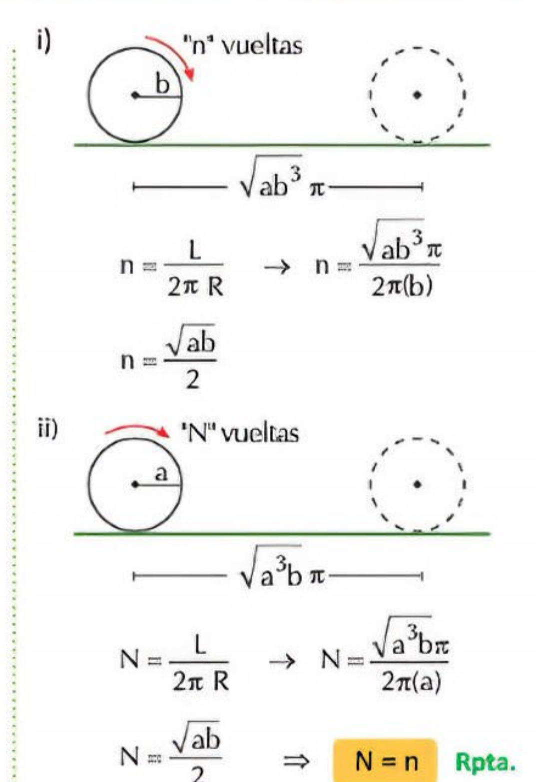
$$\alpha_3 \cdot r_3 = \alpha_5 \cdot r_5$$
$$50° \cdot r_3 = \alpha_5 \cdot \left(\frac{5}{3} r_3\right)$$
$$\therefore \quad \alpha_5 = 30° \quad \textbf{Rpta.}$$

Problema 7 Si una rueda de radio "b" metros necesita girar "n" vueltas para recorrer una distancia de "$\sqrt{ab^3}\,\pi$" metros, ¿cuántas vueltas debe dar una rueda de radio "a" metros para recorrer "$\sqrt{a^3b}\,\pi$" metros?

Resolución

A partir de la información tenemos:

i)

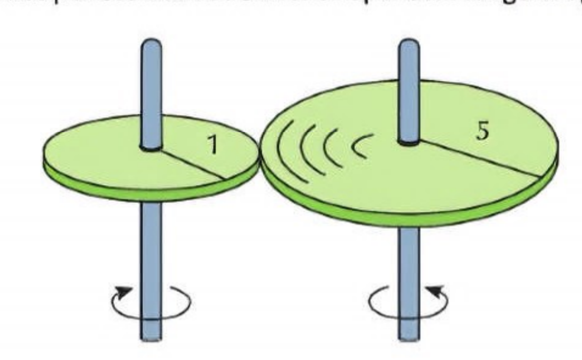


$$n = \frac{L}{2\pi R} \quad \rightarrow \quad n = \frac{\sqrt{ab^3}\pi}{2\pi(b)}$$
$$n = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

ii)

$$N = \frac{L}{2\pi R} \quad \rightarrow \quad N = \frac{\sqrt{a^3b}\pi}{2\pi(a)}$$
$$N = \frac{\sqrt{ab}}{2} \quad \Rightarrow \quad N = n \quad \textbf{Rpta.}$$

Problema 8 En el sistema mostrado, el engranaje de menor radio gira 1,25 vueltas. ¿Cuál será la distancia entre dos puntos diametralmente opuestos luego del giro?



Resolución

Calculamos el número de vueltas que gira la rueda de mayor radio:

$$n \cdot r = N \cdot R \rightarrow \quad (1,25)(1) = N\,(5)$$
$$N = 0,25 \text{ vueltas}$$

Analicemos la posición de los puntos diametralmente opuestos:

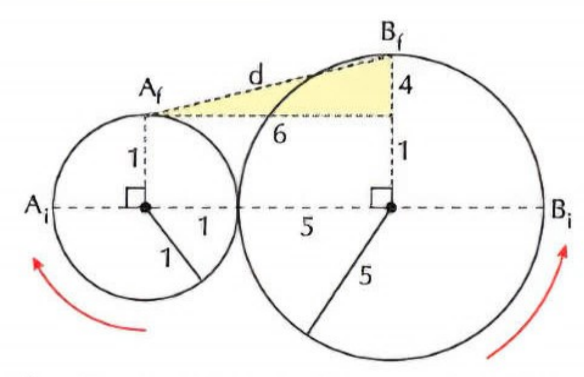
$$n_A = 1,25\text{ v} = 1\text{ v} + \frac{1}{4}\text{ v}$$
$$n_B = 0,25\text{ v} = \frac{1}{4}\text{ v}$$

Donde

v: una vuelta



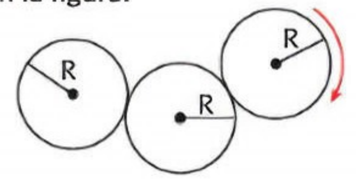
$\frac{1}{4}$ v < > 90°



En el ◺ pintado aplicamos el teorema de Pitágoras:

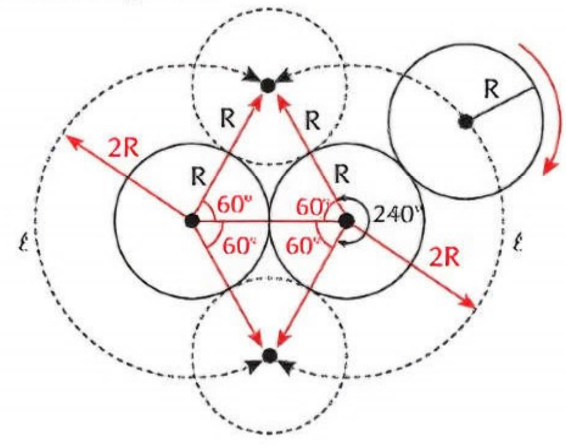
$$d^2 = 6^2 + 4^2 \rightarrow \boxed{d = 2\sqrt{13}} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 9 Calcula el número de vueltas que da la rueda móvil al recorrer a las otras dos ruedas fijas mostradas en la figura.



Resolución

Analizando la gráfica:



$$\ell = \frac{240^\circ \pi}{180^\circ}(2R) = \frac{8}{3}\pi R$$

$$n = \frac{2\ell}{2\pi R} \rightarrow n = \frac{2\left(\frac{8}{3}\pi R\right)}{2\pi R}$$

$$\therefore \boxed{n = \frac{8}{3} \text{ vueltas}} \quad \text{Rpta.}$$

Problema 10 Los radios de las ruedas de una bicicleta están en la relación de 5 a 4; si la rueda menor ha dado 50 vueltas más que la rueda mayor, ¿cuántas vueltas a dado la rueda mayor?

Resolución



Del dato:

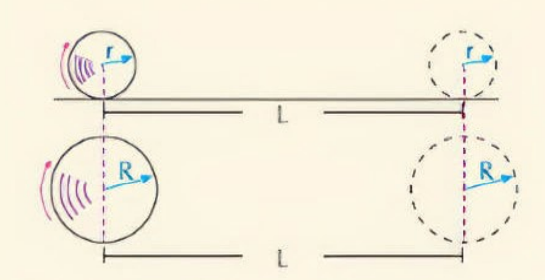
- $n_r = n_R + 50$
- Además: $\frac{R}{5} = \frac{r}{4}$
- También se cumple que:

$$n_r \cdot r = n_R \cdot R$$

$$(n_R + 50)\, r = n_R \cdot \left(\frac{5r}{4}\right)$$

$$4n_R + 200 = 5n_R$$

$$\therefore \boxed{n_R = 200 \text{ vueltas}} \quad \text{Rpta.}$$



La rueda de radio menor dará más vueltas que la de radio mayor al recorrer ambas un camino de longitud "L".

Pero que sucede si ambas ruedas son colocadas concéntricamente:



Nuevamente ambas recorren el mismo camino de longitud L, pero ahora ambas darán el mismo número de vueltas ¿Cómo explica esto?

Amplía tus conocimientos



El número Pi



Aprovechando que el 14 de marzo, se celebraba el día mundial del número Pi, se me ocurre escribir sobre las curiosidades de éste mágico número que esconde mucho más de lo que nos enseñaron en el colegio.

En primer lugar, podemos definir a Pi como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Los egipcios ya determinaron a Pi como 3,16, una medida bastante cercana a la que hoy se conoce y en ella se basaron para muchas de sus construcciones, incluyendo las famosas pirámides. Pero fue en la Grecia clásica cuando se determinó el verdadero valor de Pi como 3,14. No obstante, tiempo después, se volvió a la errónea medida egipcia, dando un paso atrás.

El primero en utilizar el símbolo Pi que todos conocemos fue el matemático William Jones en 1706.

En el día mundial de Pi, es costumbre recitar una gran cantidad de dicimales de éste número. Sobre este tema, se podría escribir mucho, ya que desde hace muchos años, se utilizan programas informáticos para calcular un gran número de decimales. En algún sitio leí, (pero ahora no lo recuerdo exactamente) que alguien tiene el *record* de recitar de memoria unos treinta mil y pico decimales.

Por si a alguien le interesa y como curiosidad, los dejo un poema, con truco. Contando las letras de cada una de las palabras, obtendremos las 20 primeras cifras de Pi.

Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que darás,
cociente diametral siempre inmedible
Soy de las redondas aras.

Como he dicho antes, el número Pi, esconde más de lo que muchos conocen. Está presente en sitios y lugares inimaginables. Un ejemplo de ello es un estudio realizado por el catedrático y geólogo Hans-Henrik Stolum, el cual, calculó la relación entre la longitud real de los ríos desde su nacimiento y su desembocadura, su longitud media en línea recta, como resultado, obutvo (varía un poco de río a río) que la longitud real es unas 3,14 veces aproximadamente la distancia en línea recta. Otra vez más Pi,está presente en la Naturaleza.

Los hay todavía más locos, o entusiastas de Pi, como un matemático alemán, cuya voluntad fue que como epitafio en su lápida le pusieran 35 cifras decimales de Pi.

Curioso número, de cualquier forma. Y para finalizar Albert Einstein nació un 14 de marzo de 1879.

Carlos Gutiérrez Vidalón

Personaje de la Matemática

(Matemático peruano)



Matemático peruano, que ha conseguido resolver la conjetura matemática de Markus-Yamabe, toda una proeza científica a nivel mundial, en el Perú pocas personas conocen de sus logros. Carlos Gutiérrez Vidalón, se forjó en base al esfuerzo y dedicación, en la actualidad es un personaje destacado entre los científicos matemáticos de todo el mundo.

Carlos Gutiérrez Vidalón, habla con el dejo pausado del portugués, pero aún así, es posible notar el modo cariñoso en que acomoda cada frase de su castellano cuando intenta convencer que él no merece un artículo que destaque su talento, que no es tanto lo que ha hecho.

Sin embargo, lo delatan sus 30 años de profesor en el Instituto Nacional de Matemática Pura y Aplicada de Brasil, las innumerables invitaciones a congresos matemáticos en todo el mundo, sus textos que estudian los alumnos de la universidad norteamericana de Harvard, su cátedra en la Universidad de Sao Paulo y, por si fuera poco, la condecoración con la Orden Nacional de Comendador al Mérito Científico que le impuso el expresidente de Brasil, Fernando Henrique Cardoso, hace algunos años por su éxito en el avance de las ciencias matemáticas en el mundo.

¿Cómo lo hizo? Pareciera sencillo decir que resolvió un problema, pero fue uno de esos grandes problemas numéricos que esperaba por años ser demostrado. Desde que dos matemáticos prestigiosos, Markus y Yamabe, enunciaron su conjetura matemática, pasaron más de 40 años. Hoy, no es más una conjetura, porque fue resuelta -probada- por nuestro matemático peruano. Ahora la conjetura Markus-Yamabe se ha convertido en todo el mundo matemático en el Teorema Gutiérrez.

Carlos Teobaldo Gutiérrez Vidalón, nació y creció en Ayacucho, estudió docencia en la especialidad de matemática en la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, luego viajó a Brasil a continuar sus estudios. Durante cuatro años, de los 30 que lo acoge Brasil, se esforzó por conseguir un doctorado en matemáticas, enseñar en aulas universitarias y descifrar aquel enunciado que esperaba solución. Ahora, de su esfuerzo en aprender ostenta un doctorado en matemática pura y brinda cátedra a los futuros científicos matemáticos del mundo, además de su reconocimiento mundial por la solución de la conjetura Markus-Yamabe.

Aunque reside en Brasil de manera permanente, Carlos Gutiérrez no se aleja de su tierra natal, a pesar de su larga estadía en el extranjero y sus viajes por el mundo, cada año separa unos días para visitar a su querido Perú y brindar conferencias o exposiciones a los matemáticos y estudiantes del país, como un aporte al desarrollo científico de la nación que lo vio nacer. Además se da un tiempo para reunirse con la familia y degustar las comidas típicas.

La humildad y la sencillez es una prueba más de su desempeño notable entre los hombres. Sin duda, un ejemplo a seguir.

Investiga: 

1. ¿Cuál es tu opinión del desarrollo académico del Dr. Carlos Gutiérrez?

2. La producción y desarrollo de nuestros matemáticos, y científicos peruanos es de nivel mundial pero lamentablemente poco conocido en nuestro pais, ¿cuál es tu opinión de la falta de divulgación de los logros de nuestros compatriotas?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Dibuja un triángulo rectángulo y expresa los catetos en términos de la hipotenusa y seno o coseno de un ángulo agudo de dicho triángulo.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Emplea la brújula para medir ángulos horizontales y aplica las razones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos.

Razones trigonométricas de un Ángulo agudo

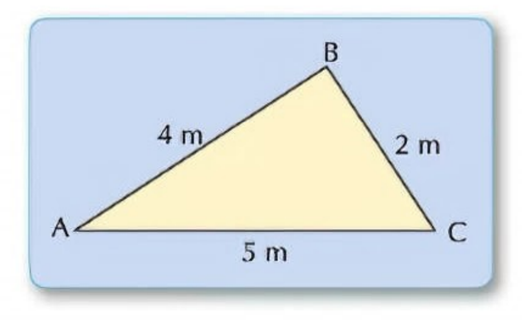
Criterios preliminares

Razón

Es el resultado de comparar dos cantidades, esta comparación se expresa mediante el cociente de ellas.

Ejemplo:

Hallar la razón entre los lados menor y mayor del triángulo ABC.



Resolución:

Lado menor: 2 m

Lado mayor: 5 m

Razón (r) = $\frac{2\text{ m}}{5\text{ m}}$ = 0,4

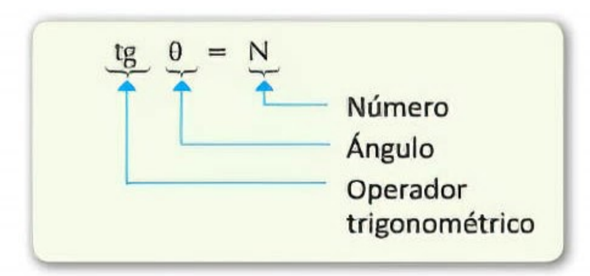
Operador trigonométrico:

Son aquellos símbolos matemáticos que se aplican a los ángulos. En este capítulo estudiaremos seis de ellos.



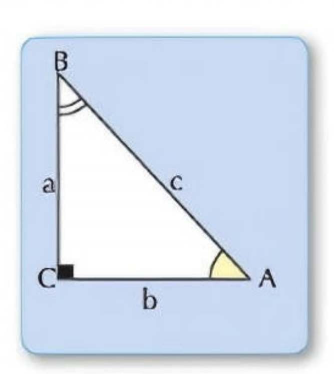
Razón trigonométrica

Es el resultado de aplicar un operador trigonométrico a un ángulo.



Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Es el valor que se obtiene al comparar por cociente las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.



NOTA

	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Hipotenusa
Respecto al ∢ A	a	b	c
Respecto al ∢ B	b	a	c

TEOREMA DE PITÁGORAS: $a^2 + b^2 = c^2$

ÁNGULOS AGUDOS: $m\measuredangle A + m\measuredangle B = 90°$

Cálculo de las razones trigonométricas

$$\text{sen } A = \frac{\text{Cateto Opuesto al} \measuredangle A}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle A}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } A = \frac{\text{Cateto Opuesto al} \measuredangle A}{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle A} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg } A = \frac{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle A}{\text{Cateto Opuesto al} \measuredangle A} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle A} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosec } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto al} \measuredangle A} = \frac{c}{a}$$

$$\text{sen } B = \frac{\text{Cateto Opuesto al} \measuredangle B}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle B}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

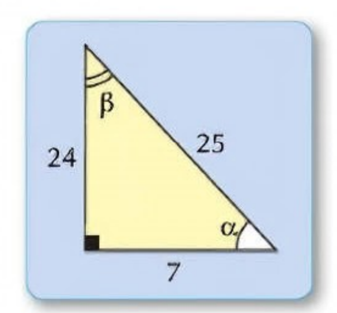
$$\text{tg } B = \frac{\text{Cateto Opuestop al} \measuredangle B}{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle B} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cotg } B = \frac{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle B}{\text{Cateto Opuesto al} \measuredangle B} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cosec } B = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto al} \measuredangle B} = \frac{c}{a}$$

$$\sec B = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente al} \measuredangle B} = \frac{c}{b}$$

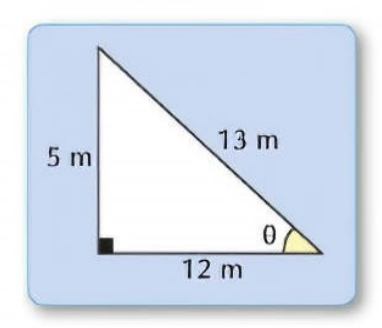
Ejemplo práctico:



R.T. (α)		R.T. (β)	
$\text{sen } \alpha = \frac{24}{25}$	$\text{cotg } \alpha = \frac{7}{24}$	$\text{sen } \beta = \frac{7}{25}$	$\text{cotg } \beta = \frac{24}{7}$
$\cos \alpha = \frac{7}{25}$	$\sec \alpha = \frac{25}{7}$	$\cos \beta = \frac{24}{25}$	$\sec \beta = \frac{25}{24}$
$\text{tg } \alpha = \frac{24}{7}$	$\text{cosec } \alpha = \frac{25}{24}$	$\text{tg } \beta = \frac{7}{24}$	$\text{cosec } \beta = \frac{25}{7}$

Propiedades fundamentales de las razones trigonométricas

A. Los valores de las razones trigonométricas son cantidades numéricas, es decir, adimensionales (sin dimensiones), por tratarse de un cociente de magnitudes de la misma especie.

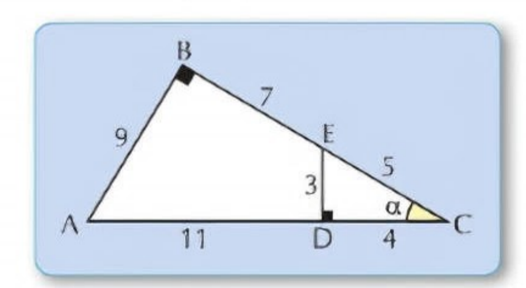


En la figura:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{13\,m}{5\,m} = \frac{13}{5}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = 2{,}6$$

B. Los valores de las razones trigonométricas dependen únicamente de la magnitud del ángulo y no de las dimensiones del triángulo rectángulo que contiene a dicho ángulo, es decir, que su valor no cambia si la medida del ángulo permanece constante.



En el ⊿ EDC:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

En el ⊿ ABC:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

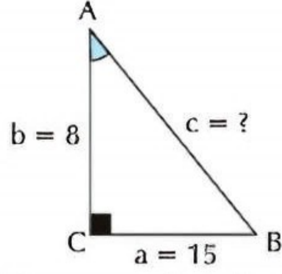
Problemas resueltos

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

1 Determina las 6 razones trigonométricas del mayor ángulo agudo de un triángulo rectángulo ABC, recto en C, siendo: a = 15; b = 8.

Resolución

- Graficamos:



- Teorema de Pitágoras: $c^2 = 15^2 + 8^2$

$$c = \sqrt{289}$$

$$c = 17$$

- Notamos: $a > b \rightarrow m\sphericalangle A > m\sphericalangle B$
- Calculamos las R.T. ($\sphericalangle A$):

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{15}{17}$$

$$\cos A = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{8}{17}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{15}{8}$$

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{8}{15}$$

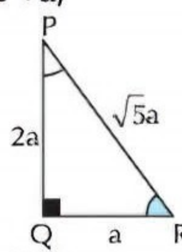
$$\sec A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{17}{8}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{17}{15}$$

2 En un triángulo rectángulo se sabe que el cateto mayor es el doble del cateto menor. Calcula las 6 razones trigonométricas del menor ángulo de dicho triángulo rectángulo.

Resolución

- Del enunciado: $(\beta < \alpha)$



- Por el teorema de Pitágoras:

$$PR^2 = (2a)^2 + (a)^2$$

$$PR = \sqrt{5a^2} \rightarrow PR = \sqrt{5}a$$

- Como "β" es el menor ángulo, nos piden:

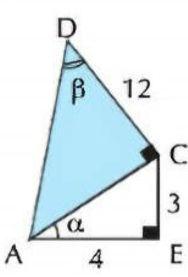
$$\text{sen } \beta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cotg } \beta = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\cos \beta = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \sec \beta = \frac{\sqrt{5}a}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad \text{cosec } \beta = \frac{\sqrt{5}a}{a} = \sqrt{5}$$

3 Del gráfico, calcula:

$$M = \frac{\text{sen } \alpha + \text{cosec } \beta}{\sec \alpha \cdot \text{cotg } \beta}$$



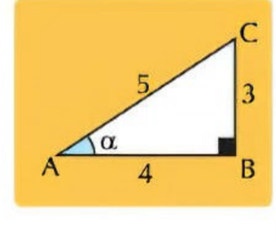
Resolución

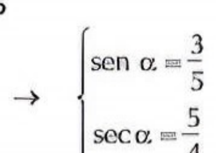
- En el ◺ ABC:
- Por el teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AC = \sqrt{25}$$

$$AC = 5$$





$$\rightarrow \begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5} \\ \sec \alpha = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

- En el ◺ ACD:
- Por el teorema de Pitágoras:

$$AD^2 = 5^2 + 12^2$$

$$AD = \sqrt{169}$$

$$AD = 13$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{cosec } \beta = \dfrac{13}{5} \\ \text{cotg } \alpha = \dfrac{12}{5} \end{cases}$$

- Reemplazando

$$M = \frac{\frac{3}{5} + \frac{13}{5}}{\frac{5}{4} \cdot \frac{12}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{3} \rightarrow M = \frac{16}{15} \text{ Rpta.}$$

4 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se cumple que: $\text{tg } A = \frac{9}{40}$. Calcula:

$$E = \sqrt{\frac{41(\text{sen } A + \cos A)}{\text{cotg } A + \text{cosec } A}}$$

Resolución

- Del enunciado:

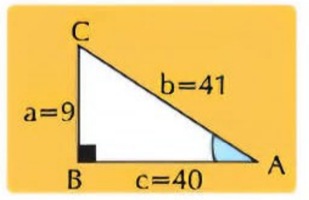
$$\text{tg } A = \frac{9}{40} = \frac{a}{c} \rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ c = 40 \end{cases}$$

- También:

$$b^2 = 9^2 + 40^2$$

$$b = \sqrt{1681}$$

$$b = 41$$



- Nos piden:

$$E = \sqrt{\frac{41\left(\frac{9}{41} + \frac{40}{41}\right)}{\frac{40}{9} + \frac{41}{9}}}$$

$$E = \sqrt{\frac{49}{9}} \rightarrow E = \frac{7}{3} \text{ Rpta.}$$

5 En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que: cos A = 0,96. Calcula:

$$P = \frac{\text{tg } A + \sec A}{\text{cotg } A + \text{cosec } A}$$

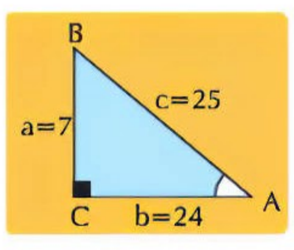
Resolución

- Del dato:

$$\cos A = 0{,}96 = \frac{96}{100} = \frac{24}{25} = \frac{b}{c} \rightarrow \begin{cases} b = 24 \\ c = 25 \end{cases}$$

- También:

$$25^2 = a^2 + 24^2$$
$$a^2 = 49$$
$$a = 7$$

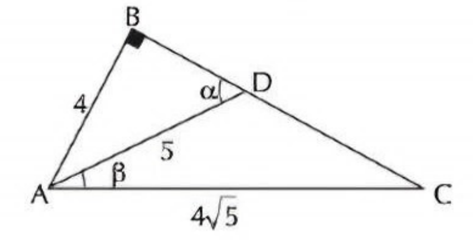


- Nos piden:

$$P = \frac{\frac{7}{24}+\frac{25}{24}}{\frac{24}{7}+\frac{25}{7}} = \frac{\frac{32}{24}}{\frac{49}{7}} = \frac{\frac{4}{3}}{7}$$

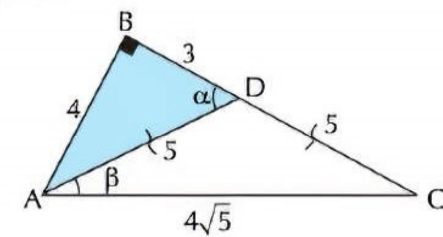
$\therefore$ $P = \frac{4}{21}$ **Rpta.**

6 Del gráfico, calcula: $K = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta$



Resolución

- En el ◺ ABD: $BD^2 = AD^2 - AB^2$
  $BD^2 = 5^2 - 4^2$
  $BD = 3$
- En el ◺ ABC: $BC^2 = AC^2 - AB^2$
  $BC^2 = (4\sqrt{5})^2 - 4^2$
  $BC = 8$
- En el gráfico:



i) Δ ADC: Isósceles: AD = CD → m∢C = β

ii) ◺ ABD: $\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$

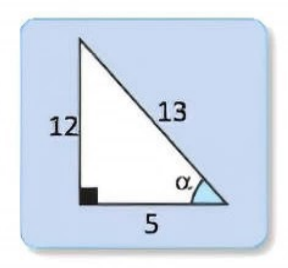
◺ ABC: $\text{tg}\,\beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

- Nos piden:

$K = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$ $\therefore$ $K = \frac{11}{6}$ **Rpta.**

Razones trigonométricas recíprocas

Calculemos las R.T. (α) en el triángulo rectángulo mostrado:



$\text{sen}\,\alpha = \frac{12}{13}$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$	$\sec\,\alpha = \frac{13}{5}$
$\cos\,\alpha = \frac{5}{13}$	$\text{cotg}\,\alpha = \frac{5}{12}$	$\text{cosec}\,\alpha = \frac{13}{12}$

$$\text{sen}\,\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha = \frac{12}{13}\cdot\frac{13}{12} = 1$$

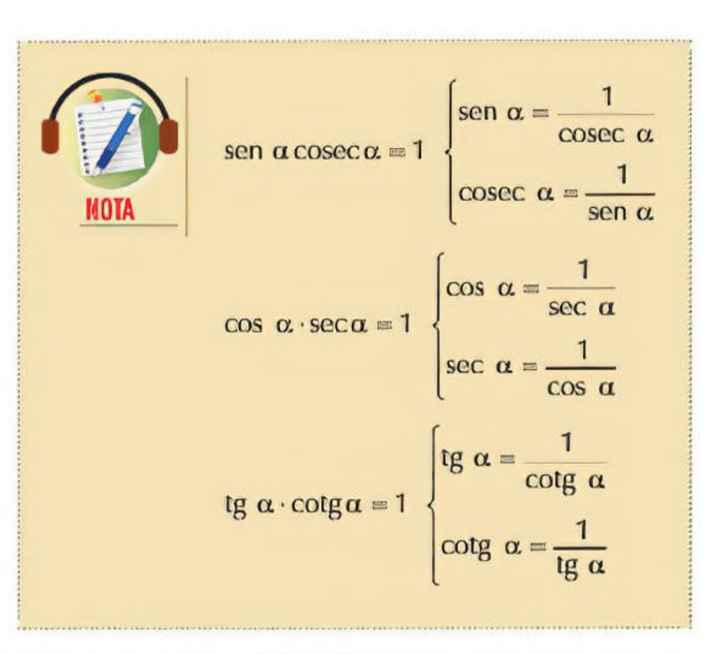
$$\cos\alpha \cdot \sec\,\alpha = \frac{5}{13}\cdot\frac{13}{5} = 1$$

$$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha = \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{12} = 1$$

De donde concluimos que: sen α y cosec α; cos α y sec α; tan α y cot α son razones trigonométricas recíprocas y cumplen la siguiente propiedad:

El producto de 2 razones trigonométricas recíprocas es igual a la unidad si y solo si están aplicadas a un mismo ángulo.

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen}\,x \cdot \text{cosec}\,y = 1 \\ \cos\,x \cdot \sec\,y = 1 \\ \text{tg}\,x \cdot \text{cotg}\,y = 1 \end{array}\right\} \quad x = y$$



$$\text{sen}\,\alpha\,\text{cosec}\,\alpha = 1 \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{cosec}\,\alpha} \\ \text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \end{cases}$$

$$\cos\,\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \begin{cases} \cos\,\alpha = \dfrac{1}{\sec\,\alpha} \\ \sec\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\,\alpha} \end{cases}$$

$$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha = 1 \begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{cotg}\,\alpha} \\ \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \end{cases}$$

Problemas resueltos — SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

1 Sabiendo que:

$\text{sen}(2x + 15°) \cdot \text{cosec}\, 65° = 1$

Calcula el valor de "x".

Resolución

Aplicando la propiedad de las R.T. recíprocas:

$$\text{sen}(2x + 15°) \cdot \text{cosec}\, 65° = 1$$

$$2x + 15° = 65°$$

$$2x = 50°$$

$$\therefore \boxed{x = 25°} \quad \textbf{Rpta.}$$

2 Si se cumple que:

$\cos(7x^2 - 3)° \cdot \sec(25x + 9)° - 1 = 0,\ x \in \mathbb{Z}^+$

halla el valor de "x".

Resolución

- De la condición: $\cos(7x^2 - 3)° \cdot \sec(25x + 9)° = 1$
- De acuerdo a la propiedad de las R.T. recíprocas:

$$7x^2 - 3 = 25x + 9$$

$$7x^2 - 25x - 12 = 0$$

$$\begin{matrix} 7x & +3 \\ x & -4 \end{matrix}$$

$$(7x + 3)(x - 4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{i) } 7x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{7}} \ \text{¡No!} \\ \text{ii) } x - 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = 4} \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{x = 4} \quad \textbf{Rpta.}$$

3 Si $\text{tg}(2x + 3y - 20°) \cdot \text{cotg}(5x + 3y - 50°) = 1$, halla el valor de "x".

Resolución

De las RT. recíprocas:

$$\text{tg}(2x + 3y - 20°) \cdot \text{cotg}(5x + 3y - 50°) = 1$$

$$2x + \cancel{3y} - 20° = 5x + \cancel{3y} - 50°$$

$$30° = 3x$$

$$\therefore \boxed{x = 10°} \quad \textbf{Rpta.}$$

4 Si se cumple que:

$\text{sen}(3x + 2y - 30°) \cdot \text{cosec}(x - y + 10°) = 1$ ... ①

$\text{tg}(5x + y + 20°) \cdot \text{cotg}(x + 2y + 30°) = 1$ ... ②

calcular "x" e "y".

Resolución

- De ①:

$$\text{sen}(3x + 2y - 30°) \cdot \text{cosec}(x - y + 10°) = 1$$

$$3x + 2y - 30° = x - y + 10°$$

$$2x + 3y = 40° \ \ldots ③$$

- De ②:

$$\text{tg}(5x + y + 20°) \cdot \text{cotg}(x + 2y + 30°) = 1$$

$$5x + y + 20° = x + 2y + 30°$$

$$4x - y = 10° \ \ldots ④$$

- De ③ y ④:

$$\begin{matrix} 2x + 3y = 40° & \longrightarrow & 2x + 3y = 40° \\ 4x - y = 10° & \xrightarrow{(x3)} & 12x - 3y = 30° \end{matrix} \Bigg\} +$$

Sumamos ③ y ④: $14x = 70°$

$$\boxed{x = 5°}$$

- Reemplazando en ③:

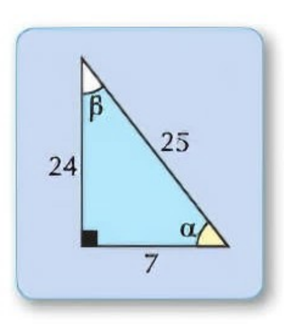
$$2(5°) + 3y = 40°$$

$$3y = 30°$$

$$\therefore \boxed{y = 10°} \quad \textbf{Rpta.}$$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Calculemos las R.T. (α) y R.T. (β) en el triángulo rectángulo mostrado: $\alpha + \beta = 90°$



$\text{sen}\ \alpha = \frac{24}{25}$	$\text{cotg}\ \alpha = \frac{7}{24}$	$\text{sen}\ \beta = \frac{7}{25}$	$\text{cotg}\ \beta = \frac{24}{7}$
$\cos\alpha = \frac{7}{25}$	$\sec\alpha = \frac{25}{7}$	$\cos\beta = \frac{24}{25}$	$\sec\beta = \frac{25}{24}$
$\text{tg}\ \alpha = \frac{24}{7}$	$\text{cosec}\ \alpha = \frac{25}{24}$	$\text{tg}\ \beta = \frac{7}{24}$	$\text{cosec}\ \beta = \frac{25}{7}$

Se observa que:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos\beta = \frac{24}{25}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\,\beta = \frac{24}{7}$$

$$\sec\alpha = \text{cosec}\ \beta = \frac{25}{7}$$

O también:

$$\text{sen}\ \beta = \cos\alpha = \frac{7}{25}$$

$$\text{tg}\ \beta = \text{cotg}\,\alpha = \frac{7}{24}$$

$$\sec\beta = \text{cosec}\ \alpha = \frac{25}{24}$$

De donde concluimos que: sen α y cos β; tg α y cotg β; sec α y cosec β, son razones trigonométricas complementarias (co-razones trigonométricas) y cumplen la siguiente propiedad: Toda razón trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la co-razón trigonométrica del complemento de dicho ángulo.

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\ \alpha = \cos\beta \\ \text{tg}\ \alpha = \text{cotg}\ \beta \\ \sec\alpha = \text{cosec}\ \beta \end{array}\right\} \quad \alpha + \beta = 90°$$

En general: R.T. (ϕ) = Co-R.T. (90° – ϕ)

R.T. : razón trigonométrica.

Co-R.T. : co-razón trigonométrica.

ϕ : ángulo agudo.

Problemas resueltos

SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

1 Si sen (3x + 10°) = cos (2x + 35°), calcula el valor de "x".

Resolución

Aplicando la propiedad de las R.T. complementarias:

$$\text{sen}(x + 10°) = \cos(2x + 35°)$$
$$(3x + 10°) + (2x + 35°) = 90°$$
$$5x + 45° = 90°$$
$$5x = 45°$$
$$\boxed{x = 9°}$$ **Rpta.**

2 Siendo $\dfrac{\text{tg}(x^2 + 5x - 1)^\circ}{\text{cotg}(6x + 11)^\circ} = 1$, halla el valor de "x". ($x \in \mathbb{Z}^+$)

Resolución

- De la condición tenemos :

$$\text{tg}(x^2 + 5x - 1)^\circ = \text{cotg}(6x + 11)^\circ$$

- Por la propiedad de las R.T. complementarias:

$$(x^2 + 5x - 1)^\circ + (6x + 11)^\circ = 90°$$
$$x^2 + 11x - 80 = 0$$
$$x \quad +16$$
$$x \quad -5$$
$$(x + 16)(x - 5) = 0$$

→ i) $x + 16 = 0 \rightarrow \boxed{x = -16}$ ¡No!
 ii) $x - 5 = 0 \rightarrow \boxed{x = 5}$

$$\therefore \boxed{x = 5}$$ **Rpta.**

3 Si se cumple que:

sen (2x + y + 8°) = cos (x + 2y + 16°) ... ❶

sec (2x + 3y – 8°) = cosec (x + y + 20°) ... ❷

calcula "x" e "y"

Resolución

- De ❶: sen(2x + y + 8°) = cos(x + 2y + 16°)

$$(2x + y + 8°) + (x + 2y + 16°) = 90°$$
$$3x + 3y = 66°$$
$$x + y = 22° \ldots ❸$$

- De ❷: sec(2x + 3y – 8°) = cosec(x + y + 20°)

$$(2x + 3y - 8°) + (x + y + 20°) = 90°$$
$$3x + 4y = 78° \ldots ❹$$

- De ❸ y ❹:

$x + y = 22° \xrightarrow{(\times 4)} 4x + 4y = 88°$

$3x + 4y = 78° \longrightarrow 3x + 4y = 78°$ (–)

$4x - 3x = 10$

$\rightarrow \boxed{x = 10}$

- Reemplazando en ❸: 10° + y = 22°

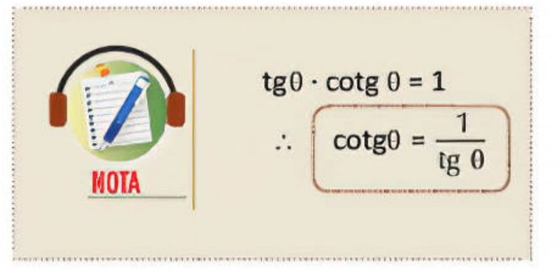
$$\therefore \boxed{y = 12°}$$ **Rpta.**

4 Si tg(2x + 15°) · tg 51° = 1, halla el valor de "x".

Resolución

De la condición:

$$\text{tg}(2x + 15°) = \frac{1}{\text{tg } 51°}$$
$$\text{tg}(2x + 15°) = \text{cotg } 51°$$
$$\rightarrow 2x + 15° + 51° = 90°$$
$$2x = 24$$
$$\therefore \boxed{x = 12°}$$ **Rpta.**



Casos que se presentan con mucha frecuencia en la resolución de triángulos rectángulos

Primer caso

Datos: Hipotenusa "c" y un ángulo "α"

Incógnita: Expresar los catetos en términos de "c" y "α"

En el ◺ BCA:

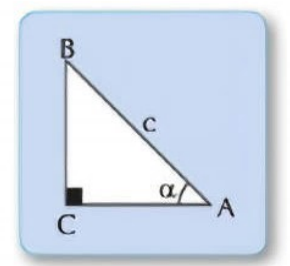
I) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{BC}{c}$

$BC = c \cdot \operatorname{sen} \alpha$

II) $\cos \alpha = \frac{AC}{c}$

$AC = c \cdot \cos \alpha$

Segundo caso



Datos: Un ángulo agudo "α" y su cateto opuesto "a".

Incógnita: Expresar el otro cateto y la hipotenusa en términos de "α" y "a".

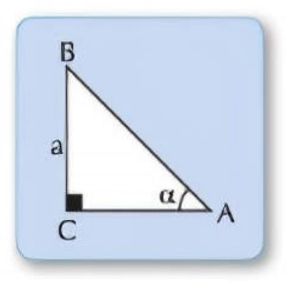
En el ◺ BCA:

I) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{AB}{a}$

$AB = a \cdot \operatorname{cosec} \alpha$

II) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{AC}{a}$

$AC = a \cdot \operatorname{cotg} \alpha$

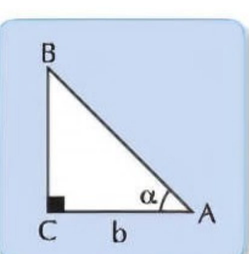


Tercer caso

Datos: Un ángulo "α" y su cateto adyacente "b".

Incógnita: Expresar el otro cateto y la hipotenusa en términos de "α" y "b".

En el ◺ BCA:



I) $\sec \alpha = \frac{AB}{b}$

$AB = b \cdot \sec \alpha$

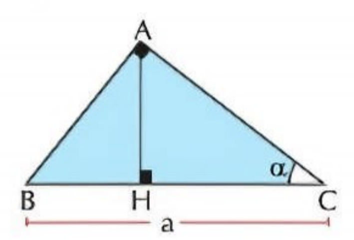
II) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{b}$

$BC = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$

Problemas resueltos

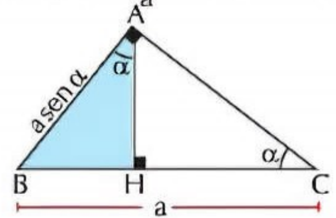
SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1 Del gráfico, halla "AH" en términos de "a" y "α".



Resolución:

- En el ⊿ BAC: sen a = $\frac{AB}{a}$ → AB = a · sen α

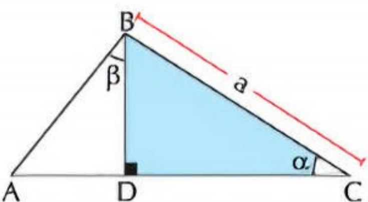


- En el ⊿ AHB:

$$\cos\alpha = \frac{AH}{AB} \rightarrow AH = \underset{\smile}{AB} \cdot \cos\alpha$$

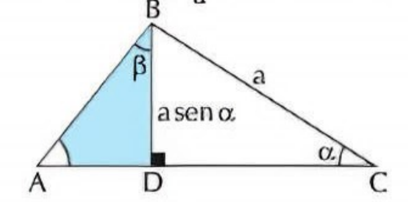
∴ AH = a sen α · cos α

2 De la figura, halla "AD" en términos de "a", "α" y "β".



Resolución:

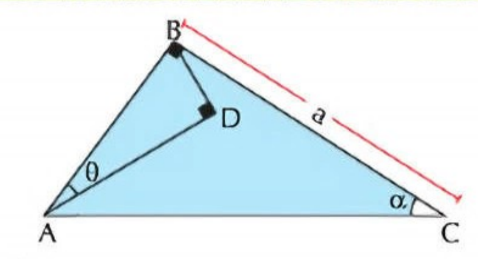
- En el ⊿ BDC: sen α = $\frac{BD}{a}$ → BD = a senα



- En el ⊿ ADB: tg β = $\frac{AD}{BD}$ → AD = BD · tg β

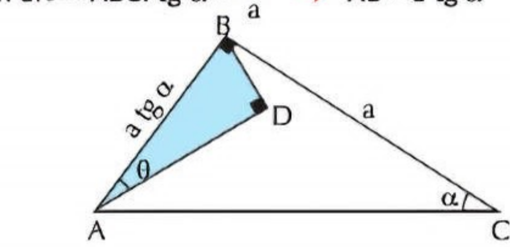
∴ AD = a sen α · tg β

3 En el gráfico, halla "AD" en términos de "a" ; "α" y "θ".



Resolución:

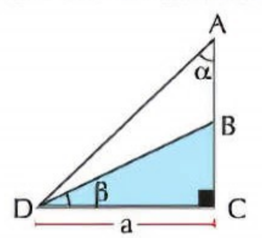
- En el ⊿ ABC: tg α = $\frac{AB}{a}$ → AB = a tg α



- En el ⊿ ADB: cos θ = $\frac{AD}{AB}$ → AD = $\underset{\smile}{AB}$ · cos θ

∴ AD = a tg α · cos θ

4 En la figura, halla "AB" en términos de "a", "α" y "β".



Resolución:

- En el ⊿ ACD: cotg α = $\frac{AC}{a}$ → AC = a · cotg α
- En el ⊿ BCD:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{BC}{a} \rightarrow BC = a\,\text{tg}\,\beta$$

- En la figura: AB = AC – BC

AB = a cotg α – tg β

∴ AB = a(cotg α – tg β)



a) En trigonometría, los operadores no tienen significado por sí solos, ni tampoco se puede realizar operaciones algebraicas con ellos, de manera que, es absurdo considerar las operaciones

$$\frac{\text{sen } \theta}{\theta} = \text{sen (absurdo)} \quad ; \quad \text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) \neq \text{sen } (\alpha + \beta)$$

b) Se ha demostrado que las razones trigonométricas son números, con ellos se puede operar así:

I) $5 \sec \beta - 3 \sec \beta + 2 \sec \beta = 4 \sec \beta$

II) $(3 \text{ cotg } \alpha + 2 \text{ cosec } \alpha) \text{ sen } \alpha = 3 \text{ cotg } \alpha \cdot \text{sen } \alpha + 2 \text{ cosec } \alpha \cdot \text{sen } \alpha$

$$= 3\left(\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}\right)\text{sen } \alpha + 2\left(\frac{1}{\text{sen } \alpha}\right)\cdot \text{sen } \alpha = 3\cos\alpha + 2$$

c) Tenga cuidado con la equivalencia: $\text{sen}^n x = (\text{sen } x)^n$; la primera se utiliza continuamente, pero la segunda no, porque se corre el riesgo de concluir que:

$(\text{sen } x)^n = \text{sen } x^n$ → y esto es incorrecto.

Problemas resueltos SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1 En un triángulo ABC, recto en C, se cumple que:

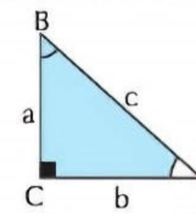
$\cos A = \dfrac{\text{cosec} B}{5}$. Calcula $P = \sec A - \text{cotg } B$.

A) $\sqrt{5} - 2$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $\sqrt{5} + 1$

D) $\sqrt{5} + 2$ E) $\sqrt{5} + 5$

Resolución

- Del enunciado: $\cos A = \dfrac{\text{cosec } B}{5}$



$$\frac{b}{c} = \frac{\frac{c}{b}}{5}$$

$$5b^2 = c^2$$

$$\boxed{\sqrt{5}\, b = c}$$

- Por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 = 5b^2$$
$$a^2 = 4b^2$$
$$a = 2b$$

- Nos piden:

$P = \sec A - \text{cotg } B$

$$P = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}$$

$$P = \frac{\sqrt{5}\, b}{b} - \frac{2b}{b} \quad \rightarrow \quad \boxed{P = \sqrt{5} - 2} \quad \textbf{Rpta. A}$$

2 Si $\text{cosec } \alpha = 8$; (α : agudo), calcula el valor de:

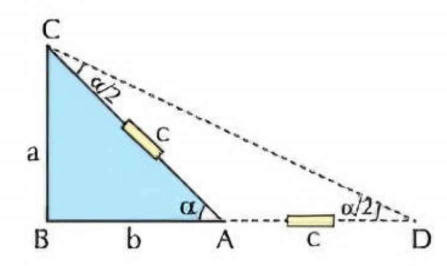
$$E = \frac{1}{3}\left(\text{cotg}\frac{\alpha}{2} - \text{cosec}\,\alpha\right)$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{7}$

D) $3\sqrt{7}$ E) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

Resolución

- Tenemos que:

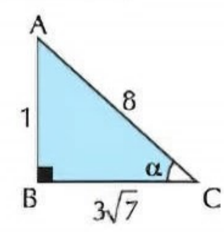


$$\text{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \text{cotg}\,\alpha + \text{cosec}\,\alpha$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha$$

- También: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha$

- En el problema:



$BC^2 = 8^2 - 1^2$

$BC = \sqrt{63}$

$BC = 3\sqrt{7}$

$$E = \frac{1}{3}\left[\underbrace{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}} - \operatorname{cosec}\alpha\right]$$

$$E = \frac{1}{3}\left[\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha\right]$$

$$E = \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\alpha$$

$$E = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{7} \rightarrow \quad \therefore \boxed{E = \sqrt{7}}$$ **Rpta. B**

3 En un triángulo rectángulo ABC $(C = 90°)$, se cumple que $a^2 + b^2 + c^2 = 20\ m^2$; y $\operatorname{cotg} A = 9\cdot\operatorname{cotg} B$. Halla el área de la región triangular ABC.

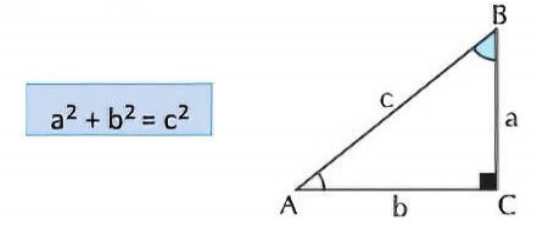
A) $0{,}25\ m^2$ B) $0{,}5\ m^2$ C) $0{,}75\ m^2$

D) $1\ m^2$ E) $1{,}5\ m^2$

Resolución

- Del enunciado:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- Del dato: $\underbrace{a^2 + b^2} + c^2 = 20$

$c^2 \quad + c^2 = 20$

$c^2 = 10$

$c = \sqrt{10}$

- Además: $\operatorname{cotg} A = 9\operatorname{cotg} B$

$\frac{b}{a} = 9\left(\frac{a}{b}\right)$

$b^2 = 9a^2$

$b = 3a$

- Reemplazando en: $a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + 9a^2 = 10$

$10a^2 = 10$

$a = 1 \rightarrow b = 3$

- Nos piden: $S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{1\cdot 3}{2}$

$\therefore \boxed{S_{\triangle ABC} = 1{,}5\ m^2}$ **Rpta. E**

4 En la figura, halla "BD" en términos de "a" y "α".

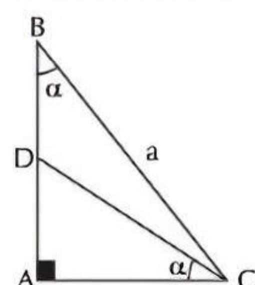
A) a sen α sec 2α

B) a sen 2α sec α

C) a cos 2α sec α

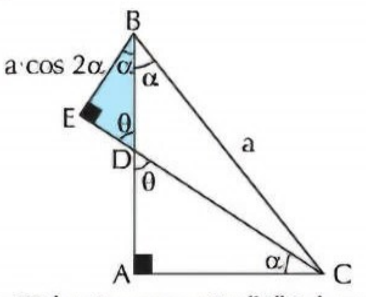
D) a cosα sec 2α

E) a cos α cosec 2α



Resolución

- De la figura:



- Se prolonga CD hasta un punto "E" tal que $\overline{CE} \perp \overline{BE}$, además: $\theta + \alpha = 90°$.
- En el $\triangle$ BEC: $\cos 2\alpha = \frac{EB}{a} \rightarrow EB = a\cos 2\alpha$
- En el $\triangle$ BED:

$\sec\alpha = \frac{BD}{EB} \rightarrow BD = EB\cdot\sec\alpha$

$\therefore \boxed{BD = a\cos 2\alpha\sec\alpha}$ **Rpta. C**

5 En un triángulo ABC, recto en "C" se tiene que:

$$\frac{\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{cotg} B}{1-\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{cotg} A}{1-\cos B}$$

Halla "tg A + tg B".

A) 1 B) 2 C) 3 D) –1 E) –2

Resolución

- De la condición:

$$\frac{\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{cotg} B}{1-\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{cotg} A}{1-\cos B}$$

- Obtenemos:

$$\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}}{\left(1-\frac{a}{c}\right)} = \frac{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}}{\left(1-\frac{a}{c}\right)}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2} \rightarrow a^4 = b^4 \quad \therefore\ a = b \ldots (1)$$

- De la expresión incógnita:
  "tg A + tg B"; obtenemos:

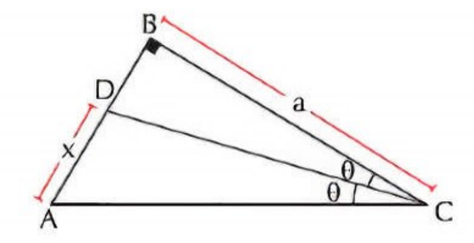
$$\text{tg A} + \text{tgB} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ \ldots (2)$$

- Reemplazamos (1) en (2):

$$\text{tg A} + \text{tgB} = \frac{b}{b} + \frac{b}{b} = 1 + 1 = 2$$

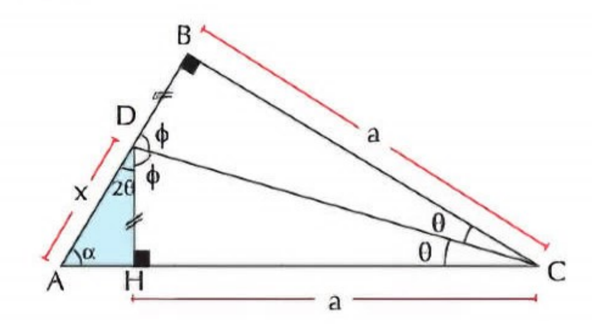
$\therefore$ **tg A + tg B = 2** **Rpta. B**

6 De la figura, halla "x" en términos de "a" y "θ".



A) a tg θ · sen 2θ B) a tg θ · sec 2θ
C) a senθ · cos θ D) a sen θ · sen 2θ
E) a cos θ · sec 2θ

Resolución



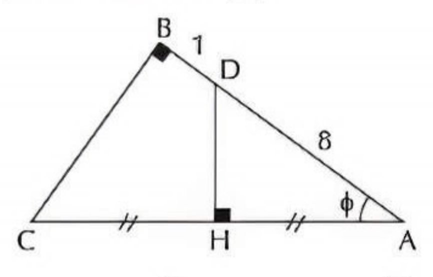
- En el ◺ DBC: $\text{tg}\ \theta = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{a}$

$$a \cdot \text{tg}\ \theta = BD \rightarrow DH = a \cdot \text{tg}\ \theta$$

- En el ◺ AHD: $\sec 2\theta = \frac{DA}{DH} = \frac{x}{a \cdot \text{tg}\ \theta}$

$\therefore$ **$a \cdot \text{tg}\ \theta \cdot \sec 2\theta = x$** **Rpta. B**

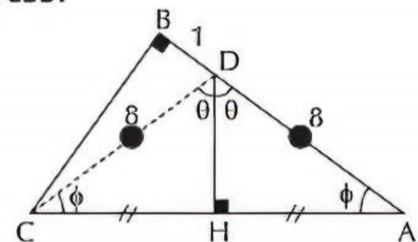
7 Del gráfico, calcular "tg ϕ".



A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{7}/2$ C) $\sqrt{7}/3$
D) $\sqrt{7}/4$ E) $\sqrt{7}/5$

Resolución

- En el ◺ CBD:



Por el teorema de Pitágoras: $BC^2 = 8^2 - 1^2$
$BC = \sqrt{63}$
$BC = 3\sqrt{7}$

- En el ◺ CBA: $\text{tg}\ \phi = \frac{BC}{BA} = \frac{3\sqrt{7}}{9}$

$\therefore$ **$\text{tg}\ \phi = \sqrt{7}/3$** **Rpta. C**

8 Si se cumple que:
sen (x + 10°) · cosec (3y + 20°) = 1 ... (1)
tg (2x + y) · tg x = 1 ... (2)
calcular x – y.

A) 26° B) 24° C) 22° D) 20° E) 18°

Resolución

- De (1): sen(x + 10°) · cosec(3y + 20°) = 1
  x + 10° = 3y + 20°
  x – 3y = 10°... (3)

- De (2): $\text{tg}(2x + y) = \frac{1}{\text{tg}\ x}$
  tg(2x + y) = cotg x
  2x + y + x = 90°
  3x + y = 90°... (4)

- Resolviendo ❸ y ❹:

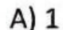
$$\begin{array}{lcl} x - 3y = 10° & \longrightarrow & x - 3y = 10° \\ 3x + y = 90° & \xrightarrow{(\times 3)} & 9x + 3y = 270° \quad (+) \\ & & \overline{10x = 280°} \\ & & x = 28° \end{array}$$

- Reemplazando en ❹: $3(28°) + y = 90°$

$$84° + y = 90°$$
$$y = 6°$$

- Nos piden: $x - y = 28° - 6°$

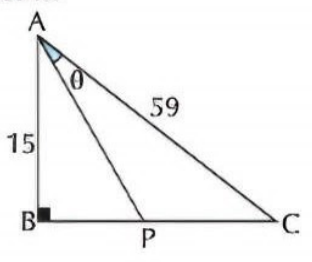
$$\therefore \boxed{x - y = 22°}$$ **Rpta.**

 Del gráfico, calcula:

$$E = 2\text{cotg }\theta - \sqrt{13}\text{ sen }\theta$$

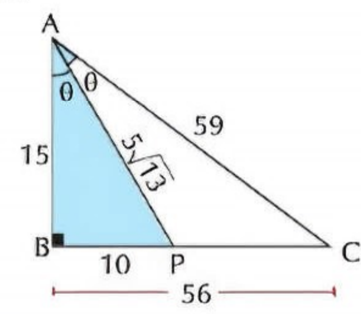
siendo AP bisectriz.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Resolución

- En el gráfico:



Por Pitágoras

$$BC^2 = 39^2 - 15^2$$
$$BC = \sqrt{1296}$$
$$\boxed{BC = 36}$$

- Por la propiedad de la bisectriz:

$$\frac{BP}{15} = \frac{PC}{39} \quad \rightarrow \quad \frac{BP}{5} = \frac{36 - BP}{13}$$

$$13\text{ BP} = 180 - 5\text{ BP}$$
$$\rightarrow \boxed{BP = 10}$$

- En el $\triangle$ ABP: $AP^2 = 15^2 + 10^2$

$$AP = \sqrt{325}$$
$$AP = 5\sqrt{13}$$

- Nos piden:

$$E = 2\left(\frac{15}{10}\right) - \sqrt{13}\left(\frac{10}{5\sqrt{13}}\right)$$

$$E = 3 - 2 \quad \rightarrow \quad E = 1$$ **Rpta.**

❿ Si $\text{sen } 9x - \cos 4x = 0$, calcula:

$$P = \frac{\text{tg } 7x}{\text{cotg } 6x}$$

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) ½

Resolución

- Del dato: $\text{sen } 9x = \cos 4x$

$$9x + 4x = 90°$$
$$13x = 90°$$

- Pero: $7x + 6x = 13x$

$$7x + 6x = 90°$$
$$\text{R.T. }(7x) = \text{Co –R.T. }(6x)$$
$$\text{tg } 7x = \text{cotg } 6x$$
$$\frac{\text{tg } 7x}{\text{cotg } 6x} = 1$$

$$\therefore \boxed{P = 1}$$ **Rpta.**

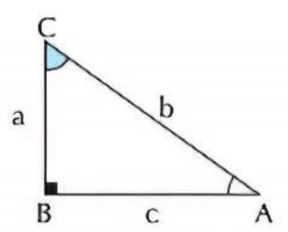
⓫ En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se sabe que el perímetro es igual a 8 m. Halla la hipotenusa, sabiendo que se cumple:

$$(1 + \text{sen A})(1 + \text{sen C}) = \frac{9}{8}$$

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{16}{9}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{9}{2}$

Resolución

- Graficando:



Teorema de Pitágoras: $\boxed{a^2 + c^2 = b^2}$

- Del dato:

$$a + b + c = 8$$
$$(a + b + c)^2 = (8)^2$$
$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{b^2 \text{ (de } a^2 + c^2)} + 2ab + 2ac + 2bc = 64$$
$$2b^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 64$$
$$b^2 + ab + ac + bc = 32$$

- Además:

$$(1+\text{sen } A)(1+\text{sen } C)=\frac{9}{8}$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)=\frac{9}{8}$$

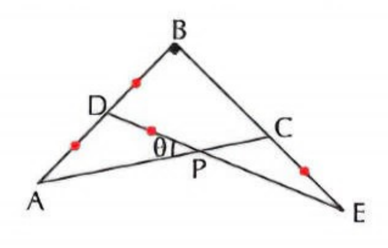
$$(b+a)(b+c)=\frac{9}{8}b^2$$

$$\underbrace{b^2+ab+ac+bc}=\frac{9}{8}b^2$$

$$32=\frac{9}{8}b^2$$

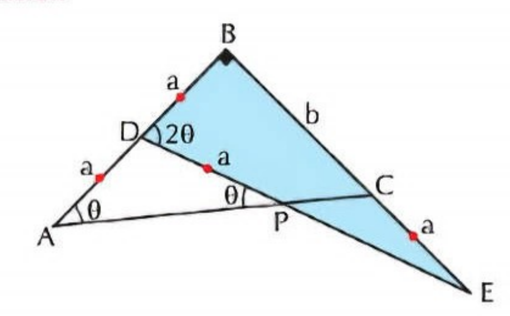
$$b=\sqrt{\frac{256}{9}} \rightarrow \boxed{b=\frac{16}{3}}$$ **Rpta.**

12 De la figura, halla $R = \text{tg } 2\theta - 2 \text{ tg } \theta$.



A) 1/2 B) 1 C) 2 D) 3/2 E) 3/4

Resolución



- Observamos: Δ ADP: Isósceles

$\sphericalangle DPA = \sphericalangle DAP = \theta$

- También: $\sphericalangle BDE = 2\theta$ ($\sphericalangle$ exterior)
- En el ◺ DBE: $\text{tg } 2\theta = \frac{a+b}{a}$
- En el ◺ ABC: $\text{tg } \theta = \frac{b}{2a}$
- Nos piden:

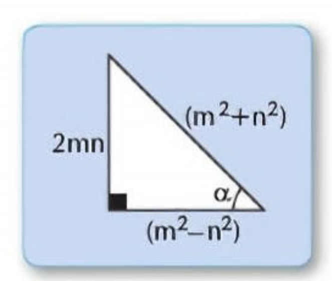
$$R=\frac{a+b}{a}-2\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$R=\frac{a+b-b}{a} \rightarrow \boxed{R=1}$$ **Rpta.**

Estudio del triángulo pitagórico

Todo triángulo pitagórico tiene sus lados expresados por números enteros positivos. Dichos lados tienen la siguiente forma (ver figura). Siendo "m" y "n" números enteros positivos.

Además: $m > n$





Si elegimos valores de "m" y "n" (números primos enteros entre sí) tal que (m + n) resulte un número impar, se obtienen triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados también son números primos entre sí.

Ejemplo: Cuando $m = 5$ y $n = 2$



Ejemplo: Cuando $m = 8$ y $n = 3$

$2(8\times3)=48$

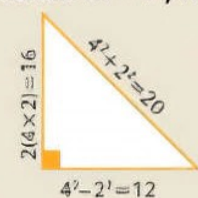
$8^2+3^2=73$

$8^2-3^2=55$



Cuando los valores de "m" y "n" (no son primos entre sí) o cuya suma de "m" y "n" sea un número par, se obtienen triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados están expresadas por números que tienen un divisor común.

Ejemplo: Cuando m = 4 y n = 2



Ejemplo: Cuando m = 7 y n = 3

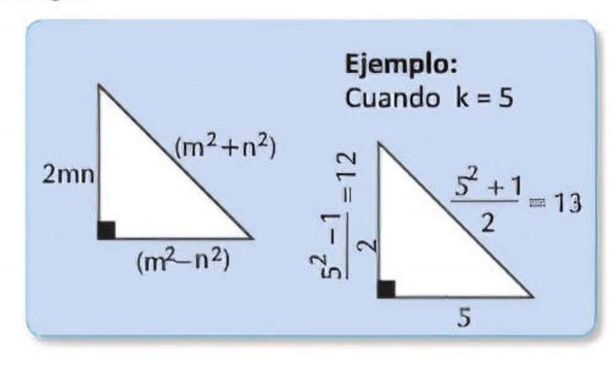


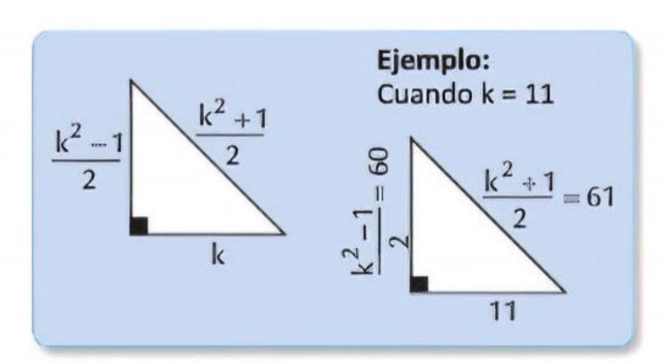
Caso particular:

Cuando se tiene dos números enteros (m y n), pero consecutivos; entonces se cumplirá:

$$m = \frac{k^2+1}{2} \quad y \quad n = \frac{k^2-1}{2}$$; siendo k un número impar.

Luego:





Razones trigonométricas de ángulos especiales o notables

Razones trigonométricas del ángulo de 45°

Sean los catetos del ⊿ ABC: AB = BC = L

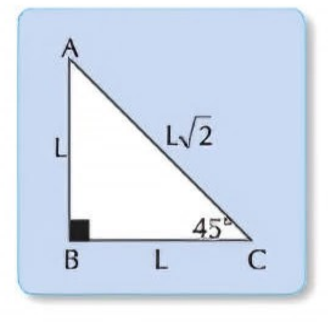
Por el teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$$

$$AC = \sqrt{2L^2} = \sqrt{2}\sqrt{L^2}$$

$$AC = \sqrt{2}$$



Luego, calculamos las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \text{cosec } 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \sec 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{cotg } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

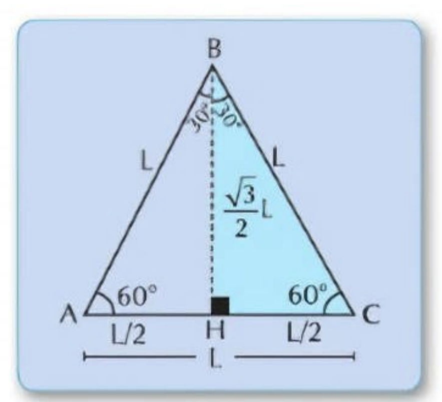
Para hallar las razones trigonométricas de 30° y 60°, construimos un triángulo equilátero, veamos:
En el ◺ BHC, calculamos BH, por el teorema de Pitágoras:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

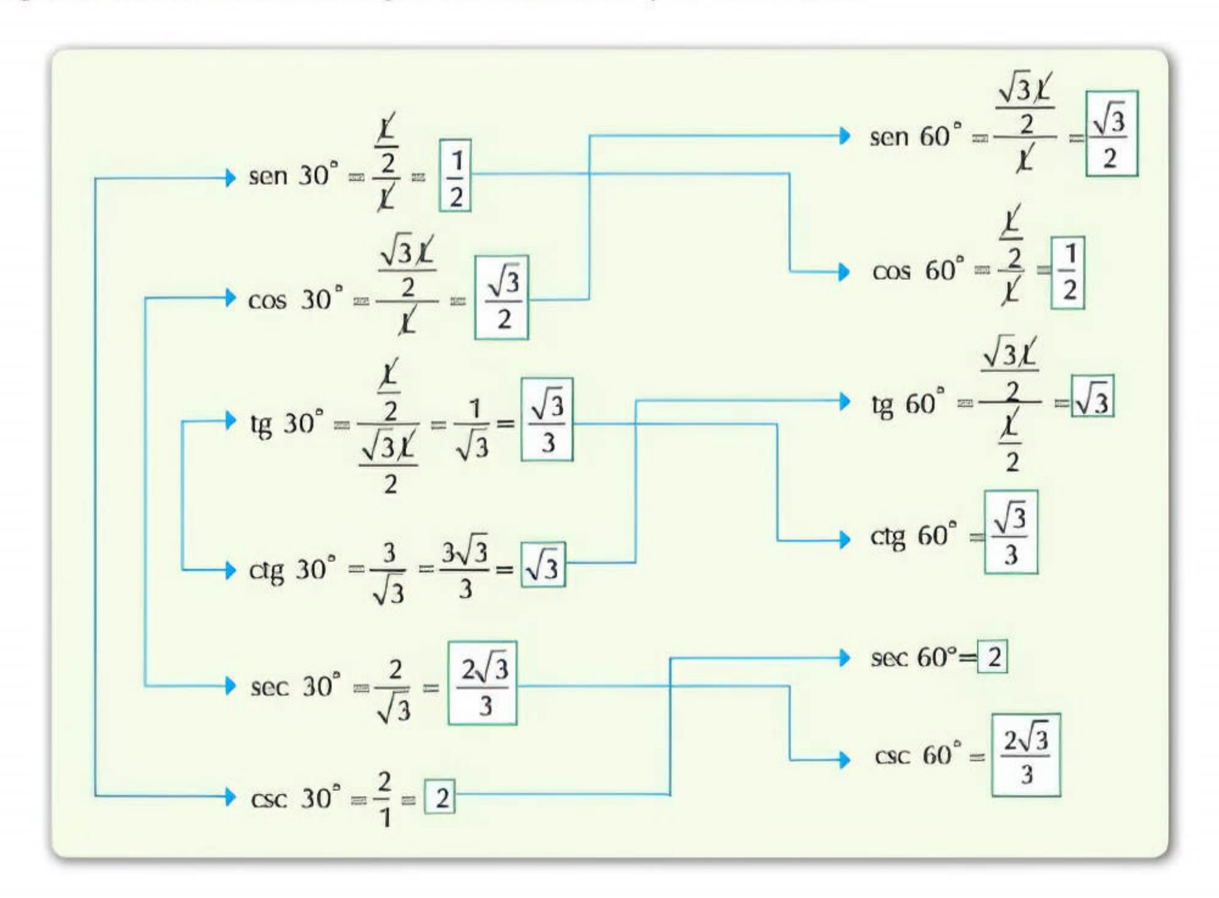
$$L^2 = BH^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$L^2 = BH^2 + \frac{L^2}{4} \rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = BH^2 \rightarrow \frac{3L^2}{4} = BH^2$$

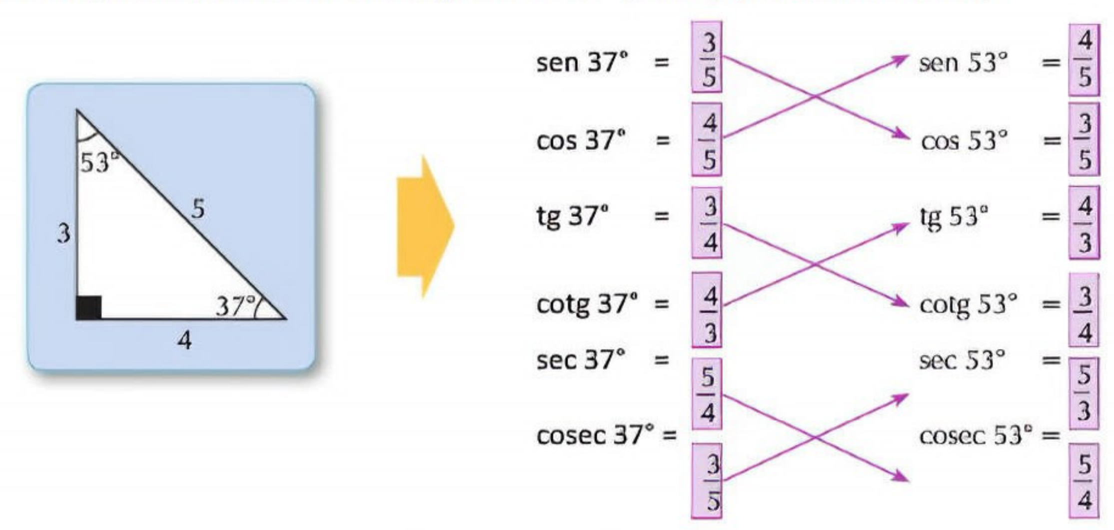
$$\sqrt{\frac{3L^2}{4}} = BH \rightarrow \frac{\sqrt{3}\sqrt{L^2}}{\sqrt{4}} \rightarrow \therefore \boxed{\frac{\sqrt{3}L}{2} = BH}$$



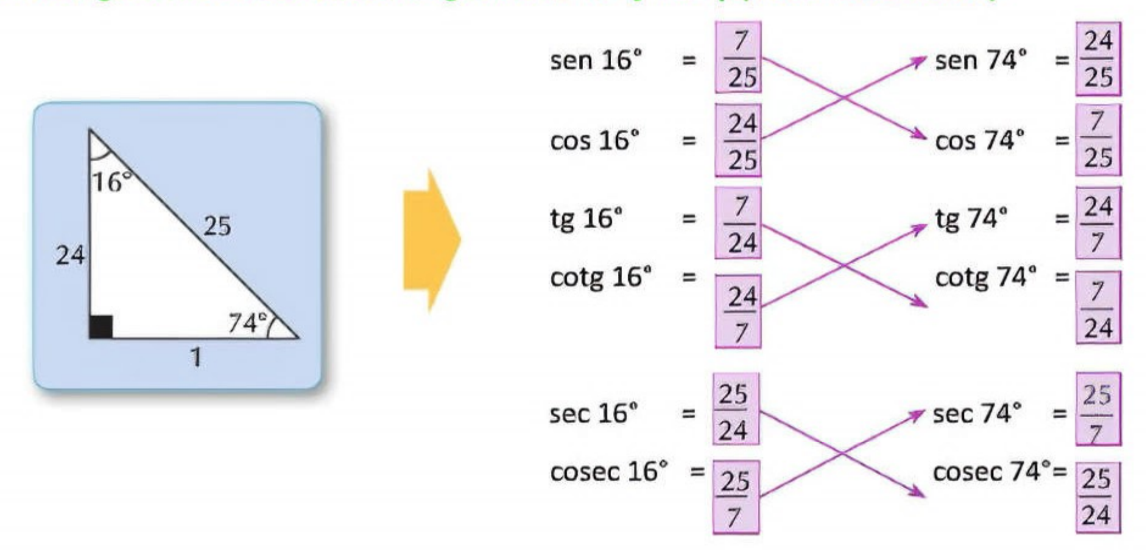
Luego, calculamos las razones trigonométricas de 30° y 60° en el ΔBHC.



Razones trigonométricas de los ángulos de 37° y 53° (aproximadamente)



Razones trigonométricas de los ángulos de 16° y 74° (aproximadamente)



Razones trigonométricas de los ángulos de 15° y 75° (aproximadamente).

Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de 15° y 75° tomamos como referencia el ◺ notable de 30° y 60°, luego prolongamos AB (como se muestra en la figura) hasta obtener un triángulo isósceles EBC, siendo: EB = BC = 2.

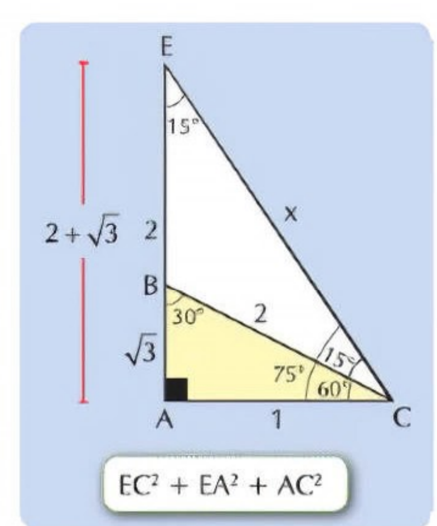
En el ◺ EAC, calculamos el valor de "x" por medio del teorema de Pitágoras.

$$x^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2 \rightarrow x^2 = 4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 1$$

$$x^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$x^2 = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$



Luego, calculamos las razones trigonométricas de 15° y 75°. (aproximadamente)

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \rightarrow \cos 75^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

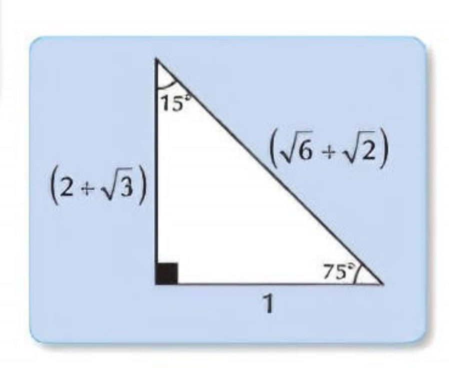
$$\cos 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \rightarrow \text{sen } 75^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{tg } 15^\circ = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \boxed{2-\sqrt{3}} \rightarrow \text{cotg } 75^\circ = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{cotg } 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = \boxed{2+\sqrt{3}} \rightarrow \text{tg } 75^\circ = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

$$\sec 15^\circ = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \rightarrow \text{cosec } 75^\circ = \boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\text{cosec } 15^\circ = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \rightarrow \sec 75^\circ = \boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$



Razones trigonométricas de los ángulos de 22°30' y 67°30' (aproximadamente)

Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de 22°30' y 67°30' tomamos como referencia el ⊿ notable de 45°, luego procedemos de igual manera que en el caso anterior.

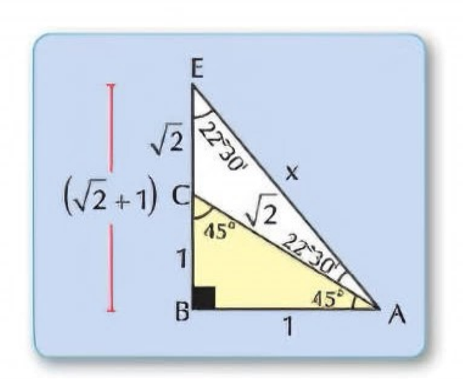
En el ⊿ EBA; calculamos el valor de "x" por medio del teorema de Pitágoras.

$$EA^2 = EB^2 + BA^2$$

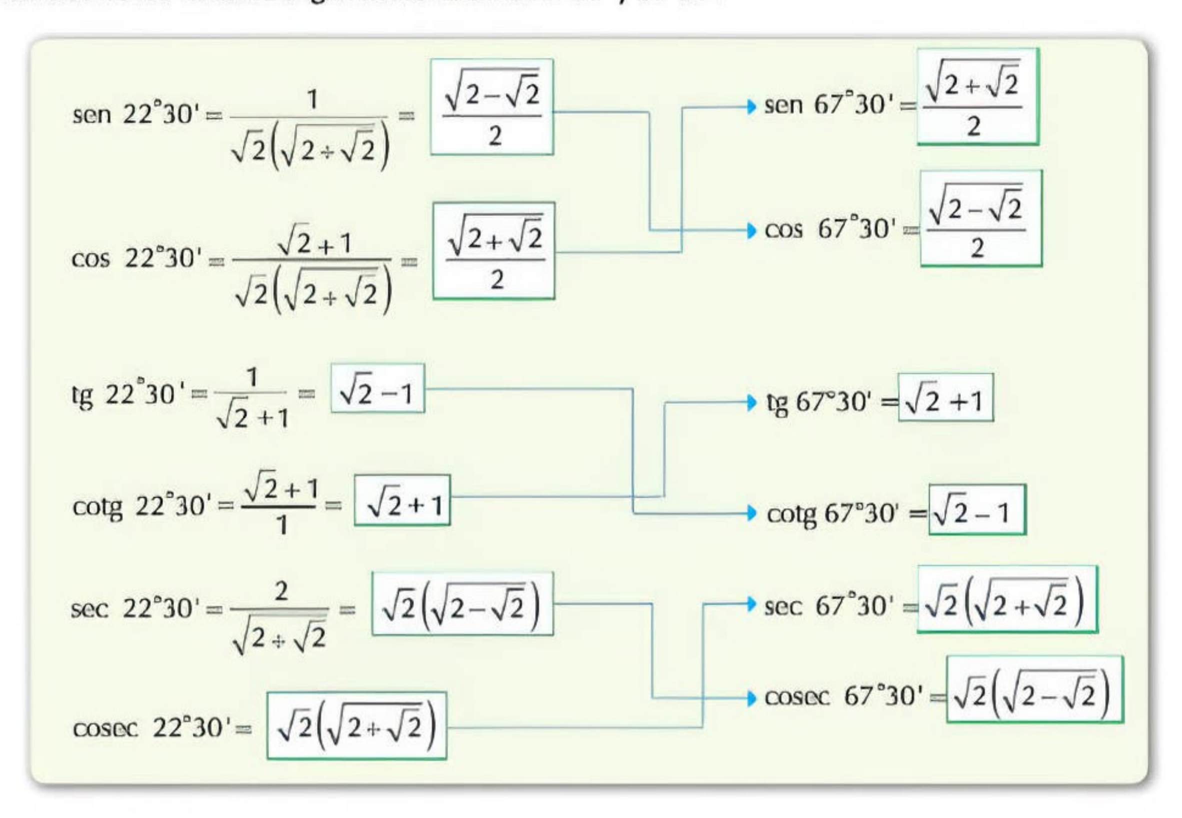
$$x^2 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 + (1)^2$$

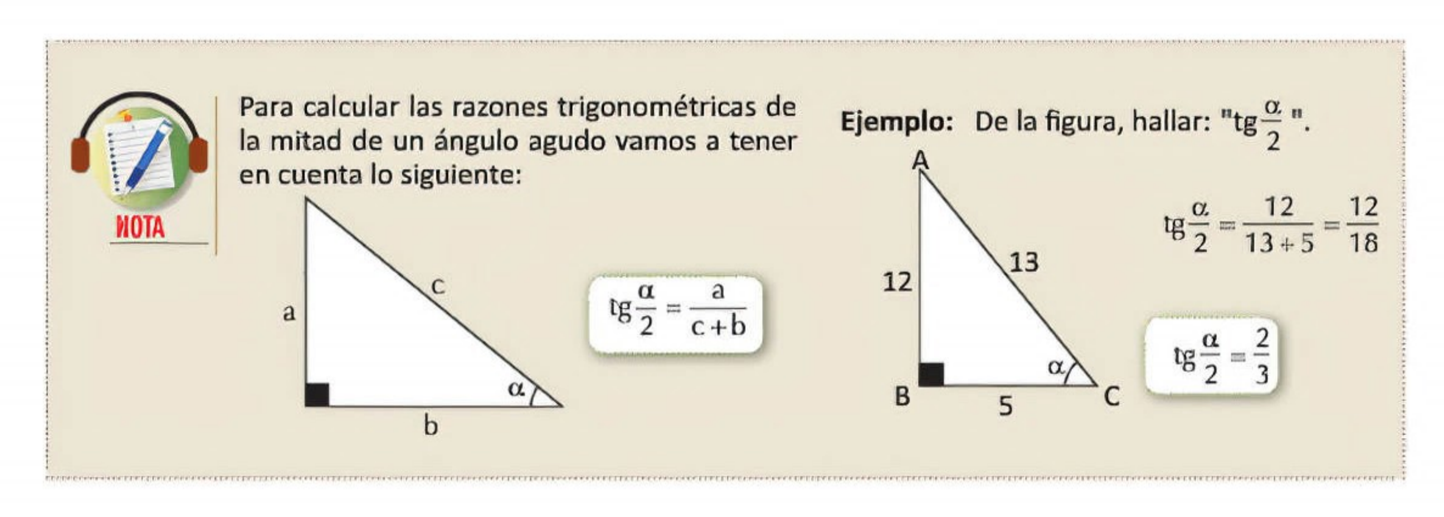
$$x^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2} = 2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$x = \sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$



Luego, calculamos las razones trigonométricas de 22°30' y 67°30'.



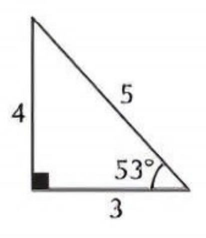


Razones trigonométricas de 26°30' y 63°30'

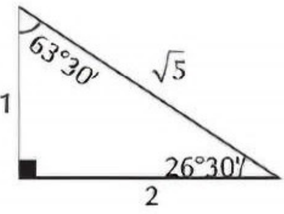
Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de 26°30' y 63°30' tomamos como referencia el ◺ notable de 37° y 53° procediendo como en el ejemplo anterior.

$$\text{tg}\left(\frac{53°}{2}\right) = \frac{4}{5+3}$$

$$\text{tg } 26°30' = \frac{1}{2}$$



A partir de este resultado construimos el triángulo rectángulo:



$\text{sen } 26°30' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$	$\text{sen } 63°30' = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
$\cos 26°30' = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$	$\cos 63°30' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
$\text{tg } 26°30' = \dfrac{1}{2}$	$\text{tg } 63°30' = \dfrac{2}{1} = 2$
$\text{cotg } 26°30' = \dfrac{2}{1} = 2$	$\text{cotg } 63°30' = \dfrac{1}{2}$
$\sec 26°30' = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$\sec 63°30' = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$
$\text{cosec } 26°30' = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$	$\text{cosec } 63°30' = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Razones trigonométricas de 18°30' y 71°30'

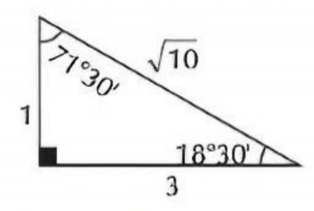
Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de 18°30' y 71°30' tomamos como referencia el ◺ notable de 37° y 53°usando el criterio anterior:

$$\text{tg}\left(\frac{37^\circ}{2}\right) = \frac{3}{5+4}$$

$$\text{tg } 18^\circ 30 = \frac{1}{3}$$

3
5
37°
4

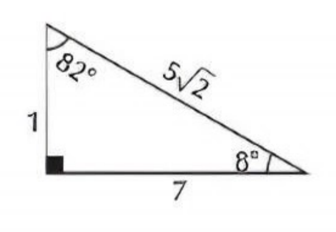
A partir de este resultado construimos el triángulo rectángulo:



$\text{sen } 18°30' = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$	$\text{sen } 71°30' = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
$\cos 18°30' = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$	$\cos 71°30' = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$
$\text{tg } 18°30' = \dfrac{1}{3}$	$\text{tg } 71°30' = \dfrac{3}{1} = 3$
$\text{cotg } 18°30' = \dfrac{3}{1} = 3$	$\text{cotg } 71°30' = \dfrac{1}{3}$
$\sec 18°30' = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$	$\sec 63°30' = \dfrac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$
$\text{cosec } 18°30' = \dfrac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$	$\text{cosec } 63°30' = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

Razones trigonométricas de 8° y 82°.

$\text{sen } 8° = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$	$\text{tg } 8° = \frac{1}{7}$	$\sec 8° = \frac{5\sqrt{2}}{7}$
$\cos 8° = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$	$\text{cotg } 8° = \frac{7}{1} = 7$	$\text{cosec } 8° = \frac{5\sqrt{2}}{1} = 5\sqrt{2}$
$\text{sen } 82° = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$	$\text{tg } 82° = \frac{7}{1} = 7$	$\sec 82° = \frac{5\sqrt{2}}{1} = 5\sqrt{2}$
$\cos 82° = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$	$\text{cotg } 82° = \frac{1}{7}$	$\text{cosec } 82° = \frac{5\sqrt{2}}{7}$



Valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables

	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
16°	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{7}$
74°	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{25}{24}$
8°	$\frac{\sqrt{2}}{10}$	$\frac{7\sqrt{2}}{10}$	$\frac{1}{7}$	7	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$	$5\sqrt{2}$
82°	$\frac{7\sqrt{2}}{10}$	$\frac{\sqrt{2}}{10}$	7	$\frac{1}{7}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$
22°30'	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$
67°30'	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$
26°30'	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}$
63°30'	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	2	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
18°30'	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{10}$
71°30'	$\frac{3\sqrt{10}}{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$	3	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$

Problemas resueltos

SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICA DE ÁNGULOS NOTABLES

1 Calcular el valor de:

$$P = \frac{\sec^2 30^\circ \cdot tg\,45^\circ + \cos 60^\circ \cdot cotg\,37^\circ}{cosec\,45^\circ \cdot cosec\,30^\circ}$$

Resolución

- Recordemos:

$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$cotg\,37^\circ = \frac{4}{3}$
$tg\;45^\circ = 1$	$cosec\;45^\circ = \sqrt{2}$
$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$cosec\;30^\circ = 2$

- Reemplazando:

$$P = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot (1) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}{(\sqrt{2})(2)}$$

$$P = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \; P = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ **Rpta.**

2 Si sen $(3x + 17^\circ) = \cos(x + 23^\circ)$, calcular el valor de:

$$E = \frac{sen\,(2x + 12^\circ) + cot\,g\,(4x - 5^\circ)}{tg\,(4x + 3^\circ)}$$

Resolución

- De la condición: $sen(3x + 17^\circ) = \cos(x + 23^\circ)$

$$\rightarrow 3x + 17^\circ + x + 23^\circ = 90^\circ$$
$$4x = 50^\circ$$
$$2x = 25^\circ$$

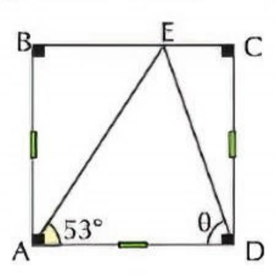
- Reemplazando:

$$E = \frac{sen\,(25^\circ + 12^\circ) + cotg(50^\circ - 5^\circ)}{tg\,(50^\circ + 3^\circ)}$$

$$E = \frac{sen\,37^\circ + cotg\,45^\circ}{tg\,53^\circ}$$

$$E = \frac{\frac{3}{5} + 1}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{24}{20} \qquad \therefore \; E = \frac{6}{5}$$ **Rpta.**

3 Del gráfico, calcula el valor de "tg θ".



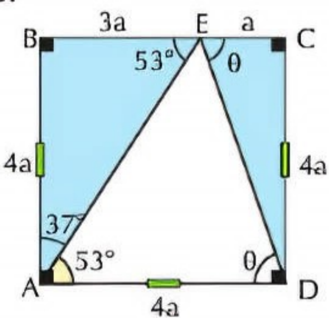
Resolución

- Trabajando en el gráfico:
- ◺ ABE:

  Notable (37°;53°)
- En el ◺ ECD:

$$tg\,\theta = \frac{4a}{a}$$

$\therefore$ $tg\,\theta = 4$ **Rpta.**



4 Si se cumple que:

$$cotg(90^\circ - x) \cdot cotg\left(\frac{x}{2} + 7^\circ 30'\right) = 1,$$

calcula: $E = \frac{tg\,5x - cotg\,2x}{\sec^2 3x}$

Resolución

- De la condición:

$$\underbrace{cotg(90^\circ - x)}_{tg\,x} \cdot cotg\left(\frac{x}{2} + 7^\circ 30'\right) = 1$$

$$tg\,x \cdot cotg\left(\frac{x}{2} + 7^\circ 30'\right) = 1$$

$$x = \frac{x}{2} + 7^\circ 30'$$

$$\frac{x}{2} = 7^\circ 30'$$

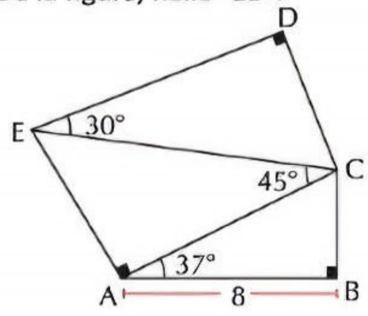
$$x = 15^\circ$$

- Reemplazando: $E = \frac{tg\,75^\circ - cot\,g\,30^\circ}{\sec^2 45^\circ}$

$$E = \frac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{2}$$

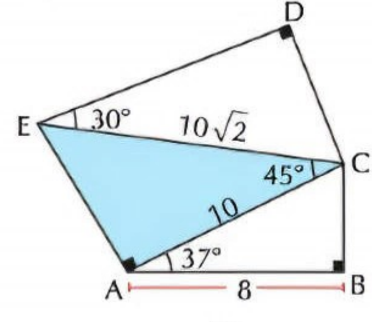
$\therefore$ $E = 1$ **Rpta.**

5 De la figura, halla "ED".



Resolución

- Revisando el gráfico:



- En el ⊿ ABC: $\sec 37° = \dfrac{AC}{8}$

$$\rightarrow AC = 8\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$AC = 10$$

- En el ⊿ CAE: $\sec 45° = \dfrac{EC}{10}$

$$\rightarrow EC = 10\left(\sqrt{2}\right)$$

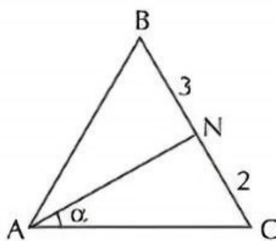
$$EC = 10\sqrt{2}$$

- En el ⊿ CDE: $\cos 30° = \dfrac{ED}{10\sqrt{2}}$

$$ED = 10\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

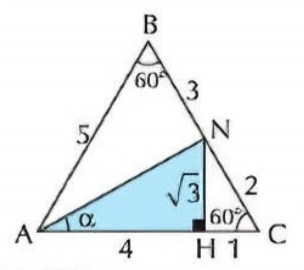
$$\therefore \boxed{ED = 5\sqrt{6}}$$ **Rpta.**

6 En la figura, calcula "tg α" siendo ABC triángulo equilátero.



Resolución

- En el gráfico:



- Trazamos $\overline{NH} \perp \overline{AC}$.
- ⊿ NHC: Notable (30°; 60°)
- En el ⊿ AHN:

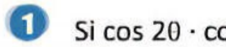
$$\therefore \boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$ **Rpta.**

Problemas resueltos — SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

1 Si $\cos 2\theta \cdot \operatorname{cosec}(\theta + 45°) = 1$, calcula:

$$P = \sqrt{3}\cos 2\theta \cdot \sec 4\theta$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$



Resolución

- De la condición:

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}(\theta + 45°)}$$

$$\cos 2\theta = \operatorname{sen}(\theta + 45°)$$

$$2\theta + \theta + 45° = 90°$$

$$3\theta = 45°$$

$$\theta = 15°$$

- Reemplazando:

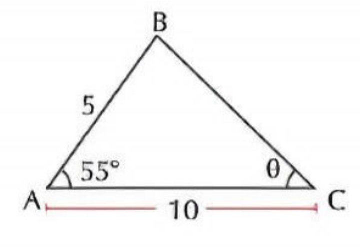
$$P = \sqrt{3}\cos 30° \cdot \sec 60°$$

$$P = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2)$$

$$\therefore \boxed{P = 3}$$ **Rpta. C**

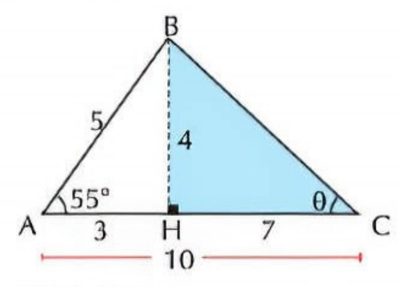
2 Del gráfico, halla cotg θ.

A) 7/4
B) 4/7
C) 2/9
D) 4/9
E) 9/4



Resolución

- En el gráfico, notamos:

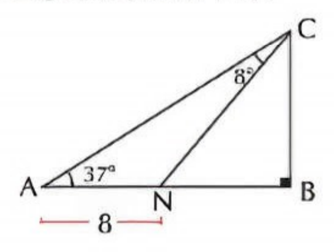


- Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$
- ◺ AHB: Notable (53° ; 37°)
- En el ◺ BHC:

$\therefore$ $\cot g\ \theta = \frac{7}{2}$ **Rpta. C**

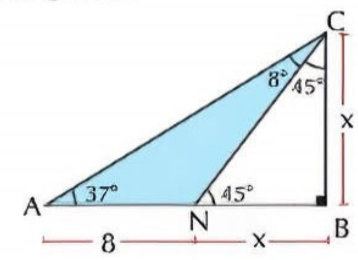
3 A partir del gráfico, halla "BN".

A) 12
B) 18
C) 20
D) 24
E) 30



Resolución

- Analizando el gráfico:



- Δ ANC: ∢ BNC = 37° + 8° = 45° (∢ exterior)
- ◺ NBC: Notable (45° ; 45°)

$$BN = BC = x$$

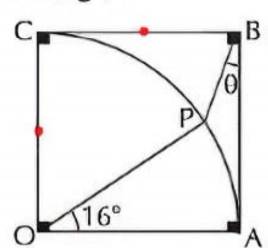
- ◺ ABC: Notable (37°; 53°)

$$\cot g\, 37° = \frac{8+x}{x}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{8+x}{x}$$
$$4x = 24 + 3x$$
$$x = 24$$

$\therefore$ BN = 24 **Rpta. A**

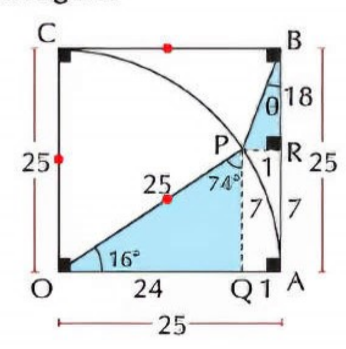
4 De la figura, halla "cotg θ".

A) 15
B) 16
C) 17
D) 18
E) 19



Resolución

- Analizando la figura:



- Trazamos $\overline{PQ} \perp \overline{OA}$ y $\overline{PR} \perp \overline{AB}$
- ◺ OQP Notable (16° ; 74°)

OQ = 24 ; PQ = 7 ; OP = 25

OA = OC = OP = 25

- En el ◺ PRB: $\cot g\ \theta = \frac{18}{1}$

$\therefore$ cotg θ = 18 **Rpta. D**

5 Si $\operatorname{sen}(3\alpha - \theta) \cdot \sec(3\theta - \alpha) = 2 \operatorname{sen} 30°$, calcula el valor de:

$$K = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{3} + 15°\right) + \operatorname{tg}(\alpha+\theta)}{\sec(\alpha+\theta+15°)}$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

Resolución

- De la condición:

$$\text{sen}(3\alpha - \theta) \cdot \sec(3\theta - \alpha) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{sen}(3\alpha - \theta) = \frac{1}{\sec(3\theta - \alpha)}$$

$$\text{sen}(3\alpha - \theta) = \cos(3\theta - \alpha)$$

$$\rightarrow \quad 3\alpha - \theta + 3\theta - \alpha = 90°$$

$$2\alpha + 2\theta = 90°$$

$$\alpha + \theta = 45°$$

- Reemplazando:

$$K = \frac{\text{sen}\left(\frac{45°}{3} + 15°\right) + \text{tg}(45°)}{\sec(45° + 15°)}$$

$$K = \frac{\text{sen}\,30° + \text{tg}\,45°}{\sec 60°}$$

$$K = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2}$$

$$\therefore \boxed{K = \frac{3}{4}}$$ **Rpta. A**

6 Calcula los valores que puede tomar "x" en la igualdad:

$$x^2\text{cosec}\,30° + 3x\sec 53° - \text{tg}^2\,60° = 0$$

A) $\left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$ B) $\left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$ C) $\left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$

D) $\left\{-3; -\frac{1}{2}\right\}$ E) $\left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

Resolución

Reemplazando los valores notables:

$$x^2(2) + 3x\left(\frac{5}{3}\right) - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

x ╲╱ +3
2x ╱╲ −1

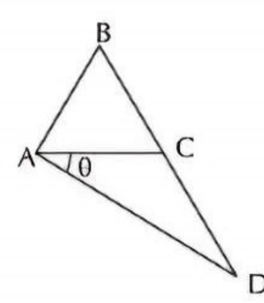
$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

i) $x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3$

ii) $2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1/2$

$$\therefore \boxed{x = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}}$$ **Rpta. C**

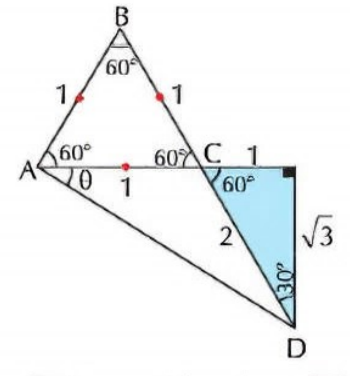
7 Del gráfico, halla "tg θ", si $AB = BC = AC = \frac{CD}{2}$.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución

- Analizando el gráfico:



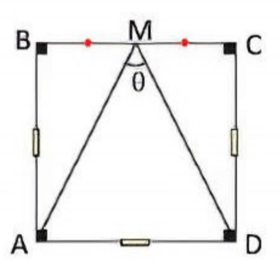
- Prolongamos $\overline{AC}$ hasta "P"; tal que $\overline{AP} \perp \overline{DP}$.
- ◺ CPD Notable (30° ; 60°)

$$PC = 1 \;;\; PD = \sqrt{3} \;;\; CD = 2$$

- Si $CD = 2 \rightarrow AB = BC = AC = 1$
- En el ◺ APD: $\text{tg}\,\theta = \frac{PD}{AP}$

$$\therefore \boxed{\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$ **Rpta. B**

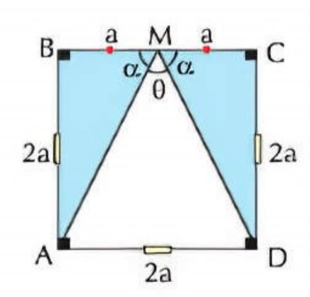
8 Del gráfico, calcula "sen θ".



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Resolución

- Revisando la figura:



- En el ◺ ABM: $tg\ \alpha = \frac{2a}{a} = 2$

$$tg\ \alpha = tg\ 63°30'$$
$$\alpha = 63°30'$$

- Además: $2\alpha + \theta = 180°$

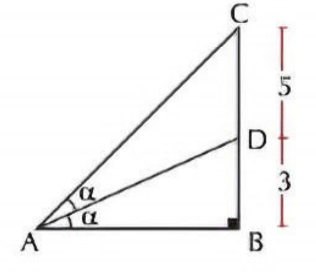
$$2(63°30') + \theta = 180°$$
$$\theta = 53°$$

- Finalmente: $sen\ \theta = sen\ 53°$

$$\therefore \boxed{sen\ \theta = \frac{4}{5}}$$ **Rpta. E**

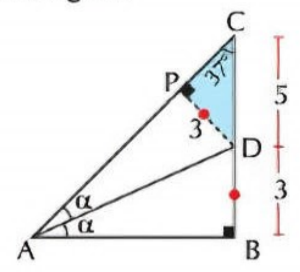
9 En el gráfico, halla "AB".

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10



Resolución

- Trabajando en la figura:



- $\overline{AD}$: es bisectriz.

- Trazamos $\overline{DP} \perp \overline{AC}$

$$BD = DP = 3 \text{ (Propiedad)}$$

- ◺ CPD Notable (37°; 53°)

- En el ◺ ABC: $tg\ 37° = \frac{AB}{8}$

$$AB = 8\ tg\ 37° = 8\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore \boxed{AB = 6}$$ **Rpta. C**

10 Si $sen\ \alpha \cdot cosec\ 4\beta = 1$ ... ❶

$$tg\ \alpha \cdot tg\ 2\beta = 1 \quad ...\ ❷$$

calcula:

$$E = sen^2(\alpha - \beta) + cos^2(\alpha - 2\beta).$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

Resolución

- De ❶: $sen\ \alpha \cdot cosec\ 4\beta = 1$

$$\alpha = 4\beta \ ...\ ❸$$

- De ❷: $tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ 2\beta}$

$$tg\ \alpha = cotg\ 2\beta$$
$$\rightarrow \alpha + 2\beta = 90° \ ...\ ❹$$

- Reemplazando ❸ en ❹:

$$\alpha + 2\beta = 90°$$
$$4\beta + 2\beta = 90°$$
$$\beta = 15°$$

- Reemplazando en ❸: $\alpha = 4(15°)$

$$\alpha = 60°$$

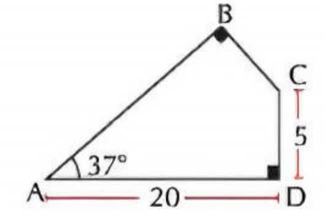
- Nos piden:

$$E = sen^2(60° - 15°) + cos^2(60° - 30°)$$
$$E = sen^2\ 45° + cos^2 30°$$
$$E = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{5}{4}}$$ **Rpta. B**

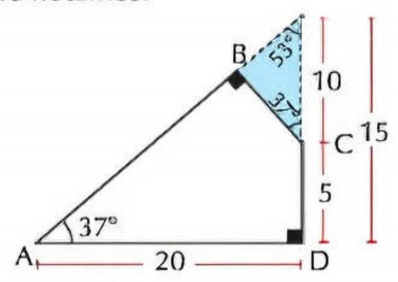
11 En la figura, calcula BC.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 8
E) 10



Resolución

- En la figura notamos:



- Prolongamos AB y DC hasta que se intersecten en un punto "P".
- ◺ ADP Notable (37°; 53°)

$$\text{tg } 37° = \frac{DP}{20} \rightarrow DP = 20\left(\frac{3}{4}\right)$$

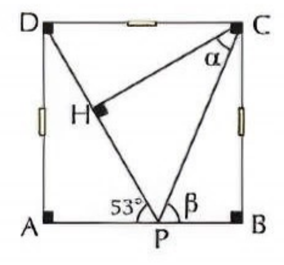
$$\therefore \quad DP = 15$$

- ◺ CBP Notable (37°; 53°)

$$\cos 37° = \frac{BC}{10} \rightarrow BC = 10\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{BC = 8}$$ **Rpta. D**

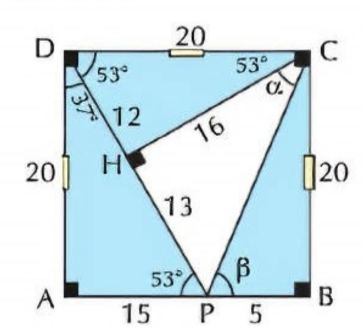
12 En la figura, calcular $E = \text{tg } \alpha - \text{cotg}^2\beta$.



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{2}{5}$

Resolución

- Trabajando la figura:



- ◺ DAP: Notable (37°;53°)

Manteniendo la proporcionalidad de los lados, tomamos convenientemente:

$$AD = 20 \quad ; \quad AP = 15 \quad ; \quad DP = 25.$$

- Además ABCD es un cuadrado:

$\rightarrow AB = BC = CD = AD = 20$

$\rightarrow PB = AB - AP$

$PB = 20 - 15 = 5$

- ◺ CHD Notable (37° ; 53°)

$$\text{sen } 53° = \frac{CH}{20}$$

$$CH = 20\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$CH = 16$$

$$\cos 53° = \frac{DH}{20}$$

$$DH = 20\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$DH = 12$$

- Se observa:

$$HP = DP - DH$$

$$HP = 25 - 12 = 13$$

- Luego:

◺ CHP: $\text{tg } \alpha = \frac{13}{16}$

◺ PBC: $\text{cotg } \beta = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

- Nos piden:

$$E = \frac{13}{16} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{13}{16} - \frac{1}{16} = \frac{12}{16}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{3}{4}}$$ **Rpta. A**

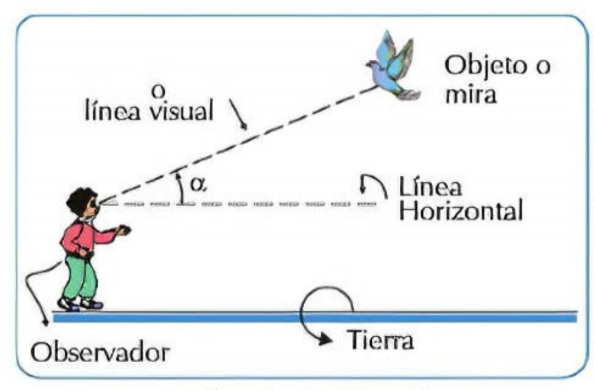
Aplicación de triángulos rectángulos

Ángulos Verticales

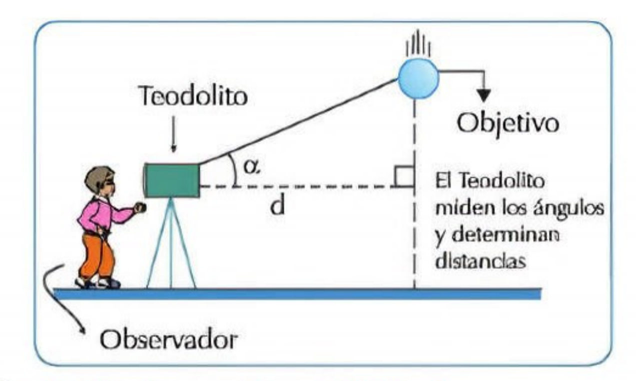
Son aquellos ángulos que se determinan en un plano vertical, formados por la línea de mira y la línea horizontal que parten del ojo del observador.
Algunos ángulos verticales: ángulo de elevación, ángulo de depresión, ángulo de observación o visibilidad y ángulo de depresión del horizonte.

Ángulo de elevación

Es el ángulo que se origina por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.

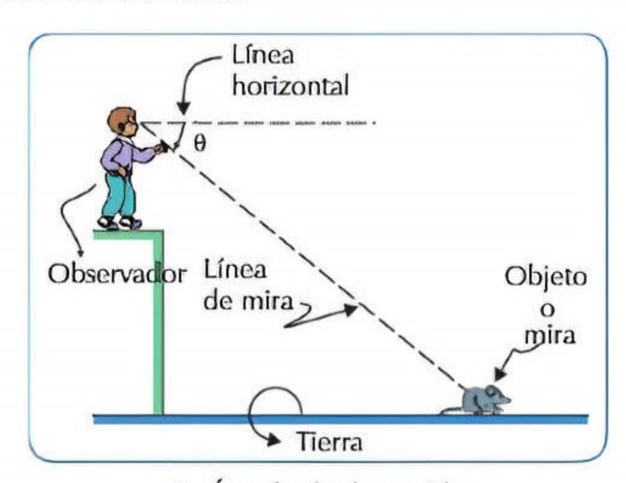


α : Ángulo de elevación



Ángulo de Depresión

Es el ángulo que se origina por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.



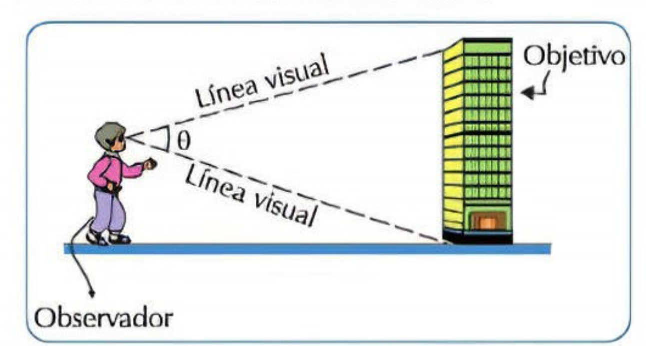
θ : Ángulo de depresión



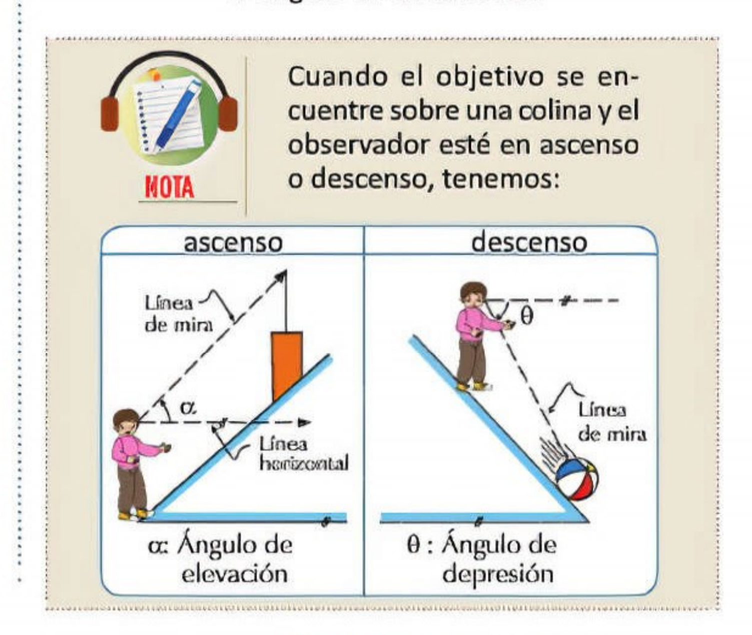
Los ángulo verticales son medidos, a partir de un instrumento denominado Teodolito. (Ver figura)

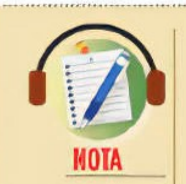
Ángulo de observación o visibilidad

Es aquel ángulo formado por dos líneas visuales que observan a todo el objetivo. (Ver figura)

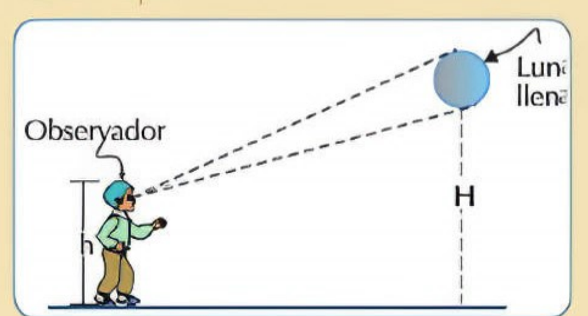


θ: Ángulo de observación





Para ciertos problemas la altura del observador se considera cero (h = 0) ¿Por qué?



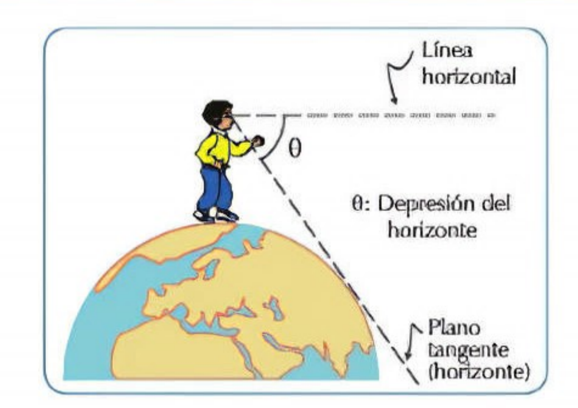
Se nota que la altura del observador (h) respecto a la altura a la que se encuentra la luna (H) es imperceptible.

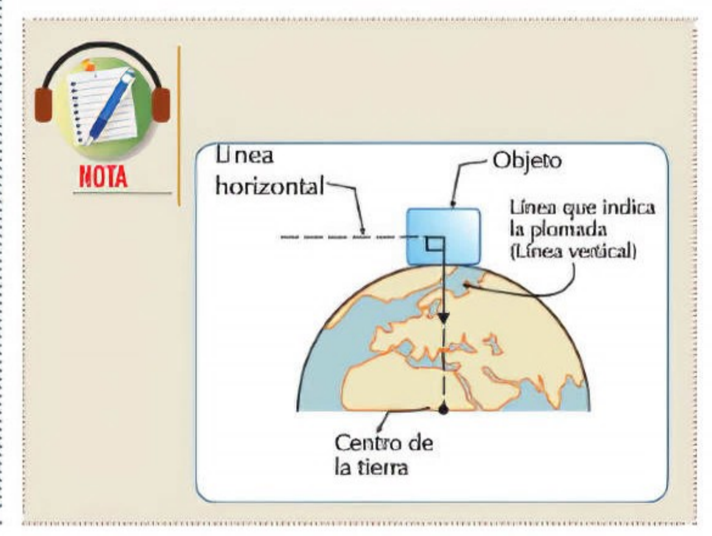
Es por ello que h = 0



Depresión del horizonte

Es aquel ángulo que se forma por un plano tangente a la Tierra y una línea horizontal.





Problemas resueltos

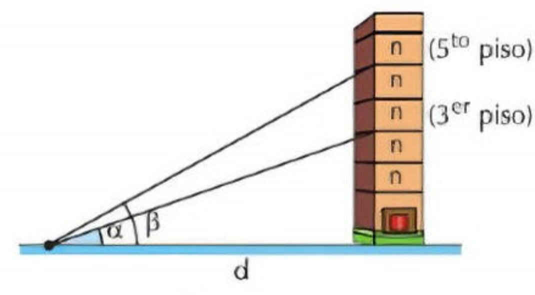
SOBRE ÁNGULOS VERTICALES

1 Desde un punto en Tierra se observa lo alto del tercer piso con un ángulo de elevación "α" y la parte baja del quinto piso con un ángulo de elevación "β"?. Calcular tgβ ctgα

A) 3/4 B) 4/3 C) 5/3 D) 3/5 E) 4/58

Resolución

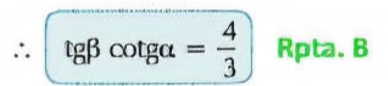
De acuerdo al enunciado tenemos:



De la figura: $\text{tg}\beta = \dfrac{4n}{d}$

$\cot\alpha = \dfrac{d}{3n}$

piden: $\text{tg}\beta \cdot \text{cotg}\alpha = \dfrac{4n}{d} \cdot \dfrac{d}{3n} = \dfrac{4}{3}$



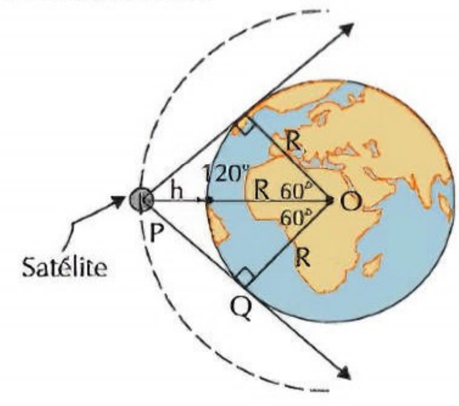
$\therefore$ $\text{tg}\beta\ \text{cotg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ **Rpta. B**

2 Determinar a que altura en km., de la superficie terrestre a la que gira un satélite, cuya visión cubre un arco de 120° en la superficie de la Tierra. Tomar 6 400 km como radio de la Tierra.

A) 1 280 B) 6 400 C) 3 200 D) 1 600 E) 800

Resolución

Del enunciado tenemos:



Piden: h

del ◺ OPQ

$$\sec 60° = \frac{R+h}{R}$$

$$2 = \frac{R+h}{R} \rightarrow h = R$$

$\therefore$ h = 6 400 km **Rpta. B**

3 Desde tres puntos en Tierra, se observa la parte más alta de un árbol de 30 m, con ángulos de elevación cuya suma de senos es 0,94. Si las líneas visuales son proporcionales a 3, 4 y 5; hallar la suma de las cosecantes de los ángulo de elevación.

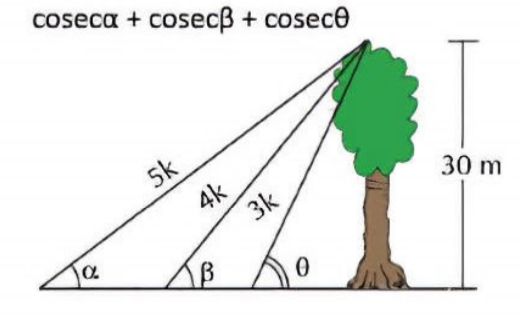
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

Resolución

Del dato tenemos:

- senα + senβ + senθ = 0,94
- Piden:

cosecα + cosecβ + cosecθ



De la figura, reemplazamos en el dato:

$$\frac{30}{3k} + \frac{30}{4k} + \frac{30}{5k} = \frac{94}{100}$$

$$\frac{30}{k}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{94}{100} \rightarrow k = 25$$

Reemplazamos en lo que piden:

$$\frac{5(25)}{30} + \frac{4(45)}{30} + \frac{3(25)}{30} = 10$$

$\therefore$ cosecα + cosecβ + cosecθ = 10 **Rpta. A**

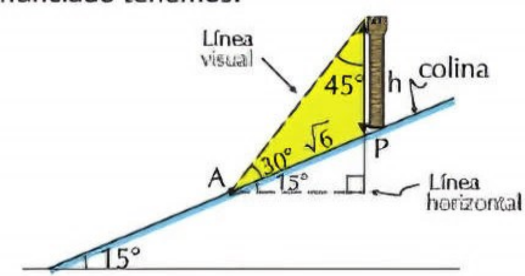
4 Una torre se encuentra al pie de una colina que hace 15° con la horizontal. Un hombre se encuentra en la colina a $\sqrt{6}$ m de la base de la torre, observa la parte más alta de esta con un ángulo de elevación de 45°.

Calcula la altura de la torre.

A) $\sqrt{3}$ m B) $\sqrt{2}$ m C) 2 m D) 3 m E) 1 m

Resolución

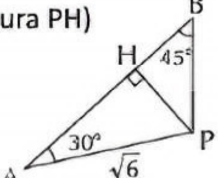
Del enunciado tenemos:



Del Δ sombreado (Trazamos altura PH)

Por ◺ notables: (30° y 45°)

$$PH = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Luego:

BP = h = $\sqrt{3}$ m

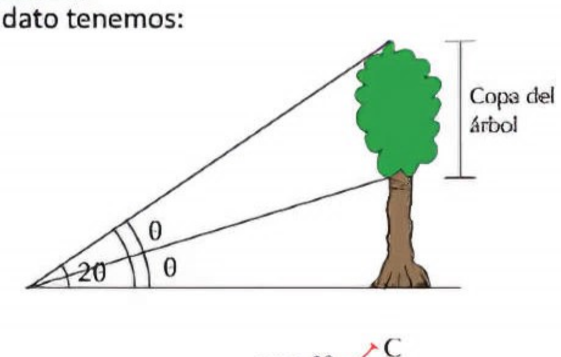
$\therefore$ h = $\sqrt{3}$ m **Rpta.**

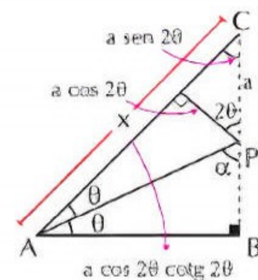
5 Desde un punto en el suelo se observa la parte más alta de un árbol con un ángulo de elevación 2θ y la copa del árbol con un ángulo visual θ. Si la altura de la copa del árbol es de metros, hallar la distancia del punto de observación a la cúspide del árbol.

A) a(sen2θ + cos2θcotgθ) B) a(sen θ + cos θcotg2θ)
C) a(sen2θ + cos2θcotgθ) D) a(sen2θ tgθ)
E) a cos 2θ cotgθ

Resolución

Del dato tenemos:





De la figura:

x = a sen 2θ + a cos 2θ cot θ

x = a (sen 2θ + cos 2θ cotg θ) **Rpta. A**

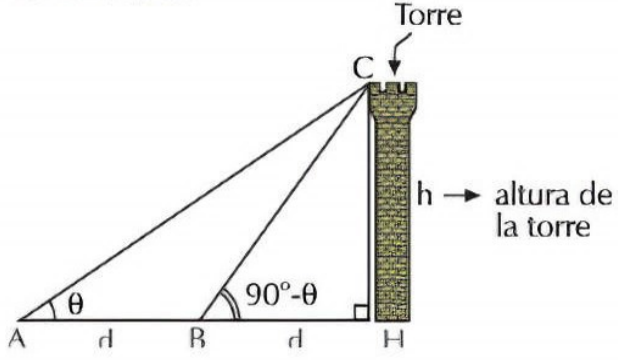
6 Desde un punto se observa lo alto de una torre con un ángulo de elevación θ, desde la mitad de la distancia, el ángulo de elevación es el complemento del anterior. Halle tgθ.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) 1

Resolución

Del enunciado:



Entonces: $\triangle$ AHC : $\text{tg}\theta = \frac{h}{2d}$ ... ❶

$\triangle$ BHC : $\text{tg}\theta = \frac{d}{h}$ ... ❷

Hacemos ❶ × ❷:

$$\text{tg}^2\theta = \frac{h}{2d} \times \frac{d}{h} = \frac{1}{2}$$

∴ $\text{tg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **Rpta. A**

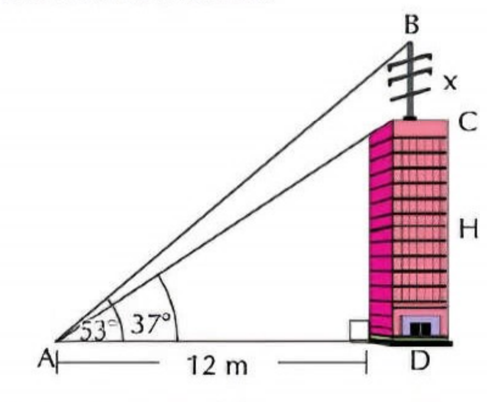
7 Una antena de radio está colocada en la azotea de un edificio. A 12 m de distancia del edificio sobre el suelo, los ángulos de elevación de la punta de la antena y de la parte superior del edificio son 53° y 37° respectivamente. Halle la longitud de la antena.

A) 7 m B) 6 m C) 5 m

D) 8 m E) 6,5 m

Resolución

De las condiciones tenemos:



En $\triangle$ ADC: $H = 12\,\text{tg}37° = 12\left(\frac{3}{4}\right)$

→ H = 9 m

Ahora $\triangle$ ADB: $x + H = 12\,\text{tg}\,53°$

$$x + H = 12\left(\frac{4}{3}\right)$$

Reemplazando:

$$x + 9 = 16$$

∴ x = 7 m **Rpta. A**

8 A que altura sobre el nivel del mar se encuentra un observador que divisa una embarcación bajo un ángulo de depresión θ.

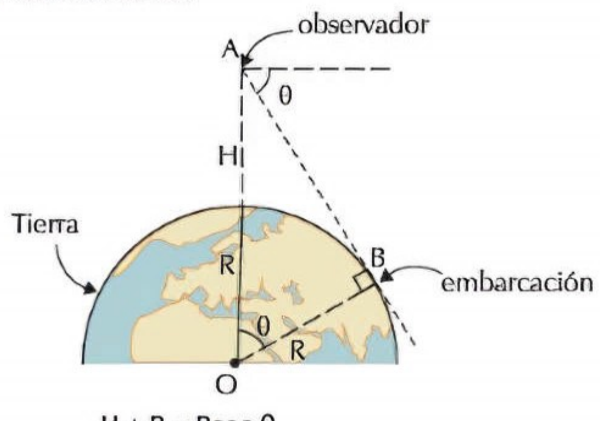
Calcule dicha altura en términos de θ y el radio terrestre "R".

A) R(cscθ – 1) B) R(1 – senθ) C) R(1 – cosθ)

D) R(secθ – 1) E) R tgθ.

Resolución

Del dato tenemos:



$$H + R = R\sec\theta$$

∴ $H = R(\sec\theta - 1)$ **Rpta. D**

9 Desde el borde de un acantilado de 500 m de altura sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de dos boyas situadas en un mismo plano vertical con el observador miden 45° y 30°. Calcule la distancia entre las boyas.

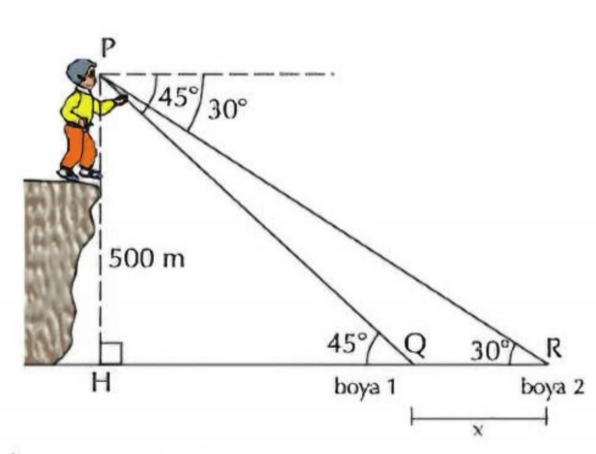
(Considere $\sqrt{3}$ = 1,73)

A) 365 m B) 360 m C) 300 m

D) 340 m E) 250 m

Resolución

Al graficar tenemos:



Del ◺ PHQ: (45° y 45°)

HQ = 500 m

◺ PHR : (30 y 60)

$HR = 500\sqrt{3}$

→ $x = 500\sqrt{3} - 500$

$x = 500\left(\sqrt{3} - 1\right)$ m

Como: $\sqrt{3} = 1{,}73$

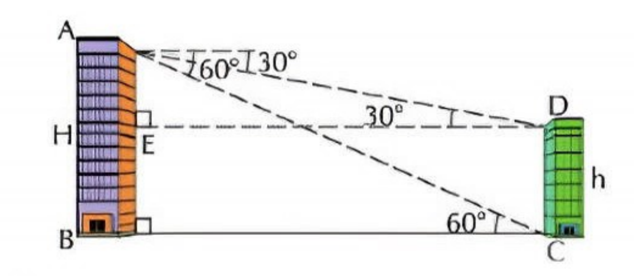
∴ x = 365 m **Rpta. A**

10 Dos edificios de altura H y h están separados aciertas distancias. Desde el punto más alto del edificio de altura H se observa a los puntos mas alto y más bajo del otro edificio con un ángulo de depresión de 30° y 60° respectivamente. Halle $\frac{H}{h}$.

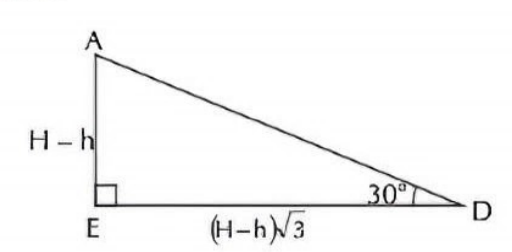
A) 3/2 B) 1 C) 2 D) 1/2 E) 5/2

Resolución

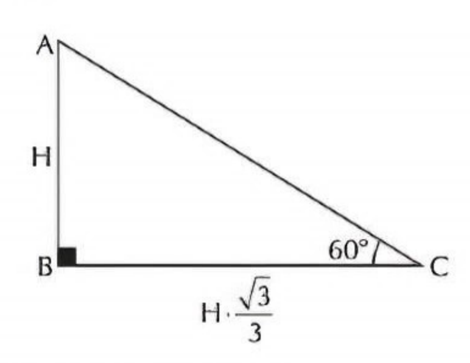
Graficando:



En ◺ AED:



En ◺ ABC:



Luego: ED = BC (Por paralelas)

→ $(H - h)\sqrt{3} = H\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $\frac{H}{h} = \frac{3}{2}$ **Rpta. A**

Ángulos horizontales

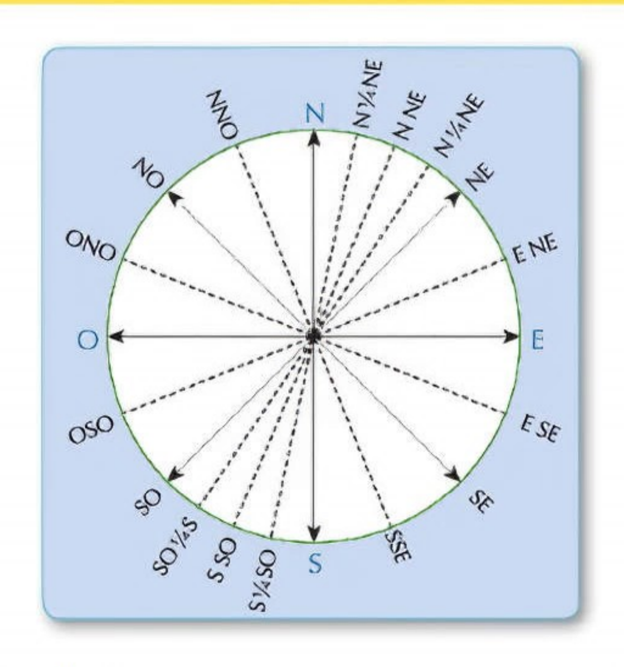
Definición

Son aquellos ángulos, cuya medición se realiza en un plano horizontal. El instrumento de medición para estos ángulos se llama la brújula.

Su estudio también está basado en la resolución de triángulos rectángulos y por ende la aplicación de razones trigonométricas.

Conceptos preliminares

Rosa Náutica (o Rosa de los Vientos).- Es el plano, en el cual están contenidas las 32 direcciones notables de la brújula.





Direcciones

A. Principales.- Se evalúan a 90°

Ejemplos: N ; S ; E ; O

B. Secundarias.- Se evalúan a 45°

Ejemplos:

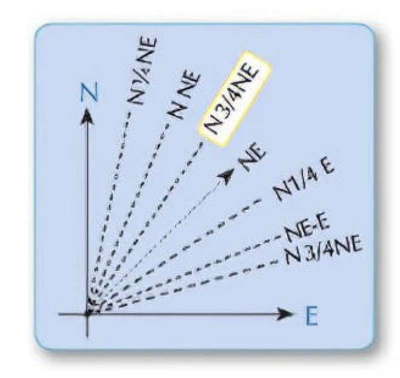
NE = Nor – Este ; SO = Sur – Oeste
SE = Sur – Este ; NO = Nor – Oeste

C. Terciarias.- Se evalúan a 22°30′.

Ejemplos:

N – NE = Norte – Nor – Este
O – SO = Oeste – Sur – Oeste
E – NE = Este – Nor - Este
O – NO = Oeste – Nor – Oeste
S – SE = Sur – Sur – Este
N – NO = Norte – Nor – Oeste
S – SO = Sur – Sur – Oeste

D. Cuaternarias: Se evalúan a 11° 15′.



Ejemplos:

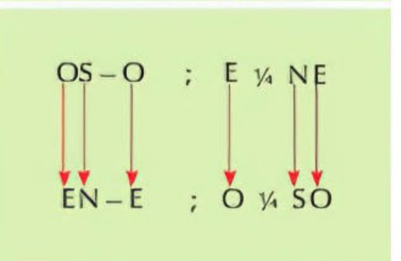
$NE\frac{1}{4}N$ $N\frac{1}{4}NE$

$SO\frac{1}{4}S$ $S\frac{1}{4}SO$

$NE\frac{3}{4}E$

Direcciones equivalentes

NE < > EN
S – SE < > SE – S
N – NO < > O – NO
$N\frac{1}{4}NO$ < > $NO\frac{3}{4}N$



Rumbo o dirección

Es la desviación angular que sufre la Rosa Náutica con respecto a las dos direcciones principales, al ubicar un punto.

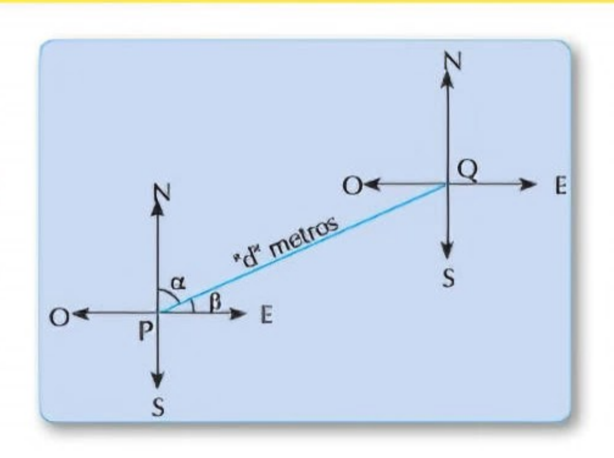
Nomenclatura:

a) El punto "Q" se encuentra en la dirección β al Norte del Este y a "d" metros del punto "P".

b) El punto "Q" se encuentra en la dirección α al Este del Norte y a "d" metros del punto "P".

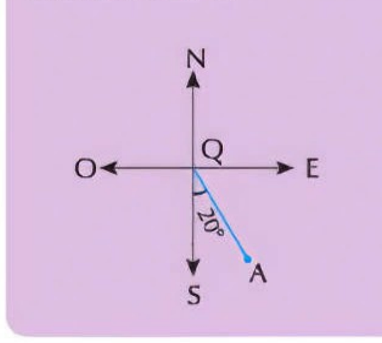
c) El punto "Q" se encuentra en la dirección N α E y a "d" metros del punto "P".

d) El punto "Q" se encuentra en la dirección E β N y a "d" metros del punto "P".

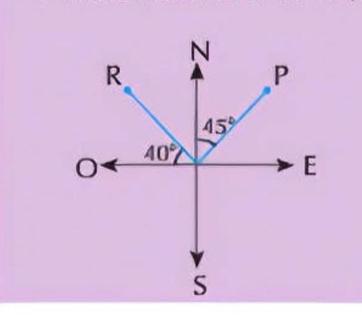


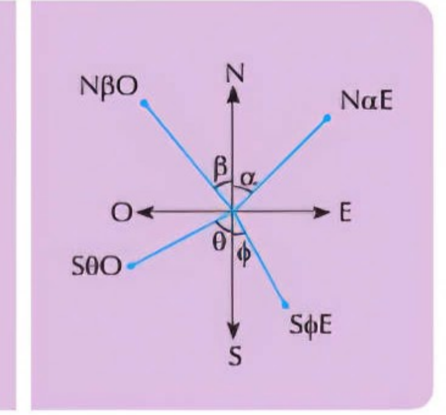
Ejemplos:

El punto "A" se encuentra en la dirección S 20° E.



El punto "R" se encuentra en la dirección O 40° N y el punto "P" en la dirección N 45° E. (NE)





Problemas resueltos — SOBRE ÁNGULOS HORIZONTALES

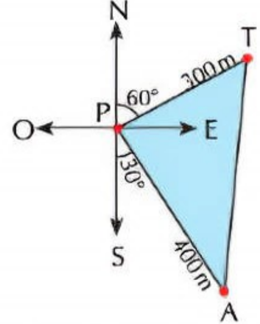
1 Una persona observa a 300 m en la dirección N 60° E una torre, y a 400 m en la dirección S 30° E un árbol. Hallar la distancia entre la torre y el árbol.

A) 200 m B) 300 m C) 400 m
D) 500 m E) 600 m

Resolución

- Graficando de acuerdo a los datos:

P: persona
T: torre
A: árbol



- En el ◺ APT: $x^2 = 300^2 + 400^2$

$x^2 = 250\,000$

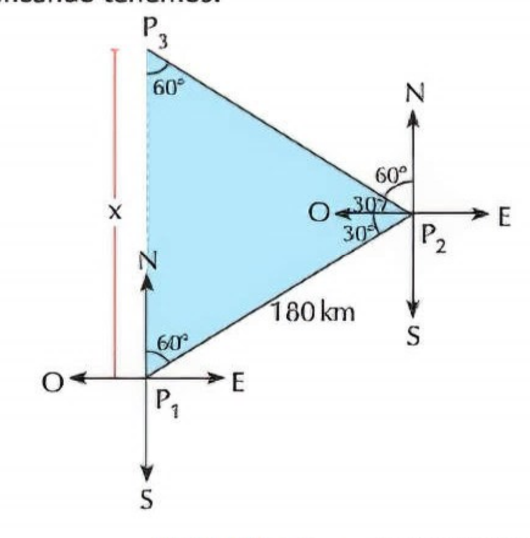
∴ $x = 500$ m **Rpta. D**

2 Un avión recorre 180 km volando con rumbo N 60° E, luego cambia su dirección volando con rumbo N 60° O hasta un punto situado al norte de su punto de partida. Calcular la distancia entre su punto de partida y llegada.

A) 120 km B) 150 km C) 180 km
D) 200 km E) 240 km

Resolución

- Graficando tenemos:



- Del gráfico se deduce que el $\Delta P_1P_2P_3$ es equilátero, luego:

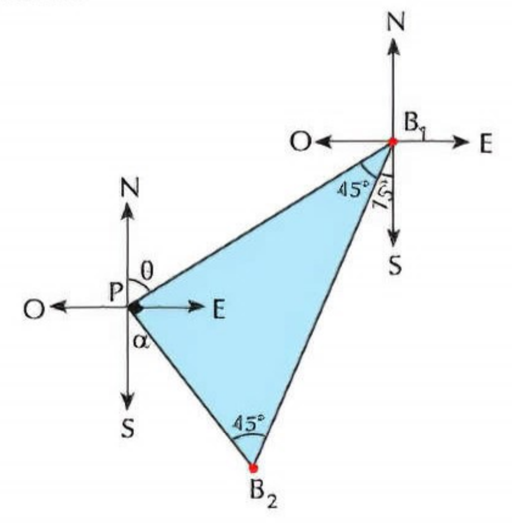
$\therefore \quad x = 180$ km **Rpta. C**

3 Dos barcos salen de un mismo puerto en direcciones que forman un ángulo recto, siendo una de ellas N θ E (θ > 45°). Si después de navegar cierto tiempo a la misma velocidad desde el primero se ve al segundo en la dirección S 15° O, ¿cuál fue la dirección de salida del segundo barco?

A) S 10° E B) S 18° E C) S 25° E
D) S 30° E E) S 36° E

Resolución

- Graficando:



- De acuerdo a los datos: $PB_1 = PB_2$

$\triangle B_1PB_2$: Isósceles

Entonces: $\measuredangle PB_1B_2 = 45°$

$\measuredangle PB_2B_1 = 45°$

- Además:

$\theta = 45° + 15°$ (∢s entre paralelas)

$\theta = 60°$

- Pero:

$\alpha + \theta = 90°$

$\alpha + 60° = 90°$

$\alpha = 30°$

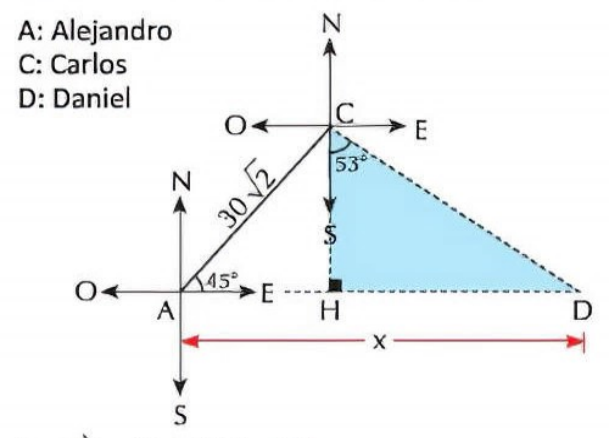
$\therefore$ dirección(B_2) = S 30° E **Rpta. D**

4 Alejandro observa a Carlos en la dirección NE y a $30\sqrt{2}$ m de distancia, a su vez Carlos observa a Daniel en la dirección S 53° E. Hallar la distancia que separa a Alejandro y Daniel, si Daniel se encuentra al Este de Alejandro.

A) 40 m B) 45 m C) 60 m
D) 68 m E) 70 m

Resolución

- De acuerdo a los datos, grafiquemos:



- En el $\triangle$ AHC: (AH = CH)

$$\cos 45° = \frac{AH}{AC} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{30\sqrt{2}}$$

AH = 30 y CH = 30

- En el $\triangle$ CHD:

$$\text{tg } 53° = \frac{HD}{CH} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{HD}{30}$$

HD = 40

- Además:

x = AH + HD = 30 + 40

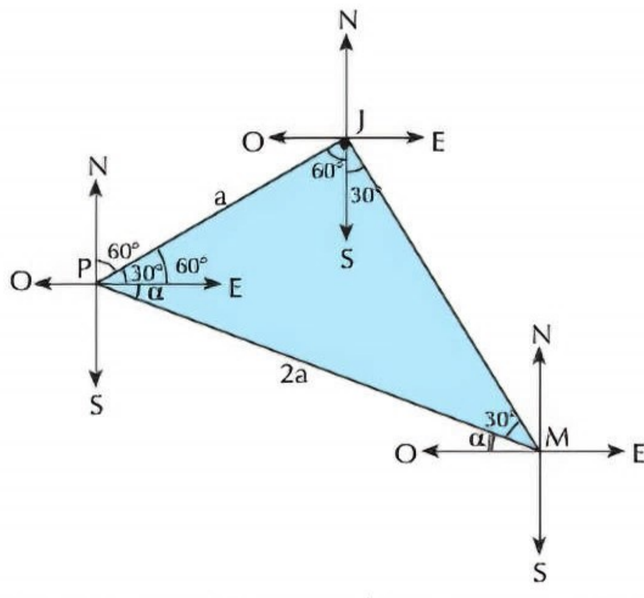
$\therefore$ x = 70 m **Rpta. E**

5 Pedro, José y María están situados en un terreno de tal forma que: Pedro observa a José en la dirección N 60° E, José observa a María en la dirección S 30° E. Sabiendo que la distancia que separa a Pedro de María es el doble que la que separa a Pedro de José, ¿En qué dirección observa María a Pedro?

A) N 75° O B) N 72° O C) N 60° O
D) N 53° O E) N O

Resolución

- Graficando:



- De los datos se deduce que el ⊿ PJM es notable (30° y 60°), luego:

$30° + a = 60° \rightarrow \alpha = 30°$

- Finalmente, la dirección pedida es: O 30° N o también:

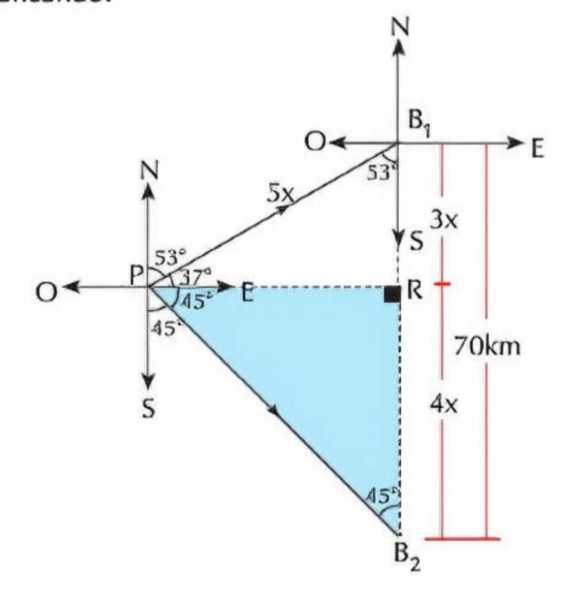
∴ N 60° O **Rpta. C**

6 Dos embarcaciones salen de un mismo puerto en direcciones N 53° E la primera y SE la segunda. Al cabo de 15 minutos la segunda embarcación se encuentra al Sur de la primera y a 70 km de distancia. Hallar la velocidad de la primera embarcación expresada en km/h.

A) 200 B) 180 C) 175 D) 160 E) 150

Resolución

- Graficando:



- ⊿ PRB_1 Notable (37° y 53°)
  Entonces: $B_1R = 3x$; $PR = 4x$; $PB_1 = 5x$
- ⊿ PRB_2: Notable (45° y 45°)
  Entonces: $PR = RB_2 = 4x$
- Además: $B_1R + RB_2 = 70$
  $3x + 4x = 70 \Rightarrow \boxed{x = 10}$
- Nos piden V_{B_1}:

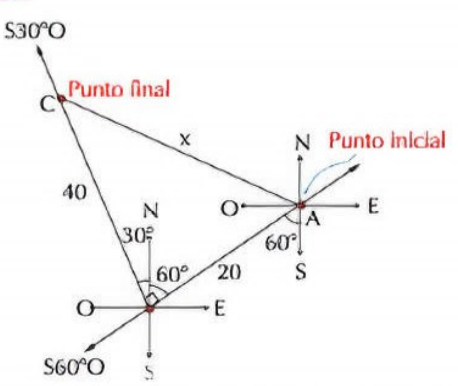
$$V_{B_1} = \frac{e}{t} \begin{cases} e = 5x = 5(10) = 50 \text{ km} \\ t = 15 \text{ min} = 0{,}25 \text{ h} \end{cases}$$

$$V_{B_1} = \frac{50 \text{ km}}{0{,}25 \text{ h}} \quad \therefore \quad \boxed{V_{B_1} = 200 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$ **Rpta. A**

7 Un móvil se desplaza 20 km en la dirección S60° O con respecto a un punto inicial, luego se desplaza 40 km en la dirección N30° O. Halla la distancia de la última posición del móvil a su posición inicial.

A) 40 km B) 36 km C) 20 km
D) $20\sqrt{5}$ km E) 30 km

Resolución



- B se encuentra en la dirección S60° O y a 20 km de A.
- C se encuentra en la dirección N30° O y a 40 km de B.
  En Δ ABC es rectángulo, recto en B, por el teorema de Pitágoras

$$x^2 = 20^2 + 40^2$$

$$\therefore \boxed{x = 20\sqrt{5} \text{ km}}$$ **Rpta. D**

8 Manuel y Vanessa se encuentran al sur y al oeste de una torre de 24 m de altura, observan la parte más alta de la torre con ángulos de elevación de 37° y 45°. Halla la distancia entre Manuel y Vanessa.

A) 40 m B) 35 m C) 42 m D) 45m E) 50 m

Resolución

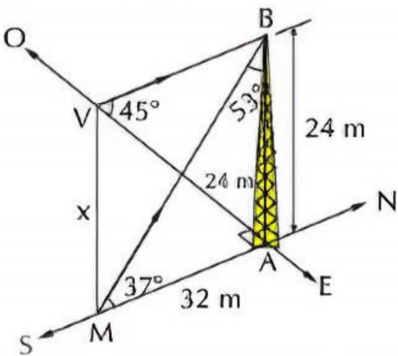
El ⊿ MAB es notable de 37° y 53°

$$24 = 3k \rightarrow k = 8$$

$$MA = 4k = 4 \cdot 4 \rightarrow MA = 32 \text{ m}$$

El ◺ VAB es notable de 45° y 45°

$$VA = AB = 24 \text{ m}$$



Usando el teorema de Pitágoras en el ◺ MAV

$$x^2 = 32^2 + 24^2 = 1\,600$$

$\therefore$ $\boxed{x = 40 \text{ m}}$ **Rpta. A**

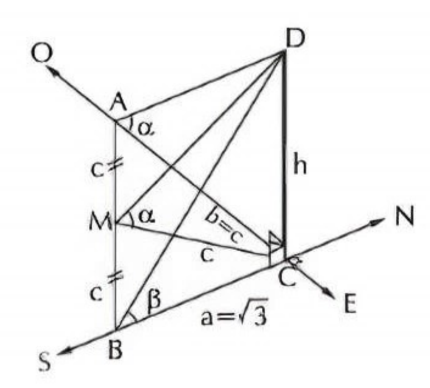
9 Desde dos puntos A y B situados al oeste y sur de un poste, se observa su parte más alta con ángulos de elevación α y β, desde el punto medio M de AB se observa la parte más alta del poste con un ángulo de elevación α. Calcula tgα · cotgβ.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\sqrt{2}$ E) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ m

Resolución

- En el ◺ ACD $tg\alpha = \dfrac{h}{b}$
- En el ◺ MCD $tg\alpha = \dfrac{h}{c}$



Igualdad:

$$\frac{h}{b} = \frac{h}{c} \rightarrow b = c$$

En el ◺ ACB por el teorema de Pitágoras:

$$(2c)^2 = c^2 + a^2 \rightarrow a = c\sqrt{3}$$

En el ◺ MCD: $tg\alpha = \dfrac{h}{c}$

En el ◺ BCD: $cotg\,\beta = \dfrac{c\sqrt{3}}{h}$

Multiplicando miembro a miembro:

$$tg\alpha \cdot cotg\beta = \frac{h}{c} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{h}$$

$\therefore$ $\boxed{tg\alpha \cdot cotg\beta = \sqrt{3}}$ **Rpta. C**

10 La parte superior de un edificio de 4 pisos iguales es observado por una persona que se encuentra al sur del edificio con un ángulo de elevación α; una segunda persona que se encuentra al este del edificio, observa la parte superior del tercer piso con un ángulo de elevación β. La distancia entre las dos personas es el doble de la altura del edificio. Halla $16\,cotg^2\alpha + 9cotg^2\beta$.

A) 60 B) 72 C) 62 D) 56 E) 64

Resolución:

Sea h la altura de cada piso del edificio, por dato

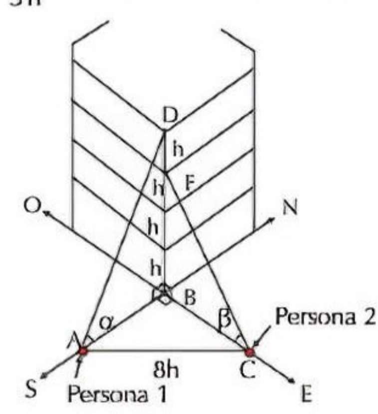
$$AC = 2(4h) = 8h$$

En el ◺ ABD:

$$cotg\alpha = \frac{AB}{4h} \rightarrow AB = 4h \cdot cotg\alpha$$

En el ◺ CBF:

$$cotg\beta = \frac{BC}{3h} \rightarrow BC = 3h \cdot cotg\beta$$



En el ◺ ABC por el teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(8h)^2 = (4hcotg\alpha)^2 + (3hcotg\beta)^2$$

$$64h^2 = 16h^2\,cotg^2\alpha + 9h^2cotg^2\beta$$

Eliminando h^2 en ambos miembros

$\therefore$ $\boxed{16cotg^2\alpha + 9cotg^2\beta = 64}$ **Rpta. E**

Amplía tus conocimientos



El teodolito

El teodolito es un instrumento de medición, cuya función es precisamente medir ángulos horizontales y verticales, con capacidad para también medir distancias y desniveles.



Este instrumento es utilizado principalmente por ingenieros y topógrafos.

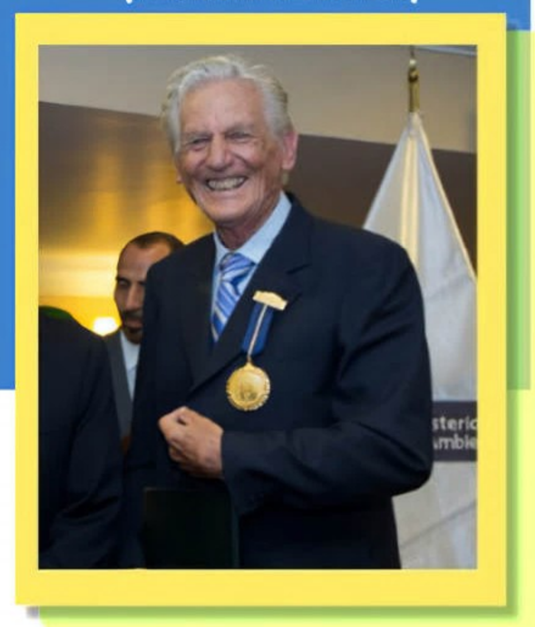
El teodolito es una aparato de mucha utilidad y de gran ayuda en la elaboración de planos topográficos, a menudo los encontramos en carreteras, en la construcción de puentes, en la remodelación de calles, en sin fin de construcciones, ya que nos facilita la recolección de datos y nos proporciona con gran exactitud la toma de medidas.



Ronald Woodman Pollit

(Matemático Peruano)

Personaje de la Matemática



Ronald Woodman Pollit nació en Piura el 22 de abril de 1934. Desde niño le interesó la ciencia, como nos cuenta en una entrevista realizada por el Dr. Modesto Montoya:

«Mi padre era terrateniente pero sabía que tarde o temprano le iban a quitar sus propiedades. Desde fines de los años 40 nos decía que teníamos que ser profesionales. Y así fue, perdió sus tierras. Cuando yo estaba en cuarto de media, él estableció un taller de estructuras metálicas. Allí me iba a jugar los sábados. Y me gustó la mecánica. En la UNI me presenté a Mecánica y Electricidad por la mecánica. Me regalaron un carrito del año 34 y yo me encargaba del mantenimiento. Me gustaba la mecánica. Pero al ingresar al tema de la electricidad descubrí un mejor reto. Me gustaba las matemáticas».

En la misma entrevista nos relata cómo se inició en el mundo de las matemáticas: "Cuando estaba en segundo año de media, mi padre me presentó un libro de álgebra en Inglés, que él había estudiado en Inglaterra. Me leí unas veinte páginas. Cuando empezó el curso de álgebra yo ya sabía lo que enseñaba el profesor y en el primer examen saqué 20. Nunca me había sacado 20 en mi vida. Eso me estimuló y me enganché en las matemáticas, que requerían no dejar de estudiar porque todo está encadenado. Si uno afloja un capítulo pierde el paso y lo que viene le parece chino. Es un estímulo, además, ser bueno en algo y ser reconocido por ello."

En 1951 ingresa la Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Mecánica y Electricidad. En 1956 se gradúa como Ingeniero Mecánico Electricista. Ese mismo año es aceptado por la Universidad de Harvard para estudiar un Master en Física Aplicada. De regreso al Perú no encontró trabajo, pues lo que había estudiado no estaba en práctica todavía. De regreso a Estado Unidos, consigue una estadía en *Goddar Space Flight Center* (GSFC) de NASA en Baltimore. Diseñó un modelo de equipo especial para la nave Apolo. Por su trabajo realizado en GSFC gana una beca de NASA para estudiar un doctorado (Ph.D.) en Harvard, en el campo de la Física Aplicada. Se doctoró en 1967.

De regreso al Perú se hace cargo del proyecto Jicamarca (Radio Observatorio de Jicamarca) que es solventado con recursos provenientes de los Estados Unidos. En esa institución se lleva a cabo investigaciones referidas a la Tierra.

«Forma parte de la iniciativa de observatorios distribuidos para estudiar la Tierra en forma global, con tecnologías avanzadas, con equipos en diferentes partes del mundo, midiendo magnitudes propias del comportamiento de la Tierra con equipos de alta tecnología. La memoria sobre el registro de un fenómeno depende de las condiciones a escala global, por lo tanto la observación debe tener características globales».

Los éxitos del Dr. Ronald Woodman son admirables. Mencionamos algunos logros importantes. Es actualmente Miembro de la Academia de Ciencias del Tercer Mundo, de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Es presidente del Comité Peruano de la *Union Radio Scientifique Internationale* (URSI) y del Comité Nacional del *International Union Geodesy and Geophysics* (IUGG), así como miembro de la *American Geophysical Society*. Ha obtenido el *Appleton Prize*, de la *Royal Society of London*, y el premio Nacional de Cultura, Ciencias Naturales y Matemáticas, además del premio nacional de Innovación 1993. *Doctor honoris causa* por la Universidad Ricardo Palma y por la Universidad de Piura, ha publicado más de cien artículos en publicaciones del Perú y el extranjero. Es actualmente presidente del Instituto Geofísico del Perú. Sumado a todo lo anterior, como mencionamos al inicio, ahora forma parte de la Academia de Ciencias de los Estados Unidos. Todo un modelo de perseverancia y dedicación a la sabiduría.

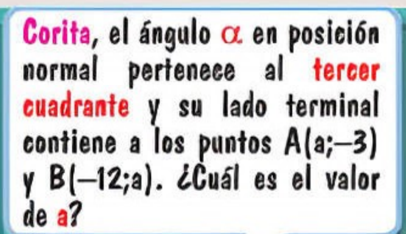
Investiga:



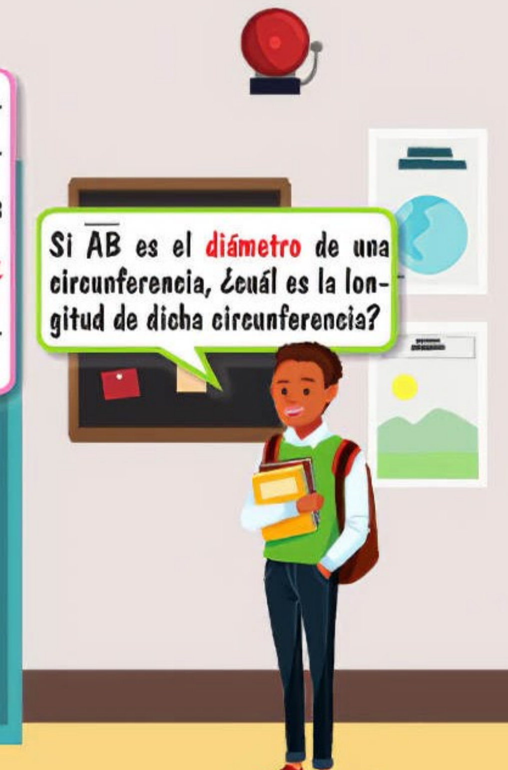
1. **¿Qué aprendemos de la actitud del Dr. Woodman para lograr sus metas?**
2. **Ha pesar de ser un científico de prestigio internacional, el Dr. Woodman se mantiene en el país aportando sus conocimientos y experiencia para el desarrollo del país y la formación de nuevos hombres de ciencia. ¿Cuál es tú opinión acerca de ello?**



Reducción al primer cuadrante e identidades Trigonométricas



Memo, si consideras el punto A, la tangente de α es $\frac{-3}{a}$. Si consideras el punto B, la tangente de α es $\frac{a}{-12}$, entonces $\frac{-3}{a}=\frac{a}{-12}$, de donde $a=\pm 6$; como α es un ángulo del tercer cuadrante, entonces $a=-6$.





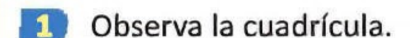
Corita

Antonio

Competencia	Temas
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Sistema bidimensional de coordenadas. Ángulo en posición normal. Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal. Signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante. Ángulos cuadrantales. Razones trignométricas de ángulos cuadrantales. Ángulos coterminales. Razones trigonométricas de ángulos de la forma $n\cdot180°\pm\alpha$; $n\in\mathbb{Z}$. Razones trigonométricas de ángulos de la forma $(2n+1)\,90°\pm\alpha$; $n\in\mathbb{Z}$. Reducción al primer cuadrante.
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Circunferencia trigonométrica. Las funciones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica. Representaciones trigonométricas auxiliares. Identidades trigonométricas: recíprocas, por división, pitagóricas. Identidades auxiliares. Tipos de ejercicios.

ENFOQUE ORIENTACIÓN AL BIEN COMÚN

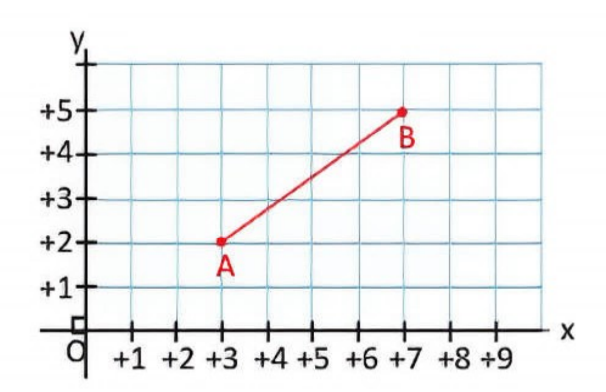
Valor	Actitudes que suponen
Solidaridad	Disposición a apoyar incondicionalmente a personas en situaciones comprometidas o difíciles.



Recupera saberes previos

Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:

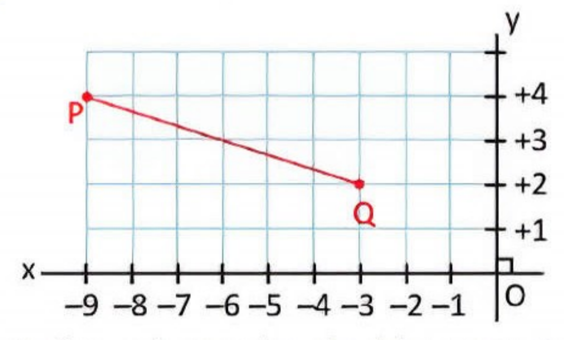
1 Observa la cuadrícula.



a. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A y B?

b. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y B?

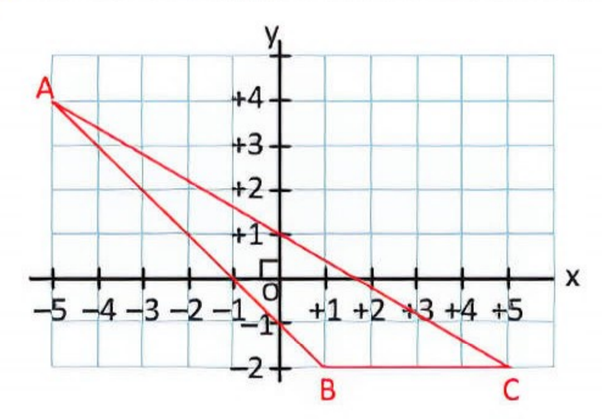
2 Observa el segmento PQ en la cuadrícula.



a. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos P y Q?

b. ¿Cuál es la distancia entre los puntos P y Q?

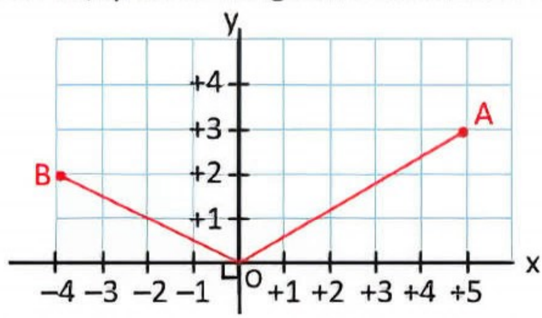
3 Observa el triángulo ABC en la cuadrícula.



a. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo ABC?

b. ¿Cuál es el área de la región triangular ABC?

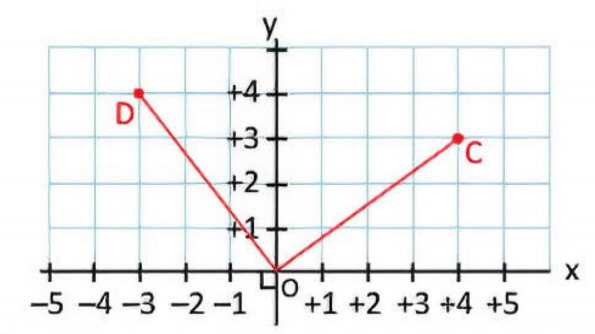
4 Los segmentos OA y OB tienen un punto común, que es el origen de coordenadas.



a. ¿Cuál es el cociente de dividir la ordenada del punto A entre su abscisa?

b. ¿Cuál es el cociente de dividir la ordenada del punto B entre su abscisa?

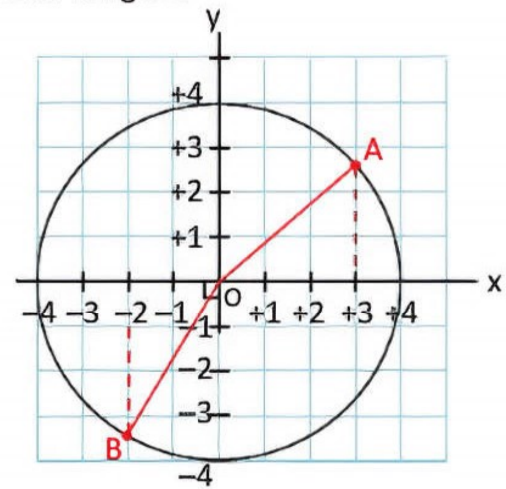
5 Observa la cuadrícula.



a. ¿Cuál es el cociente de dividir la ordenada del punto C entre su distancia al origen O?

b. ¿Cuál es el cociente de dividir la ordenada del punto D entre su distancia al origen O?

6 Observa la figura.



a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A?

b. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

Propósito de aprendizaje

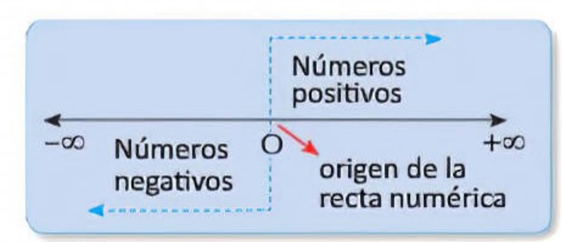
COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Dibuja un ángulo en posición normal en una cuadrícula y con las coordenadas de un punto del lado terminal, calcula las seis razones trigonométricas de dicho ángulo.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Cuando el ángulo es mayor de 360°, divide su medida entre 360°; las funciones trigonométricas del ángulo son iguales a las del residuo de la división efectuada.

Razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud

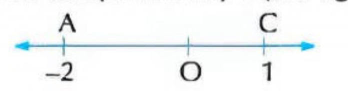
Hasta ahora sólo hemos obtenido las razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90°, sin embargo en este capítulo obtendremos las razones trigonométricas de ángulos de cualquier medida, para ello deberemos conocer algunas nociones previas:

Sistema de coordenadas unidimensional

Al sistema que utiliza la correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de una recta se le denomina Recta numérica.



Además sean dos puntos A y C (ver figura)

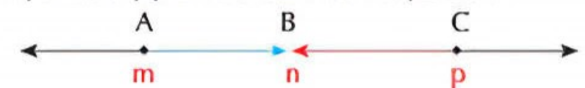


Se cumple:

- -2 es la coordenada de A.
  se representa: A = (-2)
- 1 es la coordenada de C.
  se representa: C = (1)
- 0 es la coordenada de O
  Se representa O: (0)

Distancia entre dos puntos en una recta numérica

Sea m la coordenada del punto A, n la coordenada del punto B y p la coordenada del punto C.



En la gráfica vemos la distancia dirigida de A hasta B, el cual se obtiene.

$$AB = B - A = n - m$$

Asimismo la distancia dirigida de C a B es decir:

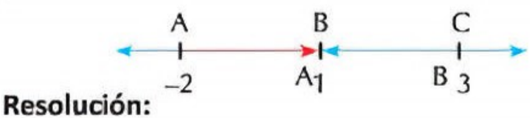
$$CB = B - C = n - p.$$

Ejemplo:

En la figura hallar:

a) La distancia dirigida de A a B

b) La distancia digirida de C a B



Resolución:

Del grafico tenemos:

a) AB = ?

Entonces: $AB = B - A = 1 - (-2)$

$\Rightarrow AB = +3$

b) CB = ?

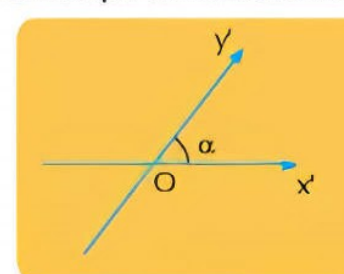
Entonces: $CB = B - C = 1 - (3)$

$\Rightarrow CB = -2$



El signo (+) indicará que va hacia la derecha y si es (–) hacia la izquierda

En el ejemplo para hallar la distancia entre los puntos A y B, se relaciona de la siguiente manera:



$$d = |AB| = |BA|$$

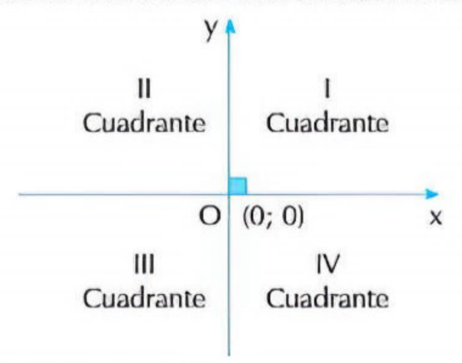
entonces: $d = |1-(-2)| \Rightarrow d = 3$

Sistema Bidimensional de coordenadas

Sean dos rectas numéricas que se intersectan en sus respectivos orígenes.

Sistema que permite asociar un punto y un par ordenado de numeros.

El más frecuente es el sistema de coordenadas rectangulares.



La recta horizontal recibe el nombre del eje x, o eje de abscisas; la recta vertical recibe el nombre del eje y, o eje de ordenadas.

Para ubicar un punto P determinado por el par ordenado (a;b) donde el valor de a se llama abscisa y b ordenada de P, trazaremos paralelas en sus respectivas posiciones.

O: origen de coordenadas

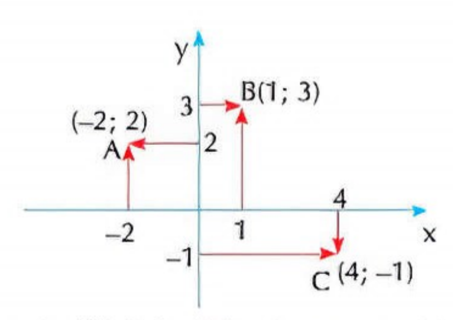
Estas distancias reciben el nombre de distancias dirigidas, el punto de intersección será la ubicación de dicho punto.

Ejemplo:

Ubicar los puntos A(–2;2), B(1;3) y C(4; –1)

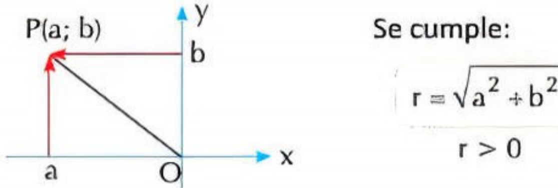
Resolución:

Ubicando los puntos en el plano cartesiano:



Radio vector (r): Es la distancia que se origina entre un punto cualquiera del plano cartesiano con el origen de coordenadas.

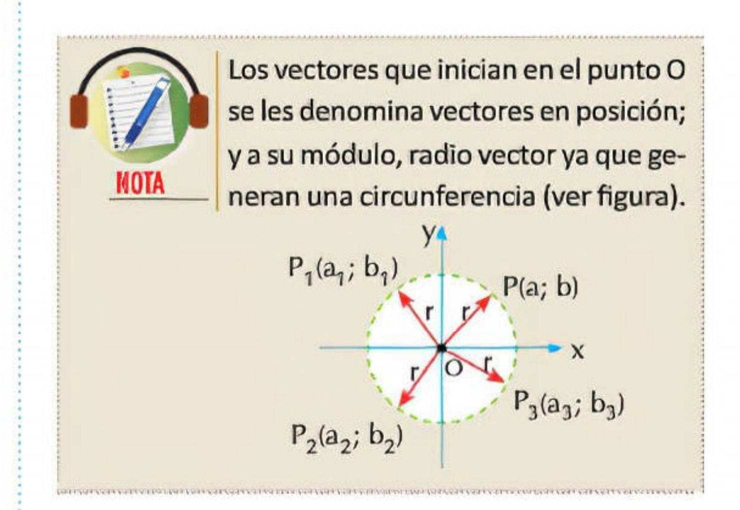
Sea:



Se cumple:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r > 0$$

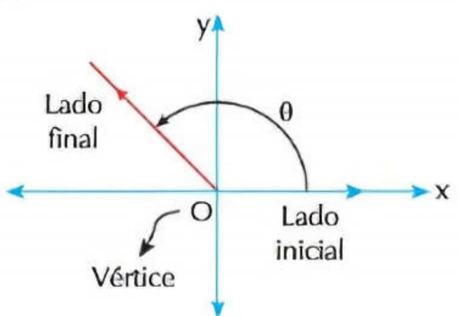


Los vectores que inician en el punto O se les denomina vectores en posición; y a su módulo, radio vector ya que generan una circunferencia (ver figura).

Ángulo en posición normal

Son aquellos ángulos que se encuentran inscritos en un plano coordenado de tal manera que su lado inicial coincide con el eje de abscisas positivo y su vértice coincide con el origen de coordenadas, su lado final nos indicará el cuadrante al que pertenece.

De la figura:



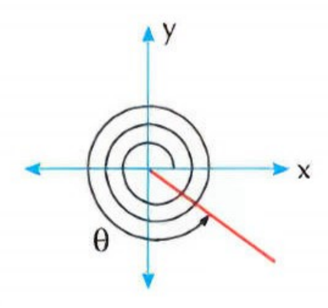
θ cumple con las condiciones dadas, luego:

θ está en posición normal.

$$\Rightarrow \quad \theta \in \text{II}\,\mathbb{C}$$

Ejemplos: Indique el cuadrante al que pertenecen dichos ángulos.

I.

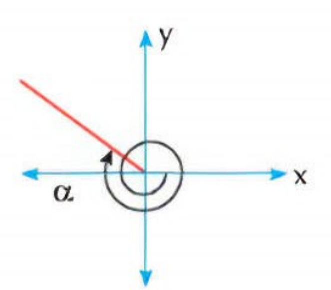


De la figura:

Su lado inicial coincide con el eje x^+ y su vértice coincide con el origen, además $\theta > 0$

$$\therefore \quad \theta \in \text{IV}\,\mathbb{C}$$

II.



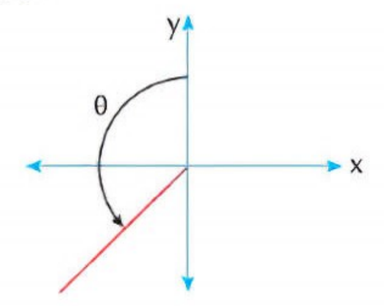
de igual manera cumple las condiciones, además:

$$\alpha < 0$$

$$\therefore \quad \alpha \in \text{II}\,\mathbb{C}$$

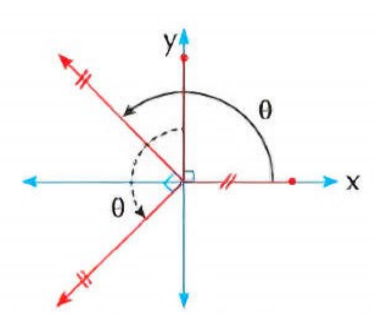
Ejercicio:

El ángulo mostrado en la figura ¿en qué cuadrante se encuentra?



Resolución:

Observando la figura, notamos que θ no está en posición normal dado que su lado inicial no coincide con el eje x. Entonces haremos una rotación (ver figura)

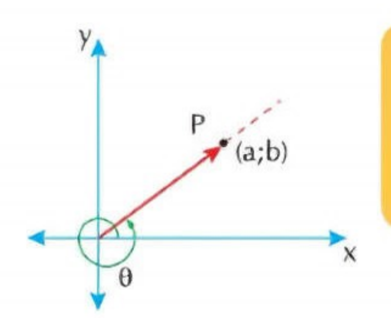


Hemos rotado un ángulo de 90 ° en sentido horario, lo cual nos permite afirmar que, ahora sí θ está en posición normal

$$\therefore \quad \theta \in \text{II}\,\mathbb{C}$$

Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal

De la figura sea P un punto que pertenece al lado final de un ángulo θ.



Donde:
a: abscisa
b: ordenada
r: radio vector

Se define:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}}=\frac{b}{r} \qquad \cot\theta=\frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}=\frac{a}{b}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}}=\frac{a}{r} \qquad \sec\theta=\frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}}=\frac{r}{a}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}=\frac{b}{a} \qquad \csc\theta=\frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}}=\frac{r}{b}$$

Ejemplo:

Calcula el valor de:

$E=\sqrt{13}\,(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)$, de la figura:

A) 1
B) 4
C) 5
D) -5
E) 3

(-2;3)
P
θ

Resolución:

Observamos que: abscisa: $a=-2$
ordenada: $b=3$

Radio vector: $r=\sqrt{(-2)^2+3^2}$

$\Rightarrow r=\sqrt{13}$

Reemplazando en lo que piden; por definición:

$$E=\sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$$

$\therefore$ $E=5$ **Rpta. C**

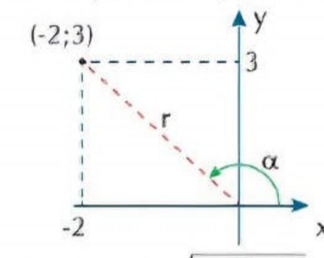
Problemas resueltos

SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

1 Si el punto (−2;3) pertenece al lado final de un ángulo "α" en posición normal. Calcula las 6 razones trigonométricas de dicho ángulo.

Resolución:

- Ubiquemos el punto en el plano cartesiano:



Hallando el radio vector
abscisa: $x=-2$
ordenada: $y=3$
$\Rightarrow$ radio vector: r

- Luego: $r=\sqrt{(-2)^2+3^2} \Rightarrow r=\sqrt{13}$

Por definición:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\text{0rdenada}}{\text{radio vector}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{13}}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{2}{3}}$$

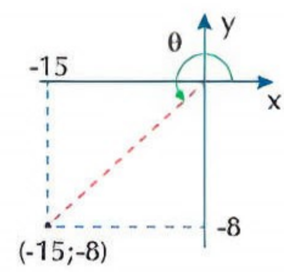
$$\sec\alpha=\frac{\text{redio vector}}{\text{abscisa}} \Rightarrow \boxed{\sec\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{2}}$$

$$\csc\alpha=\frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}} \Rightarrow \boxed{\csc\alpha=\frac{\sqrt{13}}{3}}$$

2 Siendo A(–15; –8) un punto que pertenece al lado final de un ángulo θ en posición normal. Calcula el valor de: E = secθ + tgθ.

Resolución:

- Ubicando el punto en el plano cartesiano



Donde:

abscisa: x = – 15
ordenada: y = – 3
radio vector: r = ?

- Luego: $r=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2} \Rightarrow r=17$

  Ahora por definición reemplazamos :

  $$E=\frac{17}{-15}+\frac{-8}{-15}$$

  $$E=\frac{-17}{15}+\frac{8}{15} \quad \therefore \quad E=-\frac{3}{5}$$ **Rpta.**

3 Si: $\cos\theta=-\frac{40}{41}$ y $\theta\in IIC$, calcula el valor de

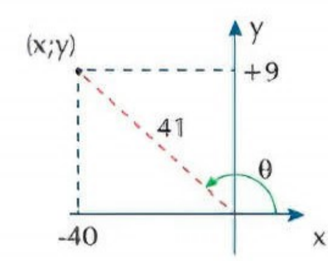
k = 41(senθ – cosθ)

Resolución:

- Del dato: $\cos\theta=-\frac{40}{41}$

abscisa: x = -40
Radio vector: r = 41

Graficando:



De la figura:

$$r=x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad 41=\sqrt{(-40)^2+y^2}$$

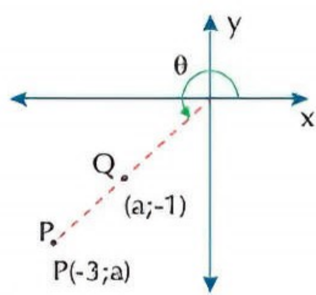
$$\Rightarrow \quad y=\pm 9$$

Luego: y = + 9

Nos piden:

$$k=41\left(\frac{9}{41}-\frac{-40}{41}\right) \quad \therefore \quad k=49$$ **Rpta.**

4 De la figura mostrada, calcula
M = senθ cosθ



Resolución:

- Por definición: $\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{a}=\frac{a}{-3}$

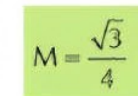
  Luego: $\frac{-1}{a}=\frac{a}{-3} \quad \Rightarrow \quad a=\pm\sqrt{3}$

  De la figura; entonces: $a=-\sqrt{3}$

  En Q: $r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(1)^2} \quad \Rightarrow \quad r=2$

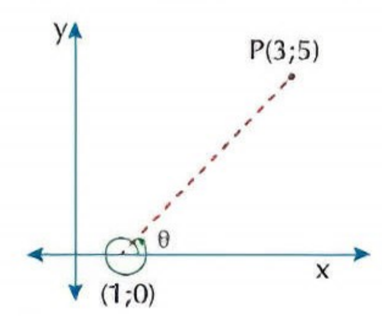
Reemplazando en lo que nos piden:

$$M=\frac{-1}{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$$



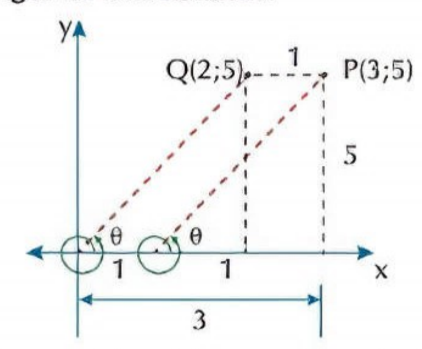
$$M=\frac{\sqrt{3}}{4}$$ **Rpta.**

5 Del gráfico, calcula: tgθ + ctgθ



Resolución:

- Observamos que el ángulo θ no está en posición normal, dado que su vértice debe coincidir con el origen de coordenadas.

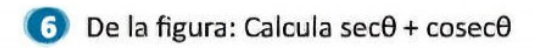


"Por paralelas ubicamos al ángulo θ en posición normal"

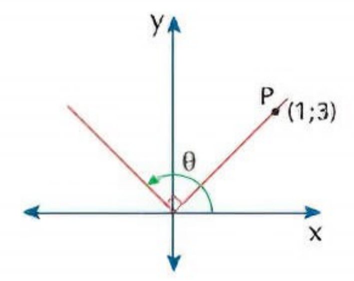
Del gráfico deducimos: Q (2;5)

- Nos piden: $\operatorname{tg}\theta+\cot\theta=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=\frac{29}{10}$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{tg}\theta + \cot\theta = \frac{29}{10}} \quad \textbf{Rpta.}$$



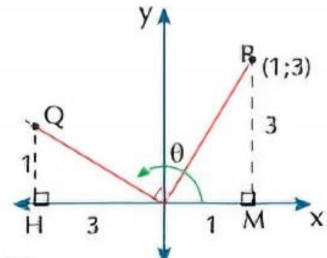
6 De la figura: Calcula secθ + cosecθ



Resolución:

- Para hallar las razones trigonométricas de θ, sólo tendremos que hallar un punto de su lado final.

  Luego:



Si OP = OQ

⇒ ◺ OPM ≅ ◺ OQH

Ahora: PM = OH = 3

OM = QH = 1

- Entonces las coordenadas de Q es: (-3;1)

  abscisa: x = -3

  ordenada: y = 1

  radio vector: r

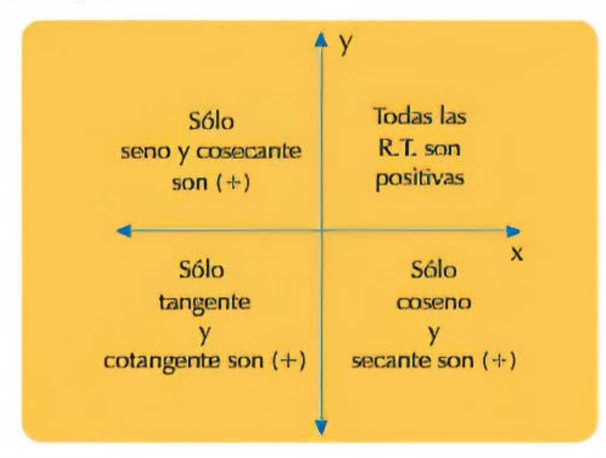
  $\Rightarrow \quad r = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{10}$

En lo que nos piden: $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{10}}{-3} + \frac{\sqrt{10}}{1}$

$$\therefore \quad \boxed{\sec\theta + \csc\theta = \frac{2\sqrt{10}}{3}} \quad \textbf{Rpta.}$$

Signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante

Se cumple:



Ejercicio: Hallar el signo de las razones trigonométricas.

- sen 100° ➠ como 100° ∈ II ℂ

  notamos que sen 100° es (+)

- cos 300° ➠ como 300° ∈ IV ℂ

  notamos que cos 300° es (+)

- sen. 200° ➠ como 200° ∈ III ℂ

  notamos que sen 200° es (–)

- ¿A qué cuadrante pertenece θ?

  si: sen θ > 0 ∧ cos θ < 0

Resolución:

Por dato:

i) $\operatorname{sen}\theta > 0$

   se nota: sen θ es positivo ⇒ θ ∈ I ó II ℂ

ii) $\cos\theta < 0$

   se nota: cos θ es negativo ⇒ θ ∈ II ó III ℂ

Intersectando:

$$\therefore \quad \theta \in \text{II } \mathbb{C}$$

Ejercicio: Siendo:

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{4}{25} \quad \wedge \quad \theta \in \text{II}\mathbb{C}$$

calcular: $J = \sqrt{29}\,(\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta)$

A) 8 B) 0 C) -8 D) 2 E) -2

Resolución:

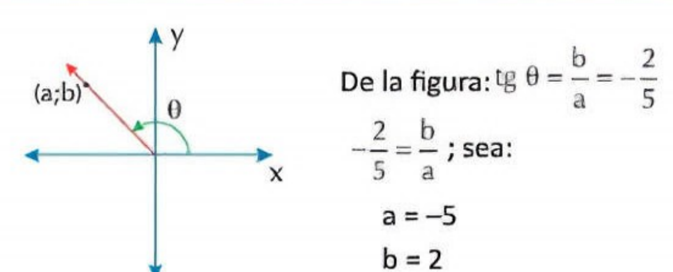
Del dato:

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{4}{25} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = \pm\frac{2}{5}$$

Es decir: $\operatorname{tg}\theta = +\frac{2}{5}$ ó $\operatorname{tg}\theta = -\frac{2}{5}$

pero θ ∈ II X, entonces $\operatorname{tg}\theta = -\frac{2}{5}$

Graficando:



De la figura: $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{5} = \frac{b}{a}$; sea:

$a = -5$

$b = 2$

Calculando radio vector

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} \Rightarrow r = \sqrt{29}$$

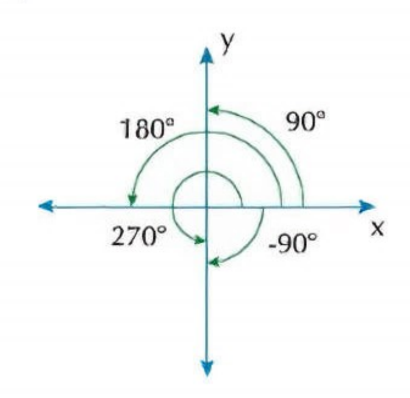
finalmente reemplazando:

$$J = \sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\times\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$$

$\therefore$ $J = -8$ **Rpta. C**

Ángulos cuadrantales

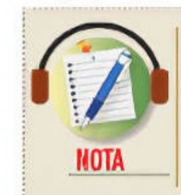
Son aquellos ángulos que están en posición normal y su lado final coincide con los semiejes coordenados (ver figura)



En general:

Todos los ángulos cuadrantales:

$90°n$ o $\frac{\pi}{2}n$ ➡ $n \in \mathbb{Z}$



A los ángulos cuadrantales se le considera que no pertenecen a ningún cuadrante.

Ejemplo:

El ángulo 32540° será un ángulo cuadrantal?

Resolución:

Dado que los ángulos cuadrantales son multiplos de 90° entonces:

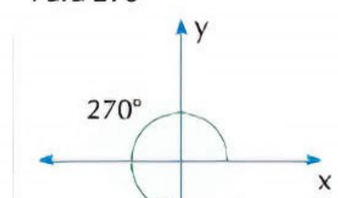
$$\begin{array}{r|l} 32540° & 90° \\ \hline \text{Residuo} \longrightarrow 50° & 361 \end{array}$$

Notamos que no es multiplo de 90°

$\therefore$ 32540° no es un ángulo cuadrantal.

Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Para 270°



El punto P(0; - b) está en el lado final de 270°.

Luego:

- $\operatorname{sen} 270° = \frac{-b}{r} = \frac{-b}{b} = -1$
- $\cos 270° = \frac{0}{r} = \frac{0}{b} = 0$
- $\operatorname{tg} 270° = \frac{-b}{a} = \frac{-b}{0} =$ No definido
- $\cot 270° = \frac{a}{-b} = \frac{0}{-b} = 0$
- $\sec 270° = \frac{r}{0} = \frac{b}{0} =$ No definido
- $\csc 270° = \frac{r}{-b} = \frac{b}{-b} = -1$

En general:

Nd: No definido

ángulo \ FT	sen	cos	tan	cot	sec	cosec
0 ó 0°	0	1	0	Nd	1	Nd
90° ó $\frac{\pi}{2}$	1	0	Nd	0	Nd	1
180° ó π	0	–1	0	Nd	–1	Nd
270° ó $\frac{3\pi}{2}$	–1	0	Nd	0	Nd	–1
360° ó 2π	0	1	0	Nd	1	Nd

Ejemplo: Siendo θ y α ángulos positivos y menores de una vuelta que cumplen:

$$\sqrt{\operatorname{sen}\theta - 1} = \cos\alpha,$$

Calcular el valor de: $M = \cos\theta + \operatorname{sen}\alpha$
(Indique el mayor)

A) –1 B) 1 C) 1/2 D) –1/2 E) 0

Resolución:

De la condición; por existencia:

$$\operatorname{sen}\theta - 1 \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \geq 1$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}\theta > 1}_{\text{(falso)}} \text{ o } \operatorname{sen}\theta = 1$$

$$\Rightarrow \theta = 90°$$

Reemplazando en la condición

$$\sqrt{1-1} = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0$$

Luego: α = 90° o 270°

En lo que piden: $M = \cos\theta + \operatorname{sen}\alpha$

i) $M = \cos 90° + \operatorname{sen} 90° = 0 + 1$

$M = 1$

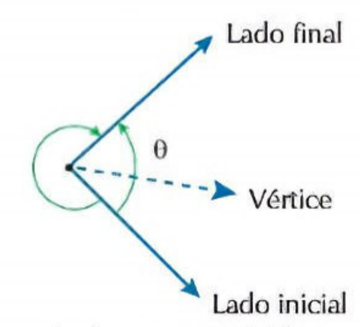
ii) $M = \cos 90° + \operatorname{sen} 270° = 0 + -1$

$M = -1$

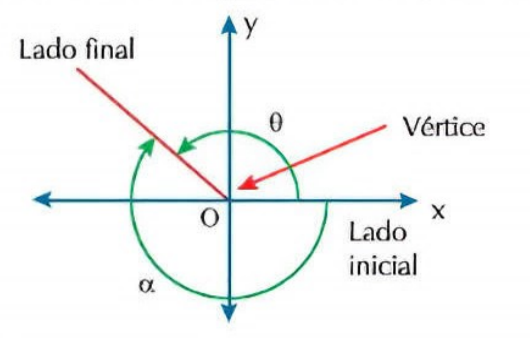
Piden el mayor valor: $\therefore$ M = 1 **Rpta. B**

Ángulos coterminales

Dos o más ángulos son coterminales si tienen su lado inicial y final coincidentes y el mismo vértice; así tenemos a los ángulos α y θ que son ángulos coterminales (ver figura)



Si ambos estuvieran en posición normal, tenemos:



Propiedades:

Si α y θ son ángulos coterminales se cumple:

1) $\theta - \alpha = 360° K$; $K \in \mathbb{Z}$

2) $RT(\alpha) = RT(\theta)$

(Las razones trigonométricas de α y θ son iguales).

Ejemplos: Obtenga cos 1470°

Resolución:

Notamos que:

1470° – 30° = 360° (4)

es decir, son ángulos coterminales

$$\Rightarrow \cos 1470° = \cos 30°$$

$$\therefore \operatorname{Cos} 1470° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

REGLA PRÁCTICA:

$$RT(360° K + \theta) = RT(\theta) \quad K \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo:

Reducir:

- $\cos 1800°$

$\Rightarrow \quad \cos 1800° = \cos(360° \times 5 + 0)$

$\Rightarrow \quad \cos 1800° = \cos 0 = 1$

$\therefore \quad \cos 1800° = 1$

- $\text{tg } 123456°$

Dividimos:

123456	360°
Residuo ⟶ 336°	342

$\Rightarrow \quad \text{tg } 123456° = \text{tg } 336°$

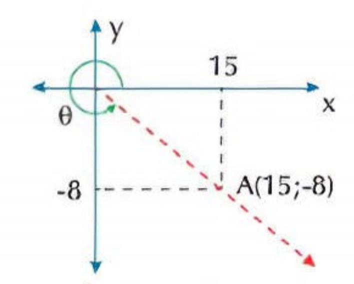
Problemas resueltos

1 Siendo A(15; –8) un punto del lado final de un ángulo θ es posición normal, calcular:

$$M = \text{sen } \theta + \cos \theta$$

Resolución:

- Ubicando el punto A en el plano cartesiano:



Donde: abscisa = 15
ordenada = –8.

- Hallando radio vector: (r)

$$r = \sqrt{(15)^2 + (-8)^2} \quad \Rightarrow \quad r = 17$$

- En lo que piden:

$$M = \frac{-8}{17} + \frac{15}{17} \quad \therefore \quad M = \frac{7}{17} \quad \textbf{Rpta.}$$

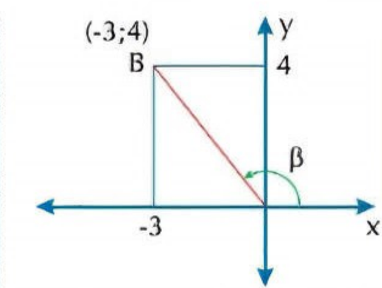
2 Si el punto B(-3;4) pertenece al lado final de un ángulo β en posición normal, calcula:

$$P = \sec \beta + \text{tg } \beta$$

Resolución:

- Ubicando el punto B en el plano cartesiano tenemos:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL



Donde:

abscisa: –3

ordenada: 4

Luego: radio vector (r):

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} \quad \Rightarrow \quad r = 5$$

- Reemplazando en lo que piden:

$$P = \frac{5}{-3} + \frac{4}{-3} \quad \therefore \quad P = -3 \quad \textbf{Rpta.}$$

3 Si $\text{sen } \beta = \frac{-7}{25}$; $\beta \in \text{III } \mathbb{C}$, calcula el valor de:

$$K = 5 \cos \beta + 12 \text{ tg } \beta$$

Resolución:

- Del dato:

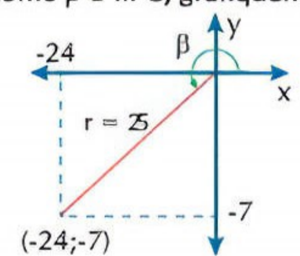
$\text{sen } \beta = \frac{-7}{25}$ ⟶ ordenada : y = –7
⟶ radio vector : r = 25
abscisa : x = ?

Ahora: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Reemplazando:

$$25 = \sqrt{x^2 + (-7)^2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 24$$

Como $\beta \in \text{III } \mathbb{C}$, grafiquemos:



De la figura notamos que:
x es negativo
$\Rightarrow \quad x = -24$

En lo que piden:

$$K = 5\left(-\frac{24}{25}\right) + 12\left(\frac{-7}{-24}\right)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{-24}{5} + \frac{7}{2} \quad \therefore \quad \boxed{K = \frac{-13}{10}}$$

4 Calcula el valor de:

$$P = \frac{\text{tg } 770°}{\text{ctg } 1120°}$$

Resolución:

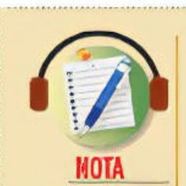
- Aplicamos ángulos coterminales ya que los ángulos son mayores de 1 vuelta
  es decir:

$$\begin{array}{r|l} 770° & 360° \\ \hline 720° & 2 \\ 50° & \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{tg } 770° = \text{tg } (360° \times 2 + 50°) \\ \Rightarrow \text{tg } 770° = \text{tg} 50° \end{array}$$

  Ahora:

$$\begin{array}{r|l} 1120° & 360° \\ \hline 1080° & 3 \\ 40° & \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{ctg } 1120° = \text{ctg } (360° \times 3 + 40°) \\ \Rightarrow \text{ctg } 1120° = \text{ctg} 40° \end{array}$$

- Reemplazando: $P = \dfrac{\text{tg } 50°}{\text{ctg } 40°}$



Si: $\alpha + \theta = 90°$

Se cumple:

$$\text{tg } \alpha = \text{ctg } \theta$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg } 50° = \text{ctg } 40°$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\text{ctg } 40°}{\text{ctg } 40°} \quad \therefore \quad \boxed{P = 1} \quad \textbf{Rpta.}$$

5 Si: $4\cos^2\alpha - 3 = 0$; $\alpha \in \text{II } \mathbb{C}$, calcular:

$$E = \text{sen}^2\,\alpha + \text{sen}\,\alpha + 1$$

Resolución:

- Del dato:

$$4\cos^2\alpha - 3 = 0 \longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

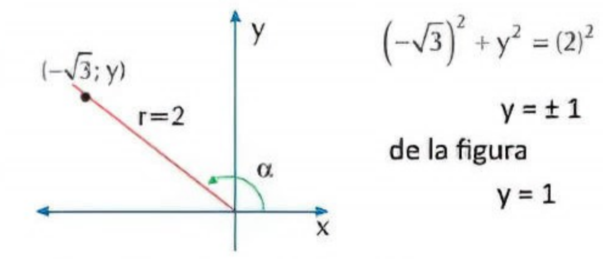
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\alpha \in \text{II } \mathbb{C} \longrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Luego: abscisa: $x = -\sqrt{3}$

radio vector: $r = 2$

Graficando en el plano cartesiano:



$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 + y^2 = (2)^2$$

$$y = \pm 1$$

de la figura

$$y = 1$$

- Reemplazando en lo que piden:

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{7}{4}} \quad \textbf{Rpta.}$$

6 Si: $\text{tg}\,\theta < 0$ y $\sec\theta > 0$

determina el signo de la expresión:

$$M = \frac{\text{sen}\,\theta + \text{cotg}\,\theta}{\cos\theta\ \text{cosec}\,\theta}$$

Resolución:

- Analizando datos:

i) $\text{tg}\,\theta < 0$ es decir $\text{tg}\,\theta$ es negativo

$$\Rightarrow \quad \theta \in \text{II ó IV } \mathbb{C}$$

ii) $\sec\theta > 0$ es decir $\sec\theta$ es positivo

$$\Rightarrow \quad \theta \in \text{I ó IV } \mathbb{C}$$

Para que se cumpla (i) y (ii)

intersectamos, es decir:

$$\theta \in \text{IV } \mathbb{C}$$

- Reemplazando los signos en lo que piden:

$$M = \frac{(-) + (-)}{(+) \cdot (-)} = \frac{(-)}{(-)}$$

$$\therefore \quad \boxed{M = (+)} \quad \textbf{Rpta.}$$

7 Si: $\text{tg}\,\alpha = -5;\widehat{45}$; $\alpha \in \text{II } \mathbb{C}$

Calcular: $R = 61\cos\alpha - 60\,\text{ctg}\,\alpha$

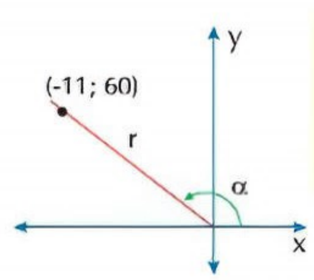
Resolución:

- Del dato:

$$\text{tg}\,\alpha = -5,\widehat{45} = -\left(\frac{545 - 5}{99}\right) = -\frac{540}{99} = -\frac{60}{11}$$

Si: $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{60}{11}$ ⟵ ordenada : $y = 60$; ⟵ abscisa : $x = -11$

- Gráficando:



El radio vector:

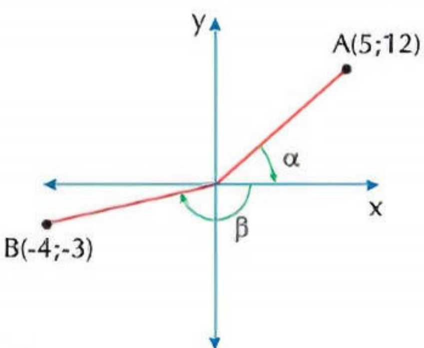
$r=\sqrt{(-11)^2+(60)^2}$

$r = 61$

- Nos piden: $R=61\left(\frac{-11}{61}\right)-60\left(\frac{-11}{60}\right)$

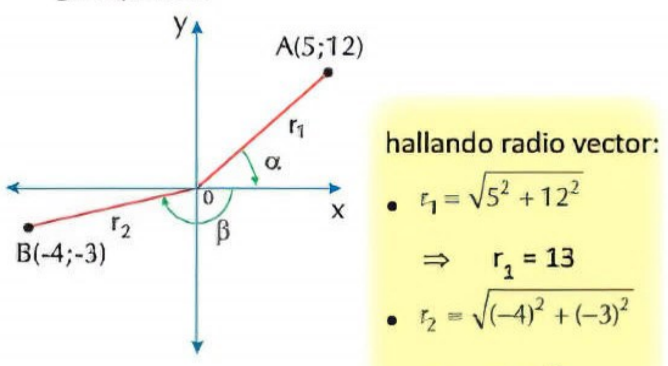
$\therefore$ $R = 0$ **Rpta.**

8 De la figura; halla: $P=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{13\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$



Resolución:

- Notamos que α y β son ángulos en posición normal grafiquemos



hallando radio vector:

- $r_1=\sqrt{5^2+12^2}$

$\Rightarrow$ $r_1 = 13$

- $r_2=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$

$\Rightarrow$ $r_2 = 5$

- Tenemos:

Para "α" abscisa : $x_1 = 5$
ordenada : $y_1 = 12$
radio vector : $r_1 = 13$

Para "β" abscisa : $x_2 = -4$
ordenada : $y_2 = -3$
radio vector : $r_2 = 5$

- Reemplazando en lo que piden:

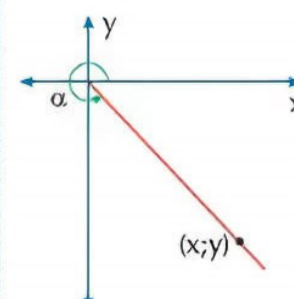
$$P=\frac{\frac{5}{12}+\frac{-4}{-3}}{\cancel{13}\left(\frac{5}{\cancel{13}}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)}=\frac{\frac{21}{12}}{\frac{-3}{1}}$$

$\therefore$ $P=\frac{-7}{12}$ **Rpta.**

9 Sabiendo que se cumple:

$$\operatorname{tg}\alpha = 4\operatorname{ctg}\alpha$$

tal que $\alpha \in$ IV $\mathbb{C}$; hallar: $T=\cos^2\alpha+3\operatorname{sen}^2\alpha$



Resolución:

- Por definición:

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$ $\longrightarrow$ ordenada / abscisa

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$ $\longrightarrow$ abscisa / ordenada

- Reemplazando

$$\frac{x}{y}=\frac{4y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2}=4 \Rightarrow \frac{x}{y}=\pm 2$$

- Pero de la figura: $x > 0$ e $y < 0$

Luego: $\frac{x}{y}=\frac{2}{-1}$ $\longrightarrow$ abscisa / ordenada

Entonces: $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2)^2+(-1)^2}$

$\Rightarrow$ $r=\sqrt{5}$

- Reemplazando en lo que piden:

$$T=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+3\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$\therefore$ $T=\frac{7}{5}$ **Rpta.**

10 Indica el signo de la siguiente expresión:

$$H=\frac{\sec 200^\circ \operatorname{tg} 100^\circ \cos 300^\circ}{\operatorname{sen} 100^\circ - \cos 210^\circ}$$

Resolución:

- Analizando la expresión pedida:

$$\sec \underbrace{200^\circ}_{\text{III C}} \Rightarrow (-)$$

$$\text{tg } \underbrace{100^\circ}_{\text{II C}} \Rightarrow (-)$$

$$\cos \underbrace{300^\circ}_{\text{IV C}} \Rightarrow (+)$$

$$\text{sen } \underbrace{100^\circ}_{\text{II C}} \Rightarrow (+)$$

$$\cos \underbrace{210^\circ}_{\text{III C}} \Rightarrow (-)$$

- Reemplazando:

$$H = \frac{(-)(-)(+)}{(+)-(-)} = \frac{(+)}{(+)}$$

$\therefore$ **H = (+)** **Rpta.**

11 Siendo α y θ ángulos positivos diferentes y menores de una vuelta que cumplen:

$$\sqrt{\text{sen } \theta - 1} - \cos \alpha = 0$$

Calcular: sec (α – θ)

Resolución:

- De la condición dada:

$$\sqrt{\text{sen } \theta - 1} - \cos \alpha = 0 \quad \ldots..(*)$$

- Por existencia: $\text{sen}\theta - 1 \geq 0$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta \geq 1$$

O sea: $\text{sen}\theta = 1 \vee \text{sen}\theta > 1$ (falso)

$\Rightarrow \theta = 90°$ en (*)

$\sqrt{1-1} = \cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 90°$ ó $270°$

Como α y θ son diferentes

$\Rightarrow \alpha = 270°$

- Reemplazando en lo que piden:

$\therefore$ **sec(270° – 90°) = sec 180° = –1** **Rpta.**

12 Si ϕ es la medida de un ángulo en posición normal, tal que:

i) $|\text{tg } \phi| + \text{tg } \phi = 0$

ii) $\left|\sec \phi + \frac{13}{6}\right| = |\sec \phi|$

Calcular: V = ctg ϕ + cosec ϕ.

Resolución:

- De (i) tenemos: $|\text{tg } \phi| = -\text{tg } \phi$

como: $|x| \geq 0 \;;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ tg ϕ es negativo $\begin{cases} \phi \in \text{II } \mathbb{C} \\ \phi \in \text{IV } \mathbb{C} \end{cases}$

ó tg ϕ es cero } ϕ = 0, 180°, 360° ...

De (ii): $\left|\sec \phi + \frac{13}{6}\right| = |\sec \phi|$

hay 2 posibilidades:

- $\sec \phi + \frac{13}{6} = \sec \phi \Rightarrow \frac{13}{6} = 0$; falso

- $\sec \phi + \frac{13}{6} = -\sec \phi \Rightarrow \sec \phi = -\frac{13}{12}$

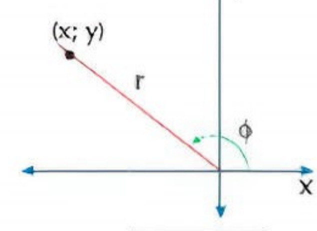
Es decir:

$$\sec \phi = -\frac{13}{12} \begin{cases} \phi \in \text{II } \mathbb{C} \\ \phi \in \text{III } \mathbb{C} \end{cases}$$

Luego para que cumpla (i) y (ii)

$\Rightarrow \phi \in \text{II } \mathbb{C}$

Graficando: $\sec \phi = \frac{13}{-12}$



abscisa: x = –12

Radio vector: r = 13

$$\Rightarrow \quad 13 = \sqrt{(-12)^2 + y^2} \Rightarrow y = 5$$

- Reemplazando en lo que piden:

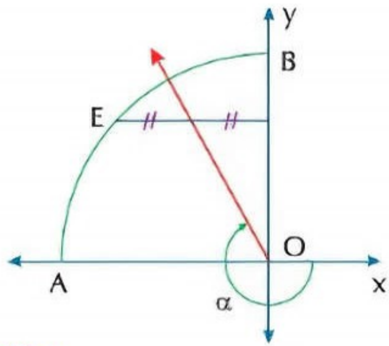
$$V = \frac{-12}{5} + \frac{13}{5} \quad \therefore \quad V = \frac{1}{5}$$ **Rpta.**



Se cumple: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

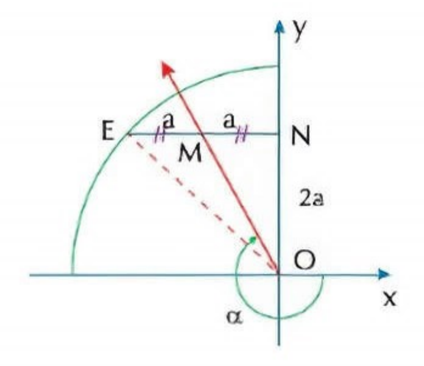
13 Del gráfico calcular tgα siendo: $m\,\overset{\frown}{EB} = m\,\overset{\frown}{AE}$



Resolución:

- En el gráfico se tiene: $m\widehat{EB} = m\widehat{AE}$

$\Rightarrow$ m∡AOE = 45°



Supongamos que EM = MN = a

Se observa:

◺ EON : Notable (45° y 45°)

$\Rightarrow$ ON = NE = 2a

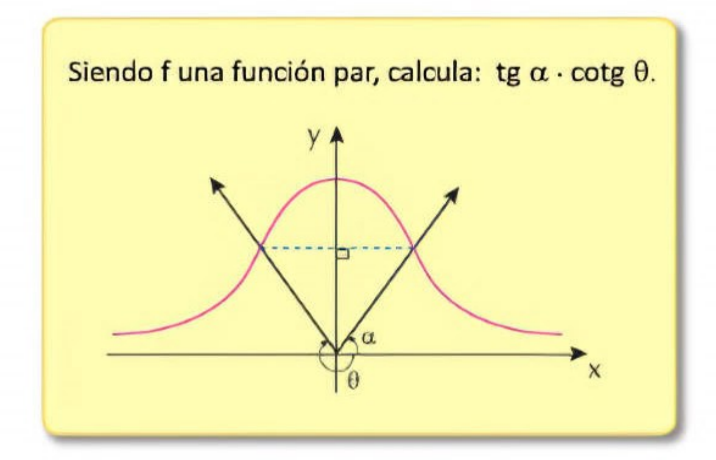
Luego las coordenadas del punto M serán:

M = (–a ; 2a)

En lo que piden: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{2a}{-a} = -2$

$\therefore$ **tg α = –2** **Rpta.**

Siendo f una función par, calcula: tg α · cotg θ.



Reducción al Primer Cuadrante

Razones trigonométricas de ángulos de la forma $(n\cdot 180° \pm \alpha)$ o $(n\pi \pm \alpha)$; $n \in \mathbb{Z}$

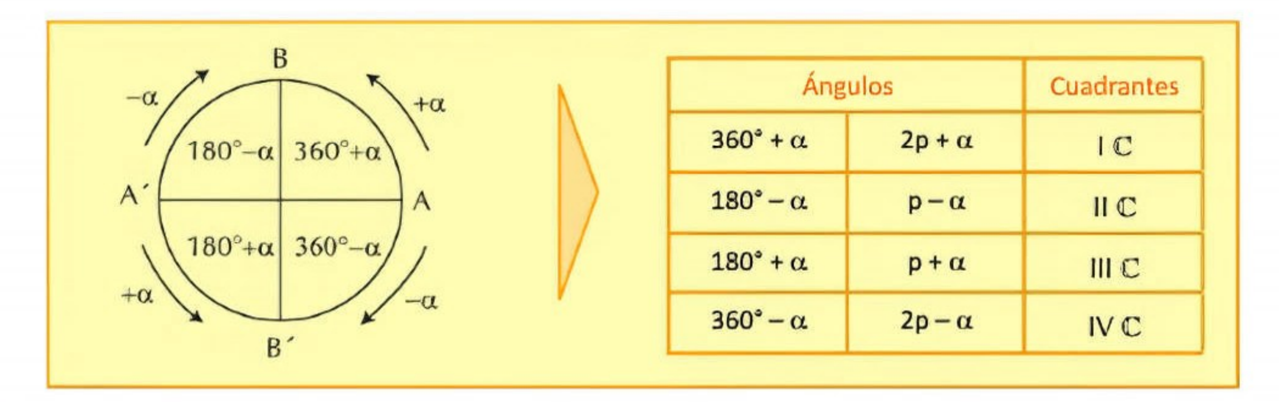
Casos particulares

F.T. (180° ± α) = ± F.T. (α) o F.T. (π ± α) = ± F.T. (α)

F.T. (360° ± α) = ± F.T. (α) o F.T. (2π ± α) = ±F.T. (α)

Para estos casos la función trigonométrica (F.T) inicial, no varía. El signo de la F.T. resultante, depende de la F.T. dada y del cuadrante al que pertenece el ángulo $(180° \pm \alpha)$ o $(\pi \pm \alpha)$; $(360° \pm \alpha)$ o $(2\pi \pm \alpha)$; siendo “a” un ángulo agudo (es aquel ángulo que mide menos de 90°).

Vamos a tener en cuenta la siguiente observacion:



Ángulos		Cuadrantes
360° + α	2p + α	I C
180° – α	p – α	II C
180° + α	p + α	III C
360° – α	2p – α	IV C

Problemas resueltos — REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Reduce $\sec(180° - \alpha)$

Resolución:

i) El ángulo $(180° - \alpha) \in$ II $\mathbb{C}$

ii) La secante em en el II $\mathbb{C}$ es (–)

$$\underset{\ominus}{\sec}\underbrace{(180° - \alpha)}_{\in \text{ II C}} = \boxed{-\sec\alpha}$$

2 Reducir cotg $(360° - \alpha)$

Resolución:

i) El ángulo $(3600° - \alpha) \in$ I $\mathbb{C}$

ii) La cotangente en el I $\mathbb{C}$ es (+)

$$\underset{\oplus}{\text{cotg}}\underbrace{(360° + \alpha)}_{\in \text{ I C}} = \boxed{+\text{ cotg}\,\alpha}$$

3 Reduce $\text{sen}(\pi + \alpha)$

Resolución:

i) El ángulo $(\pi + \alpha) \in$ III $\mathbb{C}$

ii) El seno en el III $\mathbb{C}$ es (–)

$$\underset{\ominus}{\text{sen}}\underbrace{(\pi + \alpha)}_{\in \text{ III C}} = \boxed{-\text{sen}\,\alpha}$$

4 Reduce $\cos(2\pi - \alpha)$

Resolución:

i) El ángulo $(2\pi + \alpha) \in$ IV $\mathbb{C}$

ii) El coseno en el IV $\mathbb{C}$ es (+)

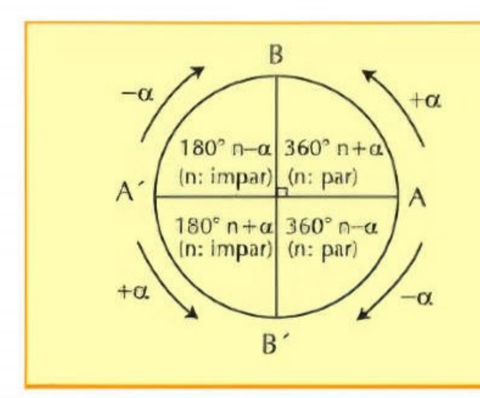
$$\underset{\oplus}{\cos}\underbrace{(2\pi - \alpha)}_{\in \text{ IV C}} = \boxed{+\cos\alpha}$$

Caso general

$$\text{F.T.}[n.180° \pm \alpha] = \pm\text{F.T.}(\alpha) \text{ o F.T.}[n.\pi \pm \alpha] = \pm\text{F.T.}(\alpha)$$

Este caso es similar a los casos particulares, pero hay que tener en cuenta que:

> n (180°), si "n" es impar se encuentra en la posicion A. (ver figura.)
> n (180°), si "n" es par se encuentra en la posicion A.



n	Ángulos		Cuadrantes
Par	180°n + α	nπ + α	I $\mathbb{C}$
Impar	180°n – α	nπ – α	II $\mathbb{C}$
Impar	180°n + α	nπ + α	III $\mathbb{C}$
Par	180°n – α	nπ – α	IV $\mathbb{C}$

Problemas resueltos — REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Reduce $\text{tg}(720° + \alpha)$

Resolución:

i) $720° + \alpha = 180° \times ④ + \alpha$ (# par)

El ángulo $(720° + \alpha) \in$ I $\mathbb{C}$

ii) La tangente en el I $\mathbb{C}$ es (+)

$$\underset{\oplus}{\text{tg}}\underbrace{(720° + \alpha)}_{\in \text{ I C}} = +\text{tg}\,\alpha$$

2 Reduce $\sec(900° + \alpha)$

Resolución:

i) $900° + \alpha = 180° \times ⑤ + \alpha$ (# impar)

El ángulo $(900° + \alpha) \in$ III $\mathbb{C}$

ii) La tangente en el III $\mathbb{C}$ es (–)

$$\underset{\ominus}{\sec}\underbrace{(900° + \alpha)}_{\in \text{ III C}} = \boxed{-\sec\alpha}$$

3 Reduce $\text{sen}(8\pi-\alpha)$

i) $8\pi-\alpha$ → # par

El ángulo $(8\pi-\alpha)\in$ IV $\mathbb{C}$

ii) El seno en el IV $\mathbb{C}$ es (–)

$$\underset{\ominus}{\text{sen}}\underbrace{(8\pi-\alpha)}_{\in \text{IV C}}=\boxed{-\text{sen}\,\alpha}$$

4 Reduce $\cos(5\pi-\alpha)$

Resolución:

i) $5\pi-\alpha$ → # impar

El ángulo $(5\pi-\alpha)\in$ II $\mathbb{C}$

ii) El coseno en el II $\mathbb{C}$ es (–)

$$\underset{\ominus}{\cos}\underbrace{(5\pi-\alpha)}_{\in \text{II C}}=\boxed{-\cos\alpha}$$

Razones trigonométricas de ángulos de la forma:

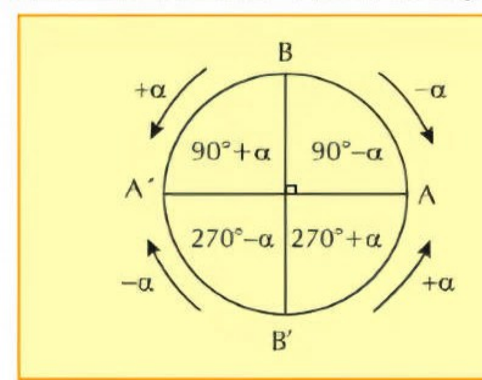
$$\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right]\text{o}\left[(2n+1)90°\pm\alpha\right];n\in\mathbb{Z}$$

Casos particulares

$$\text{F.T.}[90°\pm\alpha]=\pm\text{co F.T.}(\alpha) \quad \text{o} \quad \text{F.T.}\left[\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right]=\pm\text{co F.T.}(\alpha)$$

$$\text{F.T.}[270°\pm\alpha]=\pm\text{co F.T.}(\alpha) \quad \text{o} \quad \text{F.T.}\left[\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right]=\pm\text{co F.T.}(\alpha)$$

En estos casos para reducir es similar a los anteriores, teniendo en cuenta que cada signo del resultado depende de la función inicial, veamos el siguiente cuadro:



Ángulos		Cuadrantes
90° – α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	I $\mathbb{C}$
90° + α	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	II $\mathbb{C}$
270° – α	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	III $\mathbb{C}$
270° + α	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	IV $\mathbb{C}$

Problemas resueltos

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Reduce $\cos(90°-\alpha)$

Resolución:

i) El ángulo $(90°-\alpha)\in$ I $\mathbb{C}$

ii) El coseno en el I $\mathbb{C}$ es (+)

Co F.T.

$$\underset{\oplus}{\cos}\underbrace{(90°-\alpha)}_{\in \text{I C}}=\boxed{+\text{sen}\,\alpha}$$

2 Reduce $\text{tg}(270°+\alpha)$

Resolución:

i) El ángulo $(270°+\alpha)\in$ IV $\mathbb{C}$

ii) La tangente en el IV $\mathbb{C}$ es (–)

Co F.T.

$$\underset{\ominus}{\text{tg}}\underbrace{(270°+\alpha)}_{\in \text{IV C}}=\boxed{-\text{cotg}\,\alpha}$$

3 Reduce $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

Resolución:

I) El ángulo $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\in$ II $\mathbb{C}$

II) La secante en el II $\mathbb{C}$ es (–)

Co F.T.

$$\underset{\ominus}{\sec}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}_{\in \text{II C}}=\boxed{-\text{cosec}\,\alpha}$$

4 Reduce $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

Resolución:

i) El ángulo $\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) \in$ III $\mathbb{C}$

ii) El seno en el III $\mathbb{C}$ es (–)

Co F.T.

$$\underset{\ominus}{\operatorname{sen}}\underbrace{\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}_{\in \text{ III } \mathbb{C}} = -\cos\alpha$$

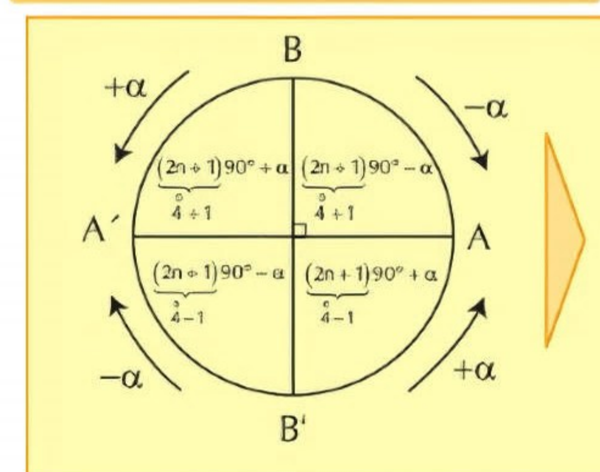
En general:

$$\text{F.T.}\left[(2n+1)90^\circ \pm \alpha\right] = \pm \text{co F.T.}(\alpha) \quad \text{o} \quad \text{F.T.}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right] = \pm \text{co. F.T.}(\alpha)$$

En este caso: (2n + 1), representa un número impar. (2n + 1) 90°.

Si $(2n+1)$ es $\overset{\circ}{4}+1$ (múltiplico de cuatro, más 1), entonces (2n +1) 90° ó (2n + 1)$\frac{\pi}{2}$ está en la posición B. (ver figura.)

Si $(2n+1)$ es $\overset{\circ}{4}-1$ (múltiplico de cuatro, menos 1), entonces (2n + 1) 90° ó (2n + 1)$\frac{\pi}{2}$ está en la posicion B.



n	Ángulos		Cuadrantes
$\overset{\circ}{4}+1$	(2n + 1)90° − α	$(2n+1)\frac{\pi}{2}-\alpha$	I $\mathbb{C}$
$\overset{\circ}{4}+1$	(2n + 1)90° + α	$(2n+1)\frac{\pi}{2}+\alpha$	II $\mathbb{C}$
$\overset{\circ}{4}+1$	(2n + 1)90° − α	$(2n+1)\frac{\pi}{2}-\alpha$	III $\mathbb{C}$
$\overset{\circ}{4}+1$	(2n + 1)90° + α	$(2n+1)\frac{\pi}{2}+\alpha$	IV $\mathbb{C}$

Problemas resueltos

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Reduce $\operatorname{sen}(810^\circ-\alpha)$

Resolución:

i) $810^\circ-\alpha = 90^\circ \times ⑨ - \alpha$ — $\overset{\circ}{4}+1$

El ángulo $(810^\circ-\alpha) \in$ I $\mathbb{C}$

ii) El seno en el I $\mathbb{C}$ es (+)

Co F.T.

$$\underset{\ominus}{\operatorname{sen}}\underbrace{(810^\circ-\alpha)}_{\in \text{ I } \mathbb{C}} = \boxed{+\cos\alpha}$$

2 Reduce $\operatorname{cosec}(630^\circ+\alpha)$

Solución:

i) $630^\circ+\alpha \in = 90^\circ \times ⑦ + \alpha$ — $\overset{\circ}{4}-1$

El ángulo $(630^\circ-\alpha) \in$ IV $\mathbb{C}$

ii) La cosecante en el IV $\mathbb{C}$ es (–)

Co F.T.

$$\underset{\ominus}{\operatorname{cosec}}\underbrace{(630^\circ+\alpha)}_{\in \text{ IV } \mathbb{C}} = \boxed{-\sec\alpha}$$

3 Reducir $\operatorname{cotg}\left(\frac{15\pi}{2}-\alpha\right)$

Resolución:

i) $\frac{15\pi}{2} \quad \alpha = ⑮ \times \frac{\pi}{2} - \alpha$ — $\overset{\circ}{4}+1$

El ángulo $\left(\frac{15\pi}{2}-\alpha\right) \in$ III $\mathbb{C}$

ii) La cotangente en el III $\mathbb{C}$ es (+)

Co F.T.

$$\underset{\oplus}{\operatorname{cotg}}\underbrace{\left(\frac{15\pi}{2}-\alpha\right)}_{\in \text{ III } \mathbb{C}} = \boxed{+\operatorname{tg}\alpha}$$

4 Reduce $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$

Resolución:

i) $\frac{5\pi}{2}+\alpha = ⑤ \times \frac{\pi}{2}+\alpha$ → $\overset{\circ}{4}+1$

ii) El coseno en el II $\mathbb{C}$ es (–)

Co F.T.

$\cos\underbrace{\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}_{\in \text{ II C}} = \boxed{-\text{sen}\,\alpha}$

Reducción al primer cuadrante

Consiste en comparar el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud con respecto al valor de la función trigonométrica de un ángulo del primer cuadrante (ángulo agudo). Para reducir al primer cuadrante, se presentan los siguientes casos:

Primer caso

Reducción para ángulos positivos menores de una vuelta.

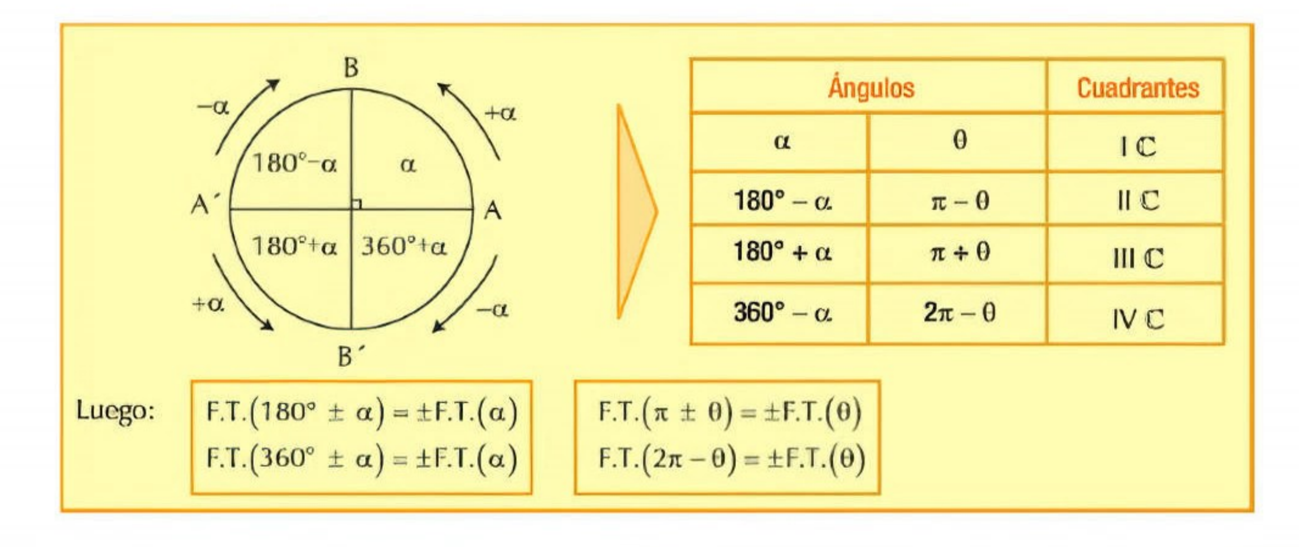
Sabemos que todo ángulo positivo menor de una vuelta (360°) se puede descomponer como un ángulo cuadrantal, más o menos un ángulo agudo, dependiendo del cuadrante al que pertenece.

a) Si el ángulo pertenece al Q_2 lo descomponemos como: $(180°-\alpha)$ o $(\pi-\theta)$.

b) Si pertenece al Q_3 lo descomponemos como $(180°+\alpha)$ o $(\pi+\theta)$

c) Si pertenece al Q_4 lo descomponemos como $(360°-\alpha)$ o $(2\pi-\theta)$, siendo α y θ ángulos agudos.

A continuación veamos al siguiente cuadro:



Ángulos		Cuadrantes
α	θ	I $\mathbb{C}$
180° – α	π – θ	II $\mathbb{C}$
180° + α	π + θ	III $\mathbb{C}$
360° – α	2π – θ	IV $\mathbb{C}$

Luego:

$\text{F.T.}(180° \pm \alpha) = \pm\text{F.T.}(\alpha)$
$\text{F.T.}(360° \pm \alpha) = \pm\text{F.T.}(\alpha)$

$\text{F.T.}(\pi \pm \theta) = \pm\text{F.T.}(\theta)$
$\text{F.T.}(2\pi - \theta) = \pm\text{F.T.}(\theta)$

Problemas resueltos — REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Reduce al primer cuadrante: sen 200°.

Resolución:

- $200° \in \text{III } \mathbb{C} \Rightarrow 200° = 180° + 20°$
- $\underset{\ominus}{\text{sen}}\underbrace{200°}_{\text{III C}} = \text{sen}(180°+20°)$

∴ $\boxed{\text{sen}\,200° = -\text{sen}\,20°}$

2 Reduce al primer cuadrante: cos 130°.

Resolución:

- $130° \in \text{II } \mathbb{C} \Rightarrow 130° = 180° - 50°$
- $\underset{\ominus}{\cos}\underbrace{130°}_{\text{II C}} = \cos(180°-50°)$

∴ $\boxed{\cos 130° = -\cos 50°}$

3 Reduce al primer cuadrante tg 240°

Resolución:

- $240° \in \text{III C} \Rightarrow 240° = 180° + 60°$
- $\underset{\ominus}{\text{tg}}\,\underbrace{240°}_{\text{III C}} = \text{tg}(180° + 60°)$

$\text{tg}\,240° = +\,\text{tg}\,60°$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\text{tg}\,240° = \sqrt{3}}$

4 Reduce al primer cuadrante cosec 350°.

Resolución:

- $350° \in \text{IV C} \Rightarrow 350° = 360° - 10°$
- $\underset{\ominus}{\text{cosec}}\,\underbrace{350°}_{\text{IV C}} = \text{cosec}(360° - 10°)$

$\text{cosec}\,350° = \boxed{-\text{cosec}\,10°}$

5 Reduce al primer cuadrante $\text{cotg}\,\frac{6\pi}{7}$.

Resolución:

- $\frac{6\pi}{7} \in \text{II C} \Rightarrow \frac{6\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7}$
- $\underset{\ominus}{\text{cotg}}\,\underbrace{\frac{6\pi}{7}}_{\text{II C}} = \text{cotg}\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$

$\therefore\quad \boxed{\text{cotg}\,\frac{6\pi}{7} = -\text{cotg}\,\frac{\pi}{7}}$

6 Reduce al primer cuadrante $\sec\frac{7\pi}{5}$.

Resolución:

- $\frac{7\pi}{5} \in \text{III C} \Rightarrow \frac{7\pi}{5} = \pi + \frac{2\pi}{5}$
- $\underset{\ominus}{\sec}\,\underbrace{\frac{7\pi}{5}}_{\text{III C}} = \sec\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right)$

$\therefore\quad \boxed{\sec\frac{7\pi}{5} = -\sec\frac{2\pi}{5}}$

7 Reduce al primer cuadrante $\cos\frac{11\pi}{6}$.

Resolución:

- $\frac{11\pi}{6} \in \text{IV C} \Rightarrow \frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$
- $\underset{\ominus}{\cos}\,\underbrace{\frac{11\pi}{6}}_{\text{IV C}} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

8 Reduce al primer cuadrante $\text{cotg}\,\frac{7\pi}{10}$.

Resolución:

- $\frac{7\pi}{10} \in \text{II C} \Rightarrow \frac{7\pi}{10} = \pi - \frac{3\pi}{10}$
- $\underset{\ominus}{\text{cotg}}\,\underbrace{\frac{7\pi}{10}}_{\text{II C}} = \text{cotg}\left(\pi - \frac{3\pi}{10}\right)$

$\therefore\quad \boxed{\text{cotg}\,\frac{7\pi}{10} = -\text{cotg}\,\frac{3\pi}{10}}$

Segundo caso

Reducción para ángulos mayores de una vuelta.

Cuando el ángulo es mayor de 360°, se siguen los siguientes pasos:

1) Dividimos al ángulo dado entre 360° (ó 2π), dependiendo del sistema en que se trabaje.
2) Las funciones trigonométricas del ángulo dado son iguales a las respectivas funciones trigonométricas del residuo (de la division efectuada).
3) Si dicho residuo es menor de 90° ó $\pi/2$, el problema habrá concluido, pero si fuera mayor, entonces aplicamos cualquiera de los métodos explicados en el primer caso.

Problemas resueltos

1 Reduce al primer cuadrante: sen 3320°

Resolución:

Efectuamos la división:

$$3320° \;\lfloor\; 360°$$

Residuo 80° 9

$\therefore$ sen 3320° = sen 80°

2 Reduce al primer cuadrante: sen 1845°

Resolución:

Efectuamos la división:

$$1845° \;\lfloor\; 360°$$

Residuo 45° 9

sec 1845° = sec 45°

$\therefore$ $\sec 1845° = \sqrt{2}$

3 Reduce al primer cuadrante: tg 3000°.

Resolución:

Efectuamos la división:

$$3000° \;\lfloor\; 360°$$

Residuo 120° 8

$$\operatorname{tg} 3000° = \operatorname{tg} \underbrace{120°}_{\text{II C}} = \operatorname{tg}(180° - 60°)$$

(⊖)

$$\operatorname{tg} 3000° = -\operatorname{tg} 60°$$

$\therefore$ $\operatorname{tg} 3000° = -\sqrt{3}$

4 Reduce al primer cuadrante cos 2850°.

Resolución:

Efectuamos la división:

$$2850° \;\lfloor\; 360°$$

Residuo 330° 7

$$\cos 2850° = \cos \underbrace{330°}_{\text{IV C}} = \cos(360° - 30°)$$

(⊕)

$$\cos 2850° = +\cos 30°$$

$\therefore$ $\cos 2850° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5 Reduce al primer cuadrante: $\operatorname{sen}\dfrac{211\pi}{5}$.

Resolución:

Dividimos el ángulo $\operatorname{sen}\dfrac{211\pi}{5}$ entre 2π.

$$\frac{211\pi}{5} \;\lfloor\; 2\pi \quad \ldots ❶$$

Expresamos "2π" en quintos:

$$2\pi = 5\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{10\pi}{5} \quad \ldots ❷$$

Reemplazamos ❷ en ❶: $\dfrac{211\pi}{5} \;\lfloor\; \dfrac{10\pi}{5}$

Dejamos momentáneamente $\dfrac{\pi}{5}$ y efectuamos la división.

$$211 \;\lfloor\; 10$$

11 21

$\therefore$ residuo → ①

Multiplicamos el residuo por $\dfrac{\pi}{5}$, tenemos:

$$\text{residuo} = 1 \times \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$

Finalmente: ⇒ $\operatorname{sen}\dfrac{211\pi}{5} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$

6 Reduce al primer cuadrante: $\cos\dfrac{328\pi}{9}$

Resolución:

Dividimos al ángulo $\dfrac{328\pi}{9}$ entre 2π

$$\frac{328\pi}{9} \;\lfloor\; 2\pi \quad \ldots ❶$$

Expresamos "2π" en novenos:

$$2\pi = 9\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{18\pi}{9} \quad \ldots ❷$$

Reemplazamos ❷ en ❶: $\dfrac{328\pi}{9} \;\lfloor\; \dfrac{18\pi}{9}$

Dejamos momentáneamente $\dfrac{\pi}{9}$ y efectuamos la división.

$$328 \;\lfloor\; 18$$

148 18

$\therefore$ residuo → ④

Multiplicamos el residuo por $\frac{\pi}{9}$, tenemos:

$$\text{residuo} = 4 \times \frac{\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}$$

Finalmente: $\Rightarrow \quad \cos\frac{328\pi}{9} = \cos\frac{4\pi}{9}$

7 Reduce al primer cuadrante: $\operatorname{tg}\frac{219\pi}{7}$

Resolución:

Dividimos el ángulo $\frac{219\pi}{7}$ entre 2π

$$\frac{219\pi}{7} \;\underline{\big|\; 2\pi \quad}$$

Expresamos "2π" en séptimos:

$$2\pi = 7\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{14\pi}{7}$$

Luego: $\frac{219\pi}{7} \;\underline{\big|\; \frac{14\pi}{7}}$

Dejamos momentáneamente $\frac{\pi}{7}$ y efectuamos la división.

$$\begin{array}{r|l} 219 & 14 \\ \hline 79 & 15 \end{array}$$

$\therefore$ residuo $\rightarrow$ ⑨

Multiplicamos el residuo por $\frac{\pi}{7}$, tenemos:

$$\text{residuo} = 9 \times \frac{\pi}{7} = \frac{9\pi}{7}$$

Entonces: $\operatorname{tg}\frac{219\pi}{7} = \underset{\oplus}{\operatorname{tg}}\underbrace{\frac{9\pi}{7}}_{Q_3} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right)$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{tg}\frac{219\pi}{7} = +\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}}$$

8 Reduce al primer cuadrante: $\operatorname{cosec}\frac{86\pi}{11}$

Resolución:

Dividimos el ángulo $\frac{86\pi}{11}$ entre 2π

$$\frac{86\pi}{11} \;\underline{\big|\; 2\pi \quad} \; \ldots ❶$$

Expresamos "2π" en onceavos:

$$2\pi = 11\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \frac{22\pi}{11} \; \ldots ❷$$

Reemplazamos ❷ en ❶: $\frac{86\pi}{11} \;\underline{\big|\; \frac{22\pi}{11}}$

Dejamos momentáneamente $\frac{\pi}{11}$ y efectuamos la división.

$$\begin{array}{r|l} 86 & 22 \\ \hline \text{residuo} \rightarrow 20 & 3 \end{array}$$

Multiplicamos el residuo por $\frac{\pi}{11}$, tenemos:

$$\text{residuo} = 20 \times \frac{\pi}{11} = \frac{20\pi}{11}$$

Entonces:

$$\operatorname{cosec}\frac{86\pi}{11} = \underset{\ominus}{\operatorname{cosec}}\underbrace{\frac{20\pi}{11}}_{Q_4} = \operatorname{cosec}\left(2\pi - \frac{2\pi}{11}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{cosec}\frac{86\pi}{11} = -\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{11}}$$

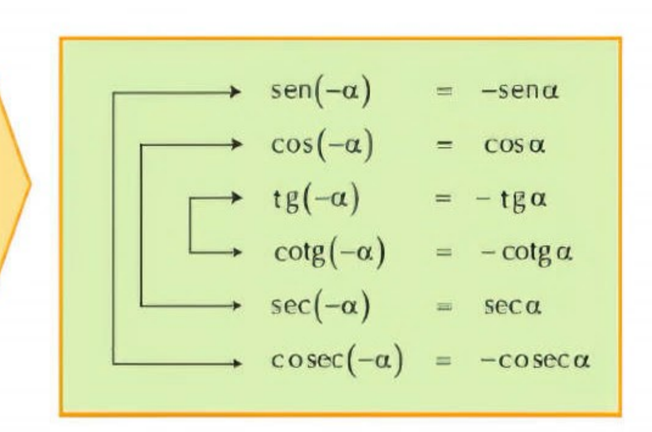
Tercer caso

Reducción para ángulos negativos:

Cuando el ángulo es negativo se siguen los siguientes pasos:

1) Función trigonométrica de ángulo negativo, se convierte a funcion trigonométrica de ángulo positivo, como se observa en la siguiente tabla.

2) Se aplican las reglas anteriores.



Problemas resueltos

1 Reduce al primer cuadrante: sen (– 120°)

Resolución:

Aplicamos la relación:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$

$$\text{sen}(-120°) = -\text{sen}\,120° \quad ...❶$$

Además:

$$\underset{\oplus}{\text{sen}}\underbrace{120°}_{\text{II C}} = \text{sen}(180° - 60°)$$

$$\text{sen}\,120° = +\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ...❷$$

Reemplazo ❷ en ❶

$$\therefore \quad \text{sen}(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 Reduce al primer al primer cuadrante: tg (–300°)

Resolución:

Aplicamos la relación:

$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

$$\text{tg}(-300°) = -\text{tg}\,300° \quad ...❶$$

Además:

$$\underset{\ominus}{\text{tg}}\,\underbrace{300°}_{\text{IV C}} = \text{tg}(360° - 60°)$$

$$\text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3} \quad ...❷$$

Reemplazo ❷ en ❶:

$$\text{tg}(-300°) = -\left[-\sqrt{3}\right]$$

$$\therefore \quad \text{tg}(-300°) = \sqrt{3}$$

3 Reduce al primer cuadrante cos (–4520°)

Resolución:

Aplicamos la relación:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(-4520°) = \cos 4520° \quad ...❶$$

Dividiendo 4520° ÷ 360°

4520°	360°
920°	12
Residuo → 200°	

$$\cos 4520° = \underset{\ominus}{\cos}\underbrace{200°}_{\text{III C}} = \cos(180° + 20°)$$

$$\cos 4520° = -\cos 20° \quad ...❷$$

Reemplazo ❷ en ❶:

$$\therefore \quad \cos 4520° = \cos 20°$$

4 Reduce al primer cuadrante $\text{cosec}\left(\frac{13\pi}{7}\right)$

Resolución:

Aplicamos la relación:

$$\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$$

$$\text{cosec}\left(-\frac{13\pi}{7}\right) = -\text{cosec}\frac{13\pi}{7} \quad ...❶$$

Además: $\underset{\ominus}{\text{cosec}}\underbrace{\frac{13\pi}{7}}_{\text{IV C}} = \text{cosec}\left(2\pi - \frac{\pi}{7}\right)$

$$\text{cosec}\frac{13\pi}{7} = -\text{cosec}\frac{\pi}{7} \quad ...❷$$

Reemplazo ❷ en ❶: $\text{cosec}\left(-\frac{13\pi}{7}\right) = -\left[-\text{cosec}\frac{\pi}{7}\right]$

$$\therefore \quad \text{cosec}\left(-\frac{13\pi}{7}\right) = \text{cosec}\frac{\pi}{7}$$

Problemas resueltos

1 Simplifica $E = \operatorname{tg}(\pi-\alpha) + \operatorname{tg}(\pi+\alpha)$

A) –2 tg a B) – 2 cotg a C) 2 tg a

D) 2 cotg a E) 0

Resolución:

Aplicando la reducción al primer cuadrante, tenemos:

$$\underset{\ominus}{\operatorname{tg}}(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{II C}}) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\underset{\oplus}{\operatorname{tg}}(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{III C}}) = \operatorname{tg}\alpha$$

Reemplazando en la expresión a simplificar:

$$E = -\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha$$



$\therefore$ $E = 0$ **Rpta. E**

2 Calcula el valor de:

$$K = \frac{\operatorname{sen}160° \cdot \operatorname{sen}200° \cdot \operatorname{tg}250°}{\cos 110° \cdot \operatorname{cosec}290° \cdot \cot 340°}$$

A) –tg 20° B) –cotg 20° C) –1 D) 1 E) 2

Resolución:

Realizando la reducción tenemos:

sen 160°= sen (180°– 20°)= sen 20°

sec 200°= sec (180°+ 20°)= sec 20°

tg 250°= tg (180°+70°) = tg 70° = cotg 20°

cos 110°= cos (180°–70°)= – cos 70°= sen 20°

co sec 290°= co sec (360°–70°)= – co sec 70° = – sec 20°

cotg 340°= cotg (360°– 20°)= cotg 20°



$$\text{F.T.}(\theta) = \text{Co F.T.}(90° - \theta)$$

Reemplazando en la expresión a reducir tenemos:

$$K = \frac{(\operatorname{sen}20°)(-\sec 20°)(\operatorname{cotg}20°)}{(-\operatorname{sen}20°)(-\sec 20°)(-\operatorname{cotg}20°)}$$

$$K = \frac{-\cancel{\operatorname{sen}20}.\ \cancel{\sec 20°}.\ \cancel{\operatorname{cotg}20°}}{-\cancel{\operatorname{sen}20°}.\ \cancel{\sec 20°}.\ \cancel{\operatorname{cotg}20°}}$$

$\therefore$ $K = 1$ **Rpta. D**

3 Calcula el valor de:

$$M = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{sen}(180° - x)} + \frac{\cos(-x)}{\cos(180° + x)} + \frac{\operatorname{tg}(-x)}{\operatorname{tg}x}$$

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

Resolución:

Realizando la reducción al primer cuadrante, tenemos:

sen (–x) = – sen x

sen (180° – x) = sen x

cos (–x) = cos x

cos (180° + x) = –cos x

tg (–x) = –tg x

Reemplazando en la expresión pedida:

$$M = \frac{-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x} + \frac{\cos x}{-\cos x} + \frac{-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}$$

M= –1 –1 –1



$\therefore$ M=-3 **Rpta. A**

4 Calcula:

$$N = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} - \operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}$$

A) 32 B) 16 C) 8 D) 4 E) 2

Resolución:

Realizamos la reducción al primer cuadrante:

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$$

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$$

Reemplazando:

$$N = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} - \left(-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right)$$

$$N = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$$

$$N = 2\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right]$$

Pero: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}15° = 2 - \sqrt{3}$

$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}75° = 2 + \sqrt{3}$

Luego: $N=2\left[2-\cancel{\sqrt{3}}+2+\cancel{\sqrt{3}}\right]$

$\therefore$ $N = 8$ **Rpta. C**

5 Simplifica:

$$E=\frac{\operatorname{sen}(180°+A)+\cos(270°-A)}{\cos(360°+A)+\operatorname{sen}(90°+A)}$$

A) 1 B) –2tgA C) tg A

D) –tg A E) – cotg A

Resolución:

Aplicando los criterios de reducción al primer cuadrante:

$$\operatorname{sen}(180°+A)=-\operatorname{sen}A$$
$$\cos(270°-A)=-\operatorname{sen}A$$
$$\cos(360°+A)=\cos A$$
$$\operatorname{sen}(90°+A)=\cos A$$

Reemplazando tenemos: $E=\dfrac{(-\operatorname{sen}A)+(-\operatorname{sen}A)}{(\cos A)+(\cos A)}$

$$E=\frac{-2\operatorname{sen}A}{2\cos A}=-\frac{\operatorname{sen}A}{\cos A}$$

Por identidades: $\operatorname{tg}A=\dfrac{\operatorname{sen}A}{\cos A}$

Entonces: $\Rightarrow$ $E=-\operatorname{tg}A$ **Rpta. D**

6 Reduce:

$$P=\frac{\operatorname{tg}(9\pi+x)\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{cotg}(630°+x)\cdot\operatorname{sen}(720°+x)}$$

A) –2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Resolución

Realizando la reducción al primer cuadrante, tenemos:

$$\operatorname{tg}(9\pi+x)=\operatorname{tg}x$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen}x$$
$$\operatorname{cotg}(630°+x)=-\operatorname{tg}x$$
$$\operatorname{sen}(720°+x)=\operatorname{sen}x$$

Reemplazando tenemos: $P=\dfrac{(\operatorname{tg}x)(-\operatorname{sen}x)}{(-\operatorname{tg}x)(\operatorname{sen}x)}$

$$P=\frac{-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{sen}x}{-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{sen}x}$$

$\therefore$ $P = 1$

7 Qué relación existe entre "a" y "b", si:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2a-3b}{8}\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{6\pi+3a-2b}{4}\right)=0$$

A) b = 6a B) b = 2a C) b = 4a

D) b = a E) b = 3a

Resolución:

Trabajamos en la condición:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2a-3b}{8}\right)=-\underbrace{\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3a-2b}{4}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2a-3b}{8}\right)=-\left[-\operatorname{tg}\left(\frac{3a-2b}{4}\right)\right]$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2a-3b}{8}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{3a-2b}{4}\right)$$

$$\frac{2a-3b}{\cancel{8}_{2}}=\frac{3a-2b}{\cancel{4}_{1}}$$

$$2a-3b=6a-4b$$

$\therefore$ $b = 4a$ **Rpta. B**

8 Simplifica:

$$E=\frac{\operatorname{tg}(230°+x)+\operatorname{tg}(50°+x)}{\operatorname{cotg}(40°-x)}$$

A) – tg x B) – cotg x C) tg x D) –2 E) 2

Resolución:

Reduciendo los términos de la expresión dada:

- tg (230°+x) = tg [180°+(50°+x)] = tg (50°+x)
- cotg (40-x) = tg (50°+x)

Reemplazando: $E=\dfrac{\operatorname{tg}(50°+x)+\operatorname{tg}(50°+x)}{\operatorname{tg}(50°+x)}$

$$E=\frac{2\,\cancel{\operatorname{tg}(50°+x)}}{\cancel{\operatorname{tg}(50°+x)}}$$

$\therefore$ $E = 2$

9 Si $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$, calcula:

$$A=\frac{tg(4\alpha+6\theta)}{tg(6\alpha+4\theta)}+\frac{sen(5\alpha+4\theta)}{cos(4\alpha+5\theta)}$$

A) -2 B) - 1 C) 0 D) 1 E)2

Resolución:

Trabajamos en la expresión a reducir, dándole forma adecuada a los ángulos:

$$A=\frac{tg[4(\alpha+\theta)+2\theta]}{tg[4(\alpha+\theta)+2\alpha]}+\frac{sen[4(\alpha+\theta)+\alpha]}{cos[4(\alpha+\theta)+\theta]}$$

$$A=\frac{tg\left[4\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\theta\right]}{tg\left[4\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\alpha\right]}+\frac{sen\left[4\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\right]}{cos\left[4\left(\frac{\pi}{2}\right)+\theta\right]}$$

$$A=\frac{tg(2\pi+2\theta)}{tg(2\pi+2\alpha)}+\frac{sen(2\pi+\alpha)}{cos(2\pi+\theta)}$$

$$A=\frac{tg\,2\theta}{tg\,2\alpha}+\frac{sen\,\alpha}{cos\,\theta}\quad ...❶$$

De la condición:

$$2\alpha+2\theta=\pi\Rightarrow 2\theta=\pi-2\alpha$$
$$tg\,2\theta=tg(\pi-2\alpha)$$
$$tg\,2\theta=-tg\,2\alpha$$

$$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$
$$cos\,\theta=cos\,\theta\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$cos\,\theta=sen\,\alpha$$

Reemplazando en ❶:

$$A=\frac{-tg\,2\alpha}{tg\,2\alpha}+\frac{sen\,\alpha}{sen\,\alpha}$$
$$A=-1+1$$

$\therefore$ $A=0$ **Rpta. C**

10 Siendo Sen 40°=a, Halla el valor de:

$$M=\frac{sen\,140°\cdot cos\,130°\cdot tg(-130°)}{cotg\,580°\cdot sec\,1130°\cdot cosec(-400°)}$$

A) $-a^4$ B) $-a^2$ C) a^2 D) $-a^{-2}$ E) a^4

Resolución:

Reduciendo al primer cuadrante:

$$sen\,140°=sen(180°-40°)=sen\,40°$$
$$cos\,130°=cos(90°+40°)=-sen\,40°$$
$$tg(-130°)=-tg\,130°=-tg(90°+40°)$$
$$=-(-cotg\,40°)=cotg\,40°$$
$$cotg\,580°=cotg(180°\times3+40°)=cotg\,40°$$
$$sec\,1130°=sec\,50°=cosec\,40°$$
$$cosec(-400°)=-cosec\,400°=-cosec\,40°$$

Reemplazando tenemos:

$$M=\frac{(sen\,40°)(-sen\,40°)(cotg\,40°)}{(cotg\,40°)(cosec\,40°)(-cosec\,40°)}$$

$$M=\frac{-sen^2\,40°}{-cosec^2\,40°}=\frac{sen^2\,40°}{\frac{1}{sen^2\,40°}}=sen^4\,40°$$

$\therefore$ $M=a^4$ **Rpta. E**

11 Halla el valor de "α" tal que:

$$sen(sen^2\theta)+sen(\pi+sen\,\alpha)=0\quad ...❶$$

$$sen(cos^2\theta)=cos\frac{1}{2}(\pi-2\,sen\,\alpha)\quad ...❷$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) π E) $\frac{\pi}{2}$

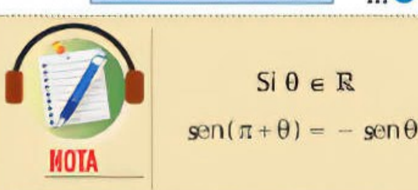
Resolución:

La expresión ❶ se puede escribir de la manera siguiente:

$$sen(sen^2\theta)-sen(sen\,\alpha)=0$$

Donde: $sen(sen^2\theta)=sen(sen\,\alpha)$

$\therefore$ $sen^2\theta=sen(sen\,\alpha)$ ...❶



Si $\theta\in\mathbb{R}$

$sen(\pi+\theta)=-sen\,\theta$

La expresión ❷ se puede escribir de la menera siguiente:

Por propiedad:

$$sen(cos^2\theta)=cos\left(\frac{\pi}{2}-sen\,\alpha\right)$$

Por propiedad:

$$(cos^2\theta)+\left(\frac{\pi}{2}-sen\,\alpha\right)=90°$$

$$\therefore\ cos^2\theta=sen\,\alpha\quad ...❶$$

Luego, sumamos miembro a miembro ❶ y ❷:

$$\underbrace{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{} = (\text{sen}\,\alpha) + (\text{sen}\,\alpha)$$

$$1 = 2\ \text{sen}\,\alpha$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} = \text{sen}\,30°$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\frac{\pi}{6}$$

Por comparación: $\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{6}$ **Rpta. A**

12 Si sen 2000° = k, halla: cos 560°

A) $\sqrt{1-k^2}$ B) $\sqrt{k^2-1}$ C) $-\sqrt{1-k^2}$

D) $-\sqrt{k^2-1}$ E) $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

Resolución:

Por identidad Pitagórica:

$$\begin{array}{r|l} 2000° & 360° \\ \hline 1800° & 5 \\ 200° & \end{array}$$

$$\underbrace{\text{sen}\,2000°}_{k} = \text{sen}\,200°$$

$$= \text{sen}(180° + 20°)$$

$$k = -\text{sen}\,20°$$

$$\therefore\ -k = \text{sen}\,20°$$

$$\begin{array}{r|l} 560° & 360° \\ \hline 360° & 1 \\ 200° & \end{array}$$

$$\cos 560° = \cos 200°$$

$$\cos 560° = \cos(180° + 20°)$$

$$\therefore\ \cos 560° = -\cos 20°$$

Por identidad Pitagórica:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$$

Obtenemos que:

$$\cos 20° = \sqrt{1-\text{sen}^2 20°} \quad ...❸$$

Reemplazamos ❶ en ❷:

$$\cos 20° = \sqrt{1-(-k^2)} = \sqrt{1-k^2} \quad ...❹$$

Reemplazamos ❹ en ❷

$$\cos 560° = -\cos 20° = \sqrt{1-k^2}$$

$$\therefore\ \cos 560° = -\sqrt{1-k^2}$$ **Rpta. C**

13 Suma:

$$\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 73° + \text{sen}^2 110° + \text{sen}^2 163°$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -1 E) 3

Resolución

Sabemos que:

$$\text{sen}\,110° = \text{sen}\,(180°-70°)$$
$$\text{sen}\,110° = \text{sen}\,70°$$
$$\therefore\ \text{sen}^2 110° = \text{sen}^2 70°$$
$$\text{sen}\,163° = \text{sen}\,(180°-17°)$$
$$\text{sen}\,163° = \text{sen}\,17°$$
$$\therefore\ \text{sen}^2 163° = \text{Sen}^2 17°$$

Por co-razón:

$$\text{sen}\,70° = \cos 20°$$
$$\text{sen}\,17° = \cos 73°$$

Luego: $\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 73° + \underbrace{\text{sen}^2 70°} + \underbrace{\text{sen}^2 17°}$

$$\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 73° + \cos^2 20° + \cos^2 73°$$

Agrupamos términos:

$$\underbrace{\left(\text{sen}^2 20° + \cos^2 20°\right)}_{1} + \underbrace{\left(\text{sen}^2 73° + \cos^2 73°\right)}_{1} = 2$$

Rpta. C

14 Efectua:

$$\text{sen}\,\theta.\cos\theta.\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).\text{cosec}\,\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta\right]$$

A) 1 B) 2 C) sen θ

D) cos θ E) – sen θ

Resolución:

Sabemos que:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \text{sen}\,\theta$$

Luego:

$$\text{sen}\,\theta.\cos\theta.[\cos\theta.\text{cosec}\,\theta + \text{sen}\,\theta.\sec\theta]$$

$$\text{sen}\,\theta.\cos\theta.\left[\cos\theta.\frac{1}{\text{sen}\,\theta} + \text{sen}\,\theta.\frac{1}{\cos\theta}\right]$$

$$\cancel{\text{sen}\,\theta.\cos\theta}.\left[\frac{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\cancel{\text{sen}\,\theta.\cos\theta}}\right] = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \boxed{1}$$

Rpta. A

Amplía tus conocimientos



El reloj solar digital de Beniganim

por Josep Emili Arias

Siempre hemos asociado los relojes digitales a los componentes electrónicos, pero existen otros relojes digitales de mayor simplicidad y carentes de cualquier pila contaminante. Un reloj solar digital donde los dígitos se encienden con la misma luz de nuestra estrella. El día 30 de julio de este año, en lo alto de l'Avinguda Nova de Beniganim, fue ensamblada la estructura de este reloj solar digital diseñado por el físico y matemático Joan Olivares. Este reloj solar, por su diseño espectacular, bien podría presidir cualquier Museo de la Ciencia, un parque tecnológico u otra institución científica. En su descripción, estas singulares esculturas, son una simbiosis entre la ciencia y el arte. Son un claro e indudable homenaje a ese afán y necesidad que el hombre ha sentido siempre por mesurar y precisar el tiempo y sus ciclos estacionales. Hoy, comprender la construcción de estos innovadores relojes solares es la mejor didáctica para familiarizarse con la astronomía, los solsticios, equinoccios, el ecuador celeste, la eclíptica..., en fin, la Tierra y sus tres movimientos. Estos relojes son, como muy bien definió su autor en una conferencia: «*...esas matemáticas a la sombra*». Pues detrás de estos ingenios hay todo un mundo de ángulos, trigonometría, álgebra, y sin olvidarnos, de esa ecuación del tiempo que nos recuerda que la rotación de la Tierra presenta ligeras variaciones de velocidad según en que meses del año nos encontremos.



Personaje de la Matemática

Flavio vega Villanueva

(1915-2011)



Maestro de las matemáticas, Flavio Vega Villanueva nació en la tierra del callejón de Huaylas, Ancash, el 10 de abril de 1915.

Su estudios primarios los culminó en el colegio nacional de Nuestra Señora de Guadalupe en Lima, mientras que sus estudios superiores los realizó en la Facultad de Ciencias Biológicas, Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

En esta Universidad, precisamente, estuvo en la Sección de Matemáticas desde 1938 a 1942. Aquí obtuvo el grado académico de Doctor en Ciencias Matemáticas (1955).

Expositor en numerosos centros de estudios superiores, Vega ha sido miembro fundador y primer secretario de la Sociedad Matemática Peruana, de la Asociación Peruana de Computación e Informática, del Colegio de Matemáticos del Perú, entre otros.

PUBLICACIONES DEL MATEMÁTICO

Es autor de numerosas publicaciones, tales como. *Las matemáticas y su importancia, Sobre una propiedad de la recta de Newton y la Recta de Housel*, *Informe semestral*, entre otras.

Entre 1951 y 1994 publicó textos escolares de suma importancia para el nivel primario y secundario. Asimismo, Vega Villanueva colaboró con interesantes artículos periodísticos publicados, principalmente, en el diario *El Comercio*.

La gratitud de Flavio Vega es, sin duda, una de sus principales características personales. Esto lo demuestra al escribir lo siguiente: "Al publicar mis libros dando a conocer todo lo referente a la nueva matemática y su didáctica correspondiente, lo hago convencido de cumplir así el legado de mi sabio profesor, el insigne matemático polaco, doctor Alfred Rosemblat, de quien tuve el privilegio de ser su alumno y conocer lo que es en sí la Matemática".

HONOR AL MAESTRO

Su intensa y prolífica vida le ha permitido ser reconocido y premiado en distintas instituciones educativas del país. Hijo ilustre del departamento de Ancash, recibió las Palmas Magisteriales del Perú en el grado de Caballero, de Educador y de Maestro en los años 1963, 1987, 1988, respectivamente. También fue distinguido como Profesor Emérito de su alma mater, San Marcos, en 1977 y la Municipalidad de Lima le otorgó la medalla del Maestro.

LOGROS PROFESIONALES

Entre sus mayores logros profesionales figura el nuevo enfoque de la enseñanza de la asignatura de Geometría Analítica. También impulsó la creación de un nuevo pabellón de Matemáticas en la Ciudad Universitaria.

En 1970 creó la carrera de Computación, de la que egresó una primera promoción de cuatro alumnos. Asimismo, su paso por países como Brasil, Estados Unidos, México y Francia, le permitió adquirir no sólo mayor experiencia y conocimientos, sino también establecer contactos profesionales para beneficio de un gran número de becados de nuestro país.

En suma, Flavio Villanueva es un personaje sanmarquino que forjó cátedra dentro y fuera de las aulas de esta Cuatricentenaria Universidad, una institución educativa que lo vio nacer y crecer hasta convertirse en un renombrado y respetado matemático.

Investiga:



1. **Luego de haber leído la biografía de este destacado maestro, ¿cuál es tú opinión sobre el rol de los maestros en la formación de las futuras generaciones de profesionales en el país?**

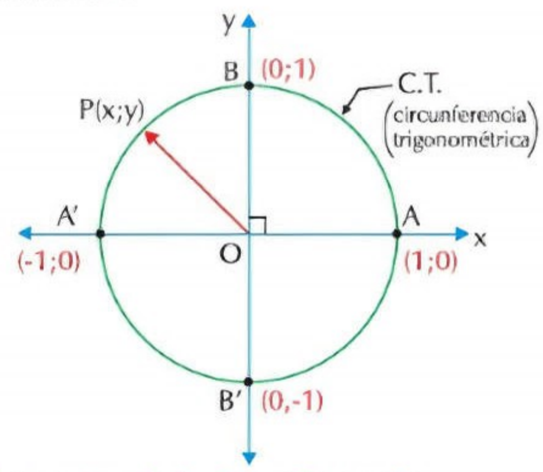
Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Dibuja una circunferencia trigonométrica y representa el seno, coseno y tangente de un arco, luego analiza sus variaciones, comportamiento y signo en cada cuadrante.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Emplea las identidades fundamentales y auxiliares, las transformaciones algebraicas en la demostración de otras identidades y en la simplificación de expresiones que contienen funciones trigonométricas.

Circunferencia Trigonométrica

Definición

Es aquella circunferencia inscrita en un plano cartesiano de tal manera que su centro coincide con el origen de coordenadas y su radio es la unidad de dicho sistema



Elementos de la circunferencia trigonométrica

A : Origen de Arcos

B : Origen de complementos

A' : Origen de suplementos

B' : Sin denominación específica

O : Origen de coordenadas

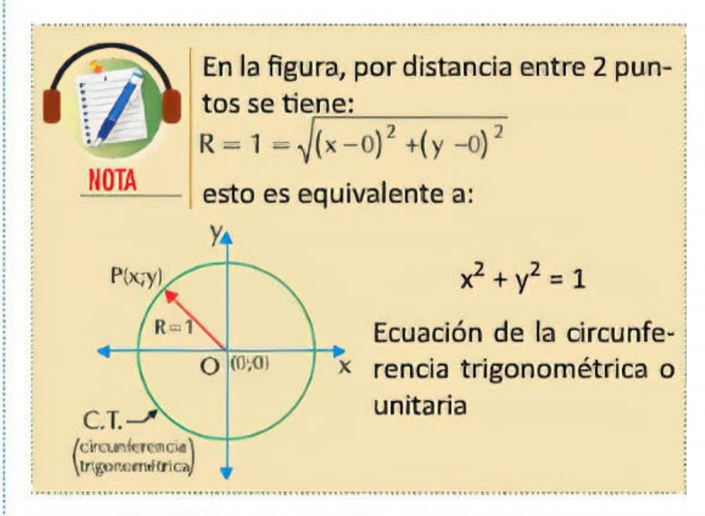
P : Extremo del arco

NOTA

En la figura, por distancia entre 2 puntos se tiene:

$R = 1 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

esto es equivalente a:

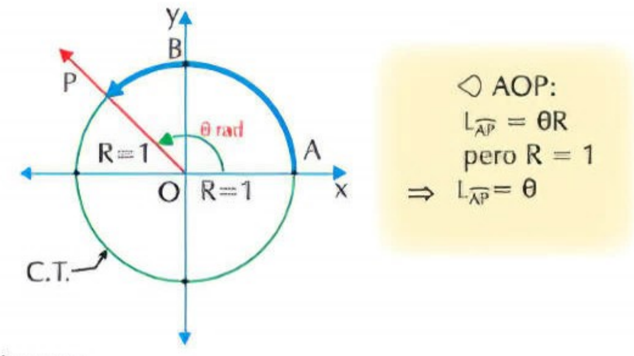


$x^2 + y^2 = 1$

Ecuación de la circunferencia trigonométrica o unitaria

Característica de la circunferencia trigonométrica

En la figura mostrada tenemos:



$\sphericalangle$ AOP:

$L_{\overset{\frown}{AP}} = \theta R$

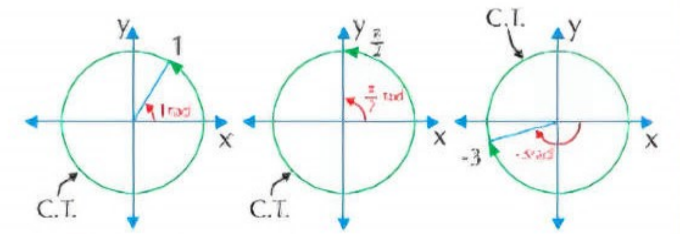
pero $R = 1$

$\Rightarrow L_{\overset{\frown}{AP}} = \theta$

Luego:

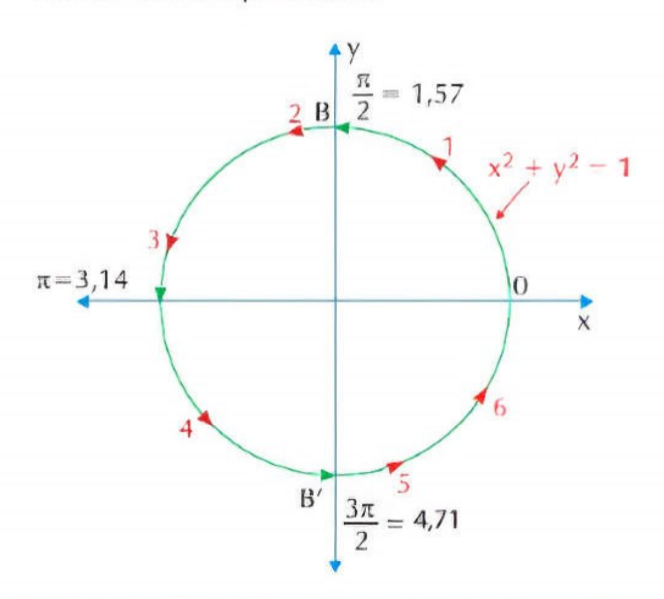
El arco y el ángulo expresado en radianes son númericamente iguales.

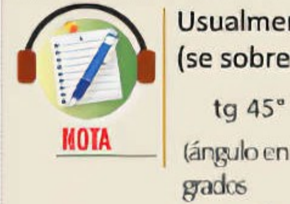
Así por ejemplo el arco 1 en la C.T. se relaciona a un ángulo en posición normal 1 rad, análogamente el arco $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ rad y el arco - 3 a -3 rad (ver figura)



A continuación, se ubican los extremos de los arcos relacionados a los ángulos $\frac{\pi}{2}$ rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad y 2π rad (en la C.T.).

Estos servirán como referencia para ubicar otros arcos en forma aproximada.





Usualmente no se escribe en radianes (se sobreentiende) Por ejemplo:

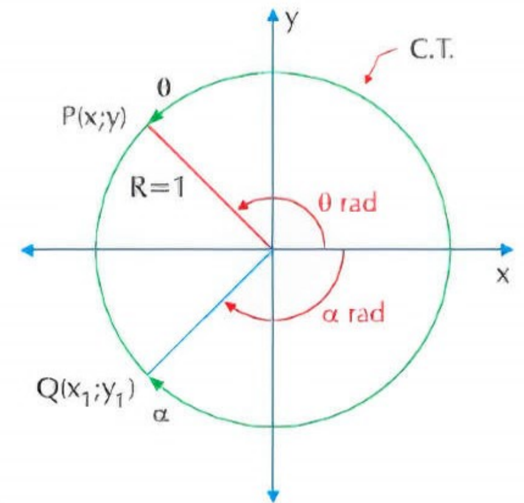
$$\text{tg } 45° = \text{tg } \frac{\pi}{4} = \text{tg}(0,7854) = 1$$

(ángulo en grados sexagesimales) (arco) (número real)

Representaciones de las funciones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica.

1 Seno:

El seno de un arco es la ordenada del extremo del arco.



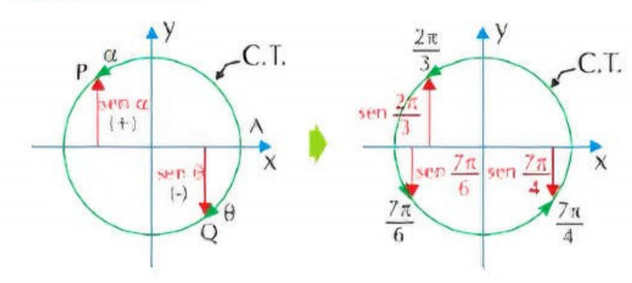
Por definición:

- sen θ = y
- sen α = y_1

Se comprueba: sen (θ rad) = $\frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$

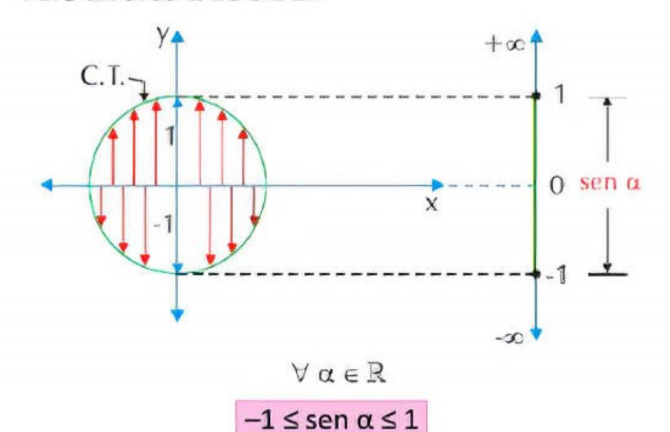
Pero: sen (θ rad) = sen θ ⇒ sen θ = y

Representación:



Análisis del seno:

Para un arco α de 0 a 2π



∀ α ∈ ℝ

$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$

Del gráfico:

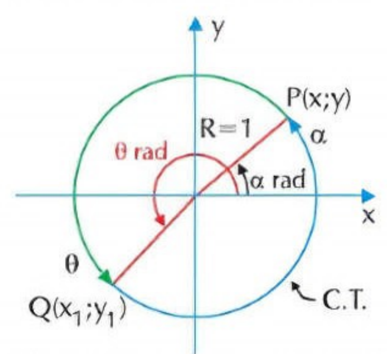
	0	90° ó $\frac{\pi}{2}$	180° ó π	270° ó $\frac{3\pi}{2}$	360° ó 2π
sen	0	1	0	-1	0

Variación

	Variación	Comportamiento	Signo
⟨0 ; 90°⟩	0 a1	crece	+
⟨90° ; 180°⟩	1 a 0	decrece	+
⟨180° ; 270°⟩	0 a - 1	decrece	-
⟨270° ; 360°⟩	-1 a 0	crece	-

2 Coseno:

El coseno de un arco es la abscisa del extremo del arco.

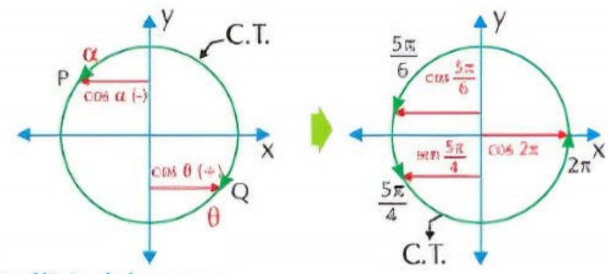


Por definición: * $\cos\alpha = x$ * $\cos\theta = x_1$

Se comprueba:

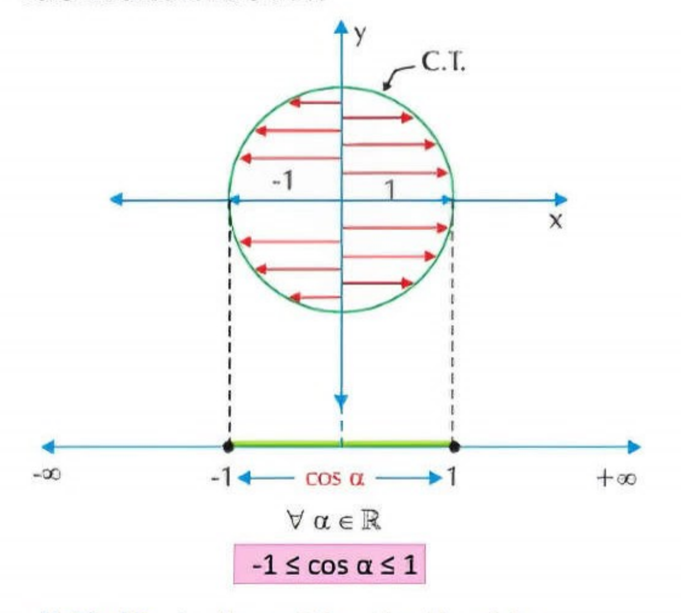
$\cos(\alpha \text{ rad}) = \cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = y \Rightarrow \cos\alpha = x$

Representación:



Análisis del coseno

Para un arco α de 0 a 2π



$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Del gráfico:

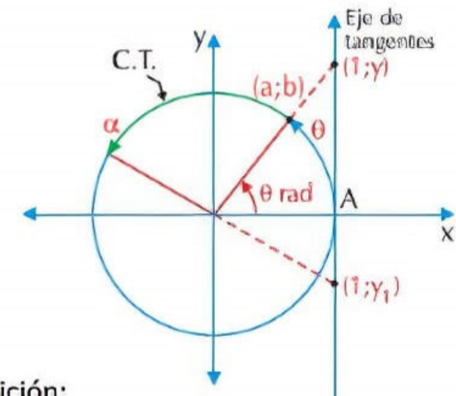
	0	90° ó $\frac{\pi}{2}$	180° ó π	270° ó $\frac{3\pi}{2}$	360° ó 2π
cos	1	0	-1	0	1

Variación:

	Variación	Comportamiento	Signo
⟨0 ; 90°⟩	1 a 0	decrece	+
⟨90° ; 180°⟩	0 a -1	decrece	-
⟨180° ; 270°⟩	-1 a 0	crece	-
⟨270° ; 360°⟩	0 a 1	crece	+

3 Tangente

Es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de arcos y la prolongación del radio.



Por definición:

* $\text{tg}\,\theta = y$
* $\text{tg}\,\alpha = y_1$

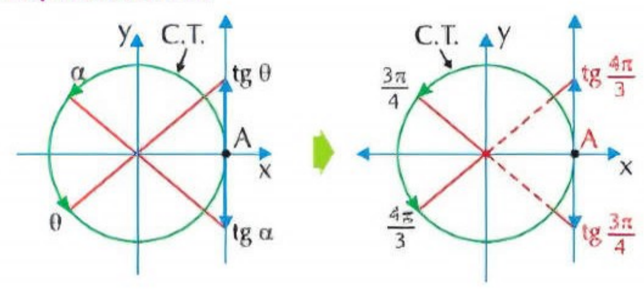
Comprobación:

$\text{tg}(\theta \text{ rad}) = \frac{b}{a} = \frac{y}{1} =$ (por semejanza)

$\Rightarrow \text{tg}(\theta \text{ rad}) = \text{tg}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{y}{1}$

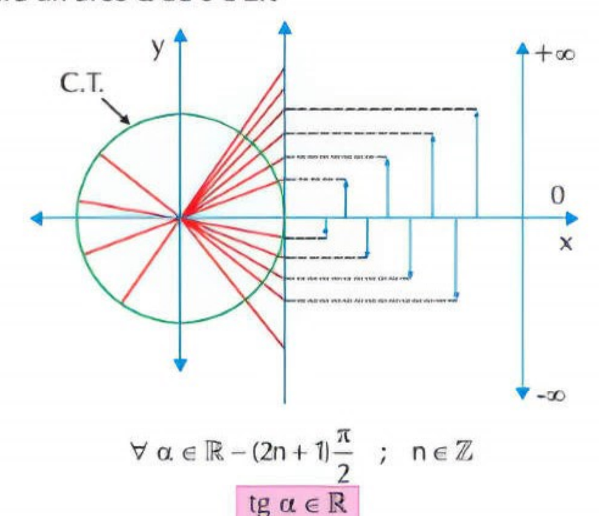
$\Rightarrow$ $\text{tg}\,\theta = y$

Representación:



Análisis de la tangente

Para un arco α de 0 a 2π



$\forall\ \alpha \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\text{tg}\ \alpha \in \mathbb{R}$

De la figura:

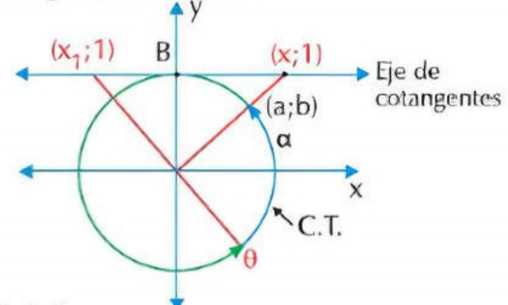
	0	90° ó $\frac{\pi}{2}$	180° ó π	270° ó $\frac{3\pi}{2}$	360° ó 2π
tg	0	no definido	0	no definido	0

Variación:

	Variación	Comportamiento	Signo
⟨0 ; 90°⟩	0 a +∞	crece	+
⟨90° ; 180°⟩	-∞ a 0	crece	-
⟨180° ; 270°⟩	0 a +∞	crece	+
⟨270° ; 360°⟩	-∞ a 0	crece	-

4 cotangente

Es la abscisa del punto de intersección entre la recta cotangente que pasa por el origen de complementos y la prolongación del radio.



Por definición:

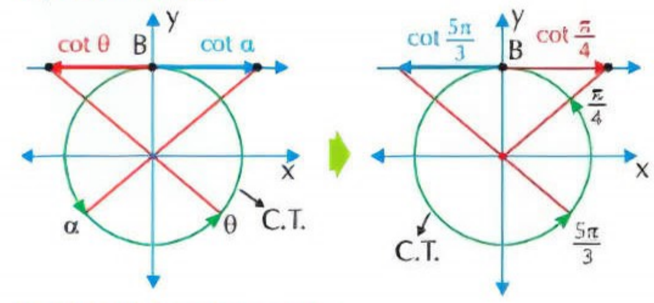
$$\cot \alpha = x$$
$$\cot \theta = x_1$$

Se comprueba:

$$\cot(\theta \text{ rad}) = \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{x}{1} \quad \text{(por semejanza)}$$

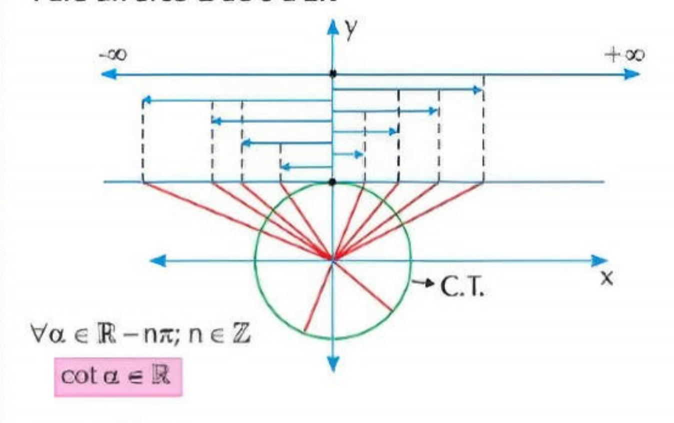
$$\Rightarrow \boxed{\cot \theta = x}$$

Representación:



Análisis de la cotangente

Para un arco α de 0 a 2π



$\forall \alpha \in \mathbb{R} - n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

$\cot \alpha \in \mathbb{R}$

Del gráfico:

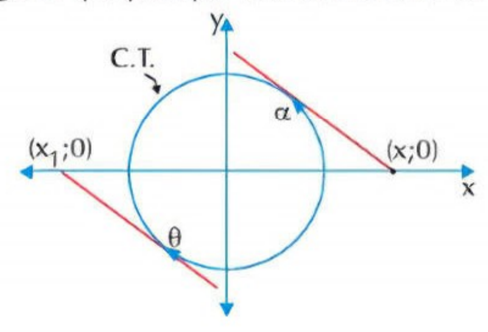
	0	90° ó $\frac{\pi}{2}$	180° ó π	270° ó $\frac{3\pi}{2}$	360° ó 2π
cot	no definido	0	no definido	0	no definido

Variación: para un arco α de 0 a 2π

	Variación	Comportamiento	Signo
⟨0 ; 90°⟩	+∞ a 0	decrece	(+)
⟨90° ; 180°⟩	0 a -∞	decrece	(-)
⟨180° ; 270°⟩	+∞ a 0	decrece	(+)
⟨270° ; 360°⟩	0 a -∞	decrece	(-)

5 Secante

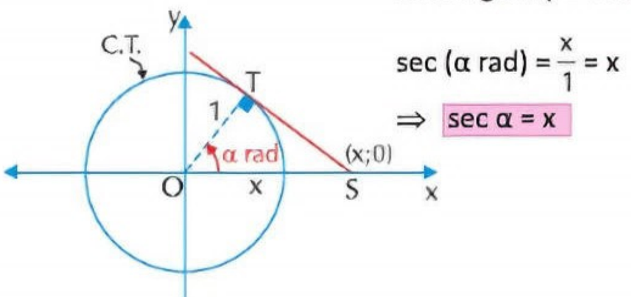
Es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje x



Por definición:

* $\sec \alpha = x$ * $\sec \theta = x_1$

Comprobación:

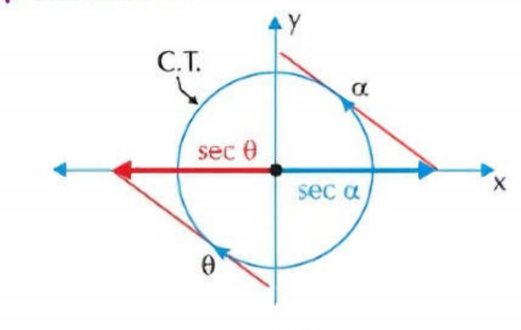


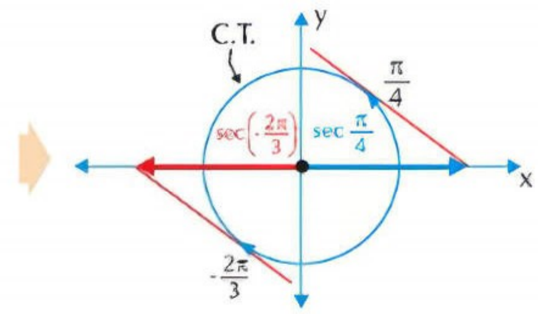
de la figura (⊾OTS)

$\sec(\alpha \text{ rad}) = \frac{x}{1} = x$

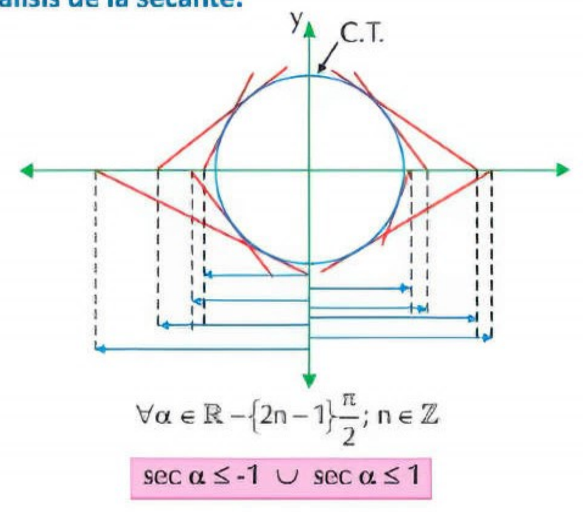
$\Rightarrow$ $\boxed{\sec \alpha = x}$

Representación:





Análisis de la secante:



$\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{2n-1\}\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\sec \alpha \leq -1 \cup \sec \alpha \leq 1}$

del gráfico:

	0	90° ó $\frac{\pi}{2}$	180° ó π	270° ó $\frac{3\pi}{2}$	360° ó 2π
sec	1	no definido	-1	no definido	1

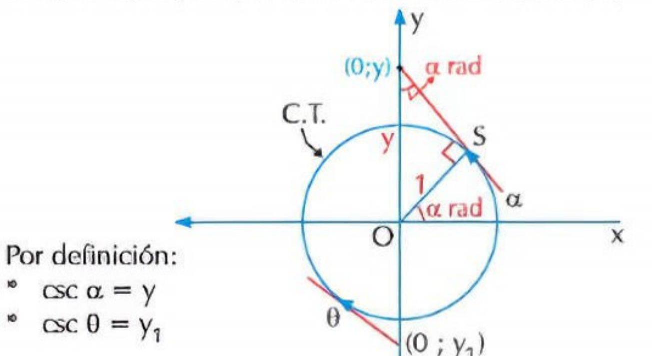
Variación:

para un arco α de 0 a 2π

	Variación	Comportamient	Signo
⟨0 ; 90°⟩	1 a +∞	crece	(+)
⟨90° ; 180°⟩	-∞ a -1	crece	(-)
⟨180° ; 270°⟩	-1 a -∞	decrece	(-)
⟨270° ; 360°⟩	+∞ a 1	decrece	(+)

6 Cosecante

Es la ordenada del punto de intersección, entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje y



Por definición:

* $\csc \alpha = y$
* $\csc \theta = y_1$

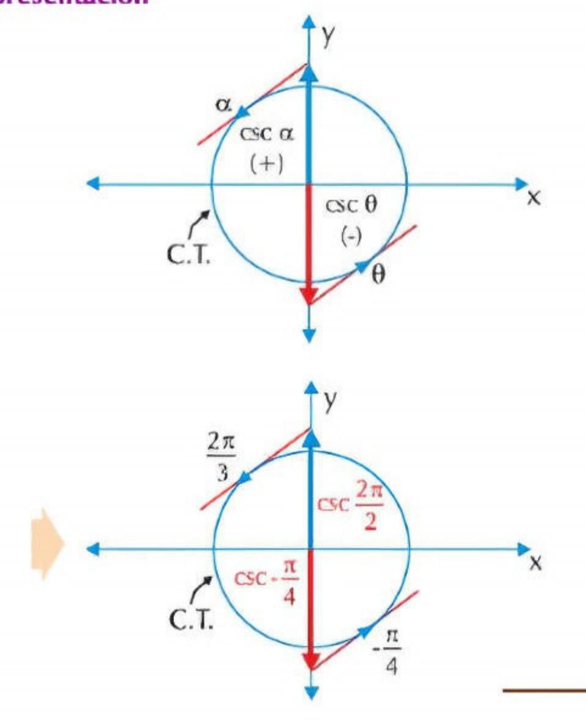
Comprobación:

del ⊾OTS:

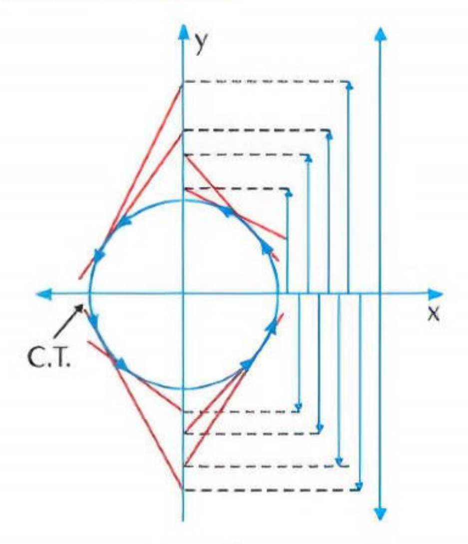
$\csc(\alpha \text{ rad}) = \frac{y}{1} \Rightarrow \csc(\alpha \text{ rad}) = \csc\alpha = y$

$\Rightarrow$ $\boxed{\csc \alpha = y}$

Representación



Análisis de la cosecante



$\forall \alpha \in \mathbb{R} - n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

$\csc \alpha \leq -1 \ \cup\ \csc \alpha \leq 1$

Del gráfico:

	0	90° ó $\frac{\pi}{2}$	180° ó π	270° ó $\frac{3\pi}{2}$	360° ó 2π
csc	no definido	1	no definido	-1	no definido

Variación: para un arco α de 0 a 2π

	Variación	Comportamiento	Signo
$\langle 0\ ;\ 90° \rangle$	$+\infty$ a 1	decrece	(+)
$\langle 90°\ ;\ 180° \rangle$	1 a $+\infty$	crece	(+)
$\langle 180°\ ;\ 270° \rangle$	$-\infty$ a -1	crece	(-)
$\langle 270°\ ;\ 360° \rangle$	-1 a $-\infty$	decrece	(-)

Representaciones trigonométricas auxiliares

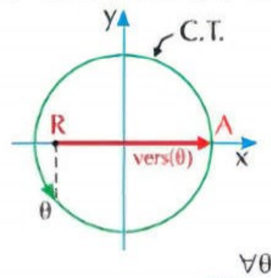
a) senoverso o verso de un arco:

El seno verso o verso de un arco θ denotado por vers(θ), se define

$$\text{vers}\theta = 1 - \cos\theta \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Representación

Graficamente es el segmento dirigido en el eje x que parte del punto cuya coordenada es el coseno de dicho arco hacia el origen de arcos.



de la figura se cumple
$\text{vers}\theta = RA$
pero: $RA = A - R$

$\Rightarrow \ \text{vers}\theta = 1 - \cos\theta$

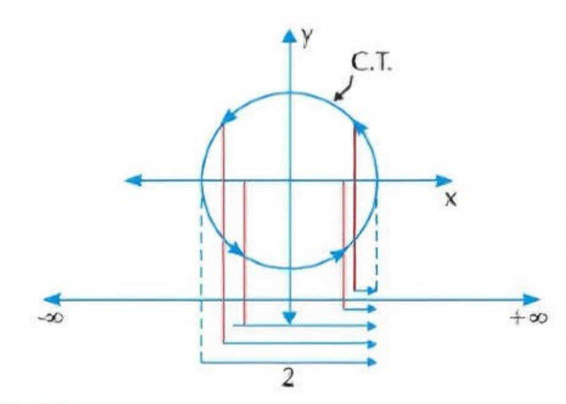
Además:

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

$0 \leq \text{vers}\theta \leq 2$

Análisis del verso:

Para un arco θ de 0 a 2π



Variación:

	Variación	Comportamiento	Signo
$\langle 0\ ;\ 90° \rangle$	0 a 1	crece	(+)
$\langle 90°\ ;\ 180° \rangle$	1 a 2	crece	(+)
$\langle 180°\ ;\ 270° \rangle$	2 a 1	decrece	(+)
$\langle 270°\ ;\ 360° \rangle$	1 a 0	decrece	(+)

b) Cosenoverso o coverso de un arco:

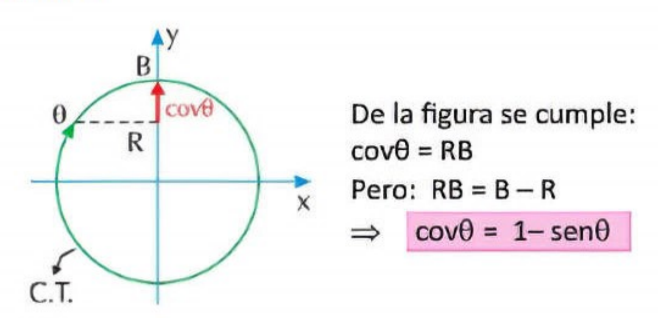
El cosenoverso o coverso de un arco θ denotado por covθ, se define:

$$\text{cov}\theta = 1 - \text{sen}\theta \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Representación:

Gráficamente es el segmento dirigido en el eje y que parte del punto cuya coordenada es el seno de dicho arco hacia el origen de complementos.

Ejemplo:



De la figura se cumple:
$\text{cov}\theta = RB$
Pero: $RB = B - R$
$\Rightarrow \ \text{cov}\theta = 1 - \text{sen}\theta$

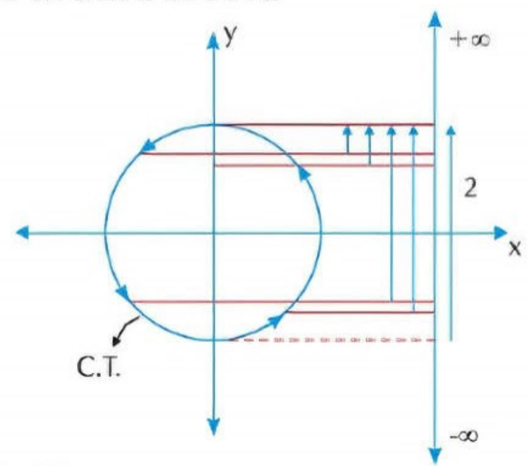
Además:

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

$0 \leq \text{cov}\theta \leq 2$

Análisis del coseno:

Para un arco θ de 0 a 2π



Variación:

	Variación	Comportamiento	Signo
$\langle 0 ; 90° \rangle$	1 a 0	decrece	(+)
$\langle 90° ; 180° \rangle$	0 a 1	crece	(+)
$\langle 180° ; 270° \rangle$	1 a 2	crece	(+)
$\langle 270° ; 360° \rangle$	2 a 1	decrece	(+)

c) Exsecante o secante external de un arco

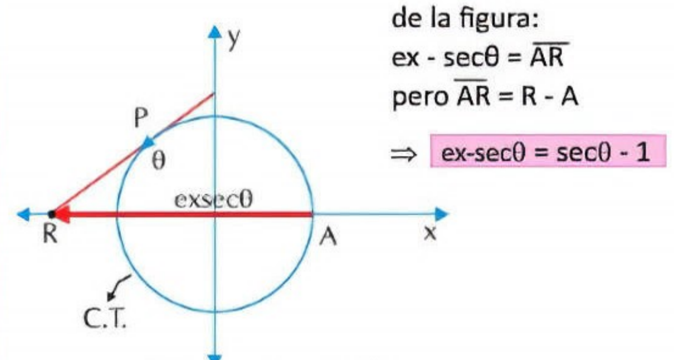
La exsecante o secante external de un arco θ denotado por ex - sec θ se define

$$\text{ex - sec}\theta = \sec\theta - 1 \quad \forall\theta \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Representación:

Graficamente es el segmento dirigido en el eje x que parte del origen de arcos hacia el punto cuya coordenada es la secante de dicho arco.

Ejemplo:



de la figura:

ex - secθ = $\overline{AR}$

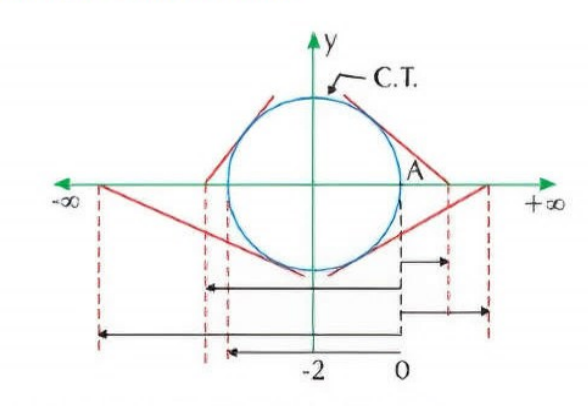
pero $\overline{AR}$ = R - A

$\Rightarrow$ ex-secθ = secθ - 1

Además : $\forall\theta \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$

ex - sec$\theta \leq -2$ $\cup$ ex-sec$\theta \leq 0$

Análisis de la exsecante

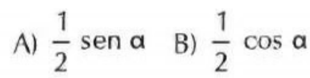


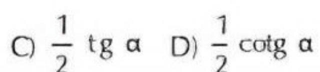
variación: Para un arco θ de 0 a 2π

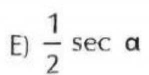
	Variación	Comportamiento	Signo
$\langle 0 ; 90° \rangle$	0 a +∞	crece	+
$\langle 90° ; 180° \rangle$	-∞ a -2	crece	–
$\langle 180° ; 270° \rangle$	-2 a -∞	decrece	–
$\langle 270° ; 360° \rangle$	+∞ a 0	decrece	+

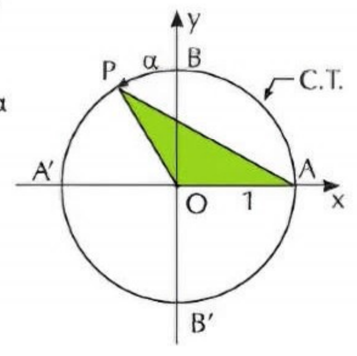
Problemas resueltos

1 Del gráfico, halla el área de la región triángular AOP.


A) $\frac{1}{2}$ sen α B) $\frac{1}{2}$ cos α

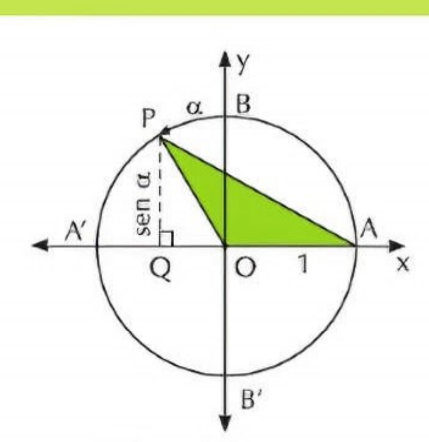

C) $\frac{1}{2}$ tg α D) $\frac{1}{2}$ cotg α


E) $\frac{1}{2}$ sec α



Resolución:

- Analizamos el gráfico:



- Trazamos $\overline{PQ} \perp \overline{A'A}$, la cual representa el seno, entonces:

$$PQ = \text{sen}\,\alpha$$

- Además $\overline{OA}$ representa el radio de la C.T., entonces:

$$OA = 1$$

- Finalmente: $S_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}(OA)(PQ)$

$$S_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}(1)(\text{sen}\alpha)$$

$$\therefore \quad S_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}\,\text{sen}\alpha$$ **Rpta. A**

2 Indicar con (V) si la proposición es verdadera y con (F) si es falsa:

I. sen 10° > sen 80°

II. cos 10° > cos 80°

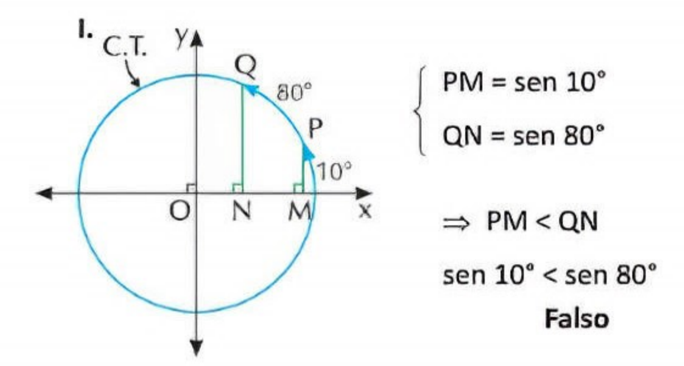
III. tg 10° > tg 80°

A) VVV B) VFV C) FVF D) FFV E) FVV

Resolución:

- Realizando la gráfica en la C.T. tenemos:

I.



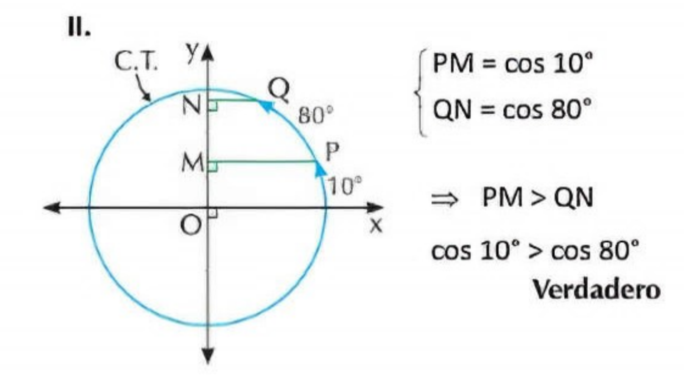
$\begin{cases} PM = \text{sen } 10° \\ QN = \text{sen } 80° \end{cases}$

$\Rightarrow PM < QN$

sen 10° < sen 80°

Falso

II.



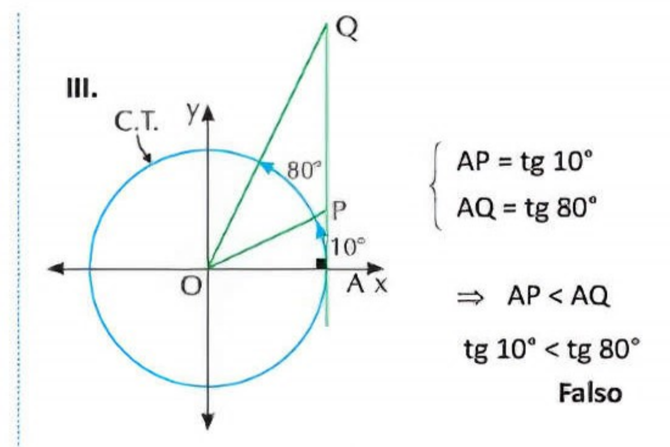
$\begin{cases} PM = \cos 10° \\ QN = \cos 80° \end{cases}$

$\Rightarrow PM > QN$

cos 10° > cos 80°

Verdadero

III.



$\begin{cases} AP = \text{tg } 10° \\ AQ = \text{tg } 80° \end{cases}$

$\Rightarrow AP < AQ$

tg 10° < tg 80°

Falso

- Entonces: FVF **Rpta. C**

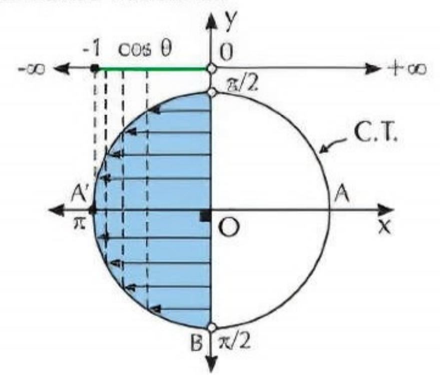
3 Si $\cos\theta = \frac{3a-4}{5}$; $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, hallar el intervalo de a.

A) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right\rangle$ B) $\left[-\frac{1}{2}; 2\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{1}{4}; 4\right\rangle$

D) $\left\langle -1; \frac{1}{3}\right]$ E) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Resolución:

- Graficando tenemos:



- Del gráfico:

$$-1 \le \cos\theta < 0$$

$$-1 \le \frac{3a-4}{5} < 0$$

$$-5 \le 3a - 4 < 0$$

$$-1 \le 3a < 4$$

$$-\frac{1}{3} \le a < \frac{4}{3}$$

$$a \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right\rangle$$

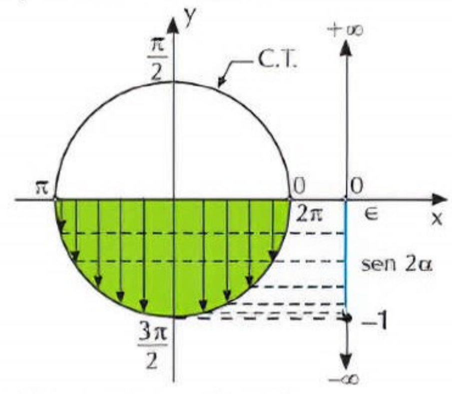
4 Determinar la variación de:

$$E = 5\ \text{sen}2\alpha + 2\ ;\ \alpha \in \left\langle \frac{\pi}{2};\pi \right\rangle$$

A) $[-3\ ;\ 7]$ B) $[-3\ ;\ 3\rangle$ C) $\langle -3\ ;\ 2\rangle$
D) $[-3\ ;\ 2\rangle$ E) $\langle -1\ ;\ 2\rangle$

Resolución:

- Del dato: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- Grafiquemos: $\pi < 2\alpha < 2\pi$



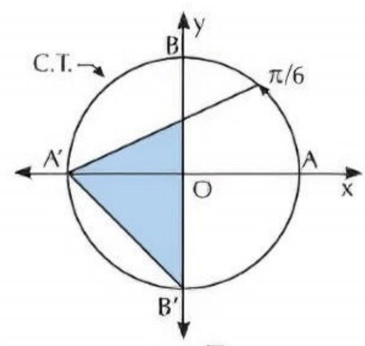
- Del gráfico: $-1 \leq \text{sen}\,2\alpha < 0$
- Multiplicando todo (x 5): $-5 \leq 5\ \text{sen}\ 2\alpha < 0$
- Sumando (+2) a cada miembro:

$$-3 \leq \underbrace{5\ \text{sen}\,2\alpha + 2}_{E} < 2$$

$$-3 \leq \quad E \quad < 2$$

$$E \in [-3;2\rangle$$ **Rpta. D**

5 Calcula el área de la región coloreada.

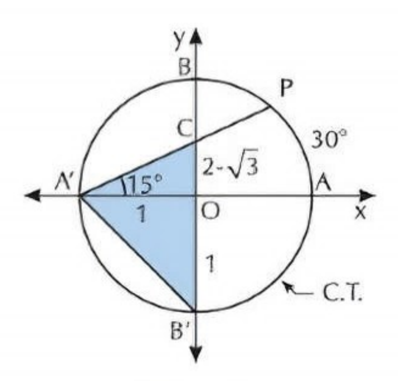


A) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}u^2$ B) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}u^2$ C) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}u^2$

D) $\frac{5-\sqrt{3}}{2}u^2$ E) $\frac{6-\sqrt{3}}{2}u^2$

Resolución:

- Analizando la figura:



$$\Rightarrow \quad m\measuredangle AA'P = \frac{m\,\widehat{AP}}{2} = \frac{30°}{2} = 15°\ \text{(ángulo inscrito)}$$

$$\Rightarrow \quad \triangle A'OC = \underbrace{tg\ 15°}_{} = \frac{OC}{1}$$

$$2-\sqrt{3} = OC$$

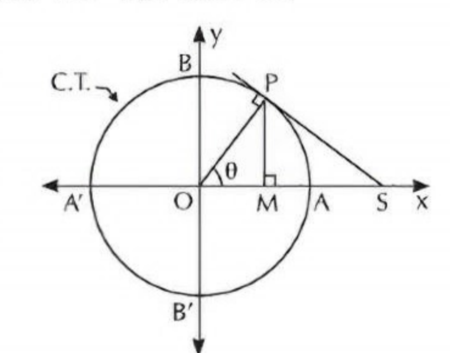
$$\Rightarrow \quad S_{\Delta CA'B'} = \frac{(B'C)(OA')}{2} \qquad \begin{cases} B'C = 3-\sqrt{3} \\ OA' = 1 \end{cases}$$

$$S_{\Delta CA'B'} = \frac{(3-\sqrt{3})(1)}{2}$$

$$S_{\Delta CA'B'} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}u^2$$ **Rpta. B**

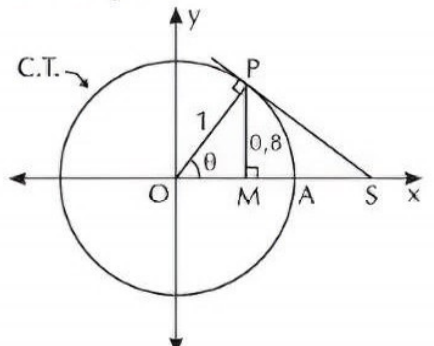
6 En la figura, PM = 0,8. Halla OS.

A) 3/2
B) 4/3
C) 5/4
D) 5/3
E) 5/2



Resolución:

- Analizando la figura:



- PM representa el Senθ, veamos:

$\triangle$ OMP: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{PM}{OP}$; $\begin{cases} OP = 1 \\ PM = 0,8 \end{cases}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{0,8}{1}$ $\quad$ $\text{sen}\theta = \dfrac{4}{5}$

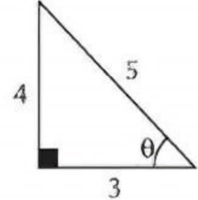
- OS representa la Sec θ, veamos:

$\triangle$ OPS:

$\sec\theta = \dfrac{OS}{OP}$; $OP = 1$

$\sec\theta = \dfrac{OS}{1} \Rightarrow OS = \sec\theta$

$\therefore$ $OS = \dfrac{5}{3}$ **Rpta. D**

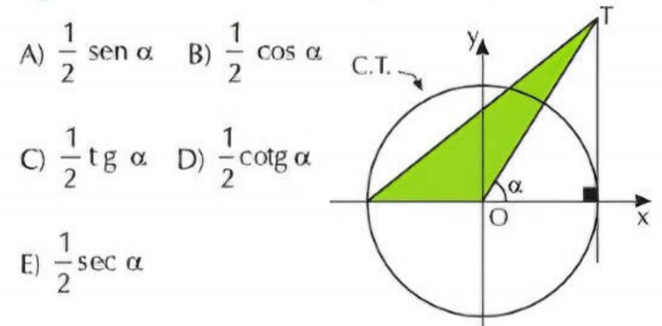


7 Calcula el área de la región sombreada.

A) $\dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha$ $\quad$ B) $\dfrac{1}{2}\cos\alpha$

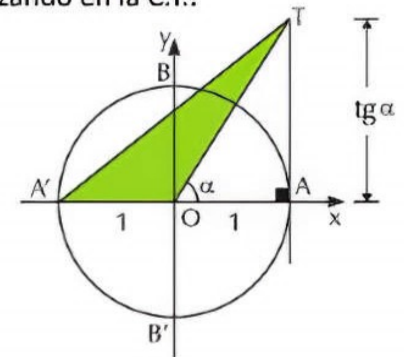
C) $\dfrac{1}{2}\,\text{tg}\,\alpha$ $\quad$ D) $\dfrac{1}{2}\text{cotg}\,\alpha$

E) $\dfrac{1}{2}\sec\alpha$



Resolución:

- Analizando en la C.T.:



- Veamos: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AT}{OA}$; $OA = 1$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AT}{1} \Rightarrow AT = \text{tg}\,\alpha$

- Luego: $S_{\Delta A'OT} = \dfrac{(A'O)(AT)}{2}$; $\begin{cases} A'O = 1 \\ AT = \text{tg}\,\alpha \end{cases}$

$S_{\Delta A'OT} = \dfrac{(1)(\text{tg}\,\alpha)}{2}$

$S_{\Delta A'OT} = \dfrac{1}{2}\,\text{tg}\,\alpha$ **Rpta. C**

8 Si $\theta \in \left\langle -\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right\rangle$, halla el intervalo de la expresión:

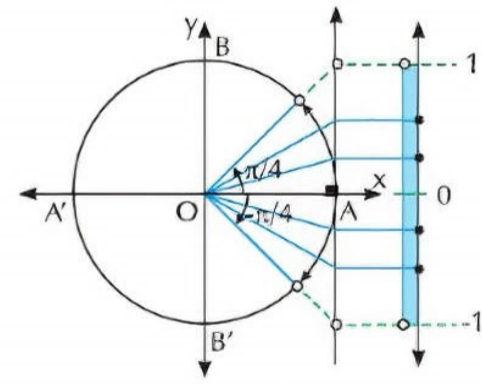
$$A = 4\,\text{tg}^2\theta - 1$$

A) $[-3\,;1\rangle$ $\quad$ B) $[-2\,;4\rangle$ $\quad$ C) $[-1\,;3\rangle$

D) $\langle -3\,;1]$ $\quad$ E) $\langle -1\,;3]$

Resolución:

- Graficando de acuerdo a la condición en la C.T.



- Tenemos: $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$
- Luego: $-1 < \text{tg}\,\theta < 1$
- Al cuadrado: $0 \le \text{tg}^2\theta < 1$
- Mult. (x 4): $0 \le 4\,\text{tg}^2\theta < 4$
- Resta (-1): $-1 \le \underbrace{4\,\text{tg}^2\theta - 1}_{} < 3$

$-1 \le A < 3$

$A \in [-1;3\rangle$ **Rpta. C**

9 De la figura, halla $E = \dfrac{bc + df}{ae}$

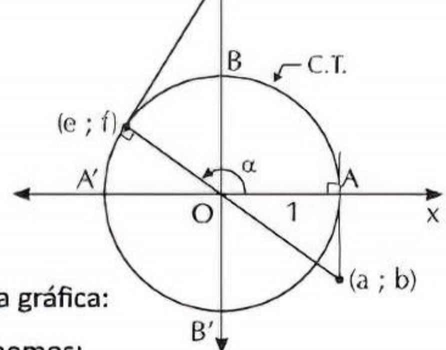
A) 0

B) 1

C) cotg α

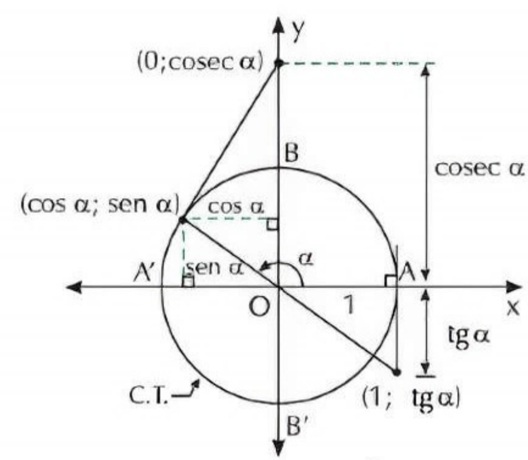
D) sec α

E) cosec α



Resolución:

- Analizando la gráfica:
- Entonces tenemos:



$$(a\ ;\ b) = (1\ ;\ \text{tg}\ \alpha) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \text{tg}\ \alpha \end{cases}$$

$$(c;\ d) = (0;\ \text{cosec}\ \alpha) \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = \text{cosec}\ \alpha \end{cases}$$

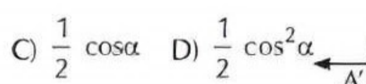
$$(e\ ;\ f) = (\cos\alpha;\ \text{sen}\ \alpha) \Rightarrow \begin{cases} e = \cos\alpha \\ f = \text{sen}\ \alpha \end{cases}$$

- **Reemplazando:** $E = \dfrac{(\text{tg}\ \alpha)(0) + (\text{cosec}\ \alpha)(\text{sen}\ \alpha)}{(1)(\cos\alpha)}$

$$E = \frac{0+1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

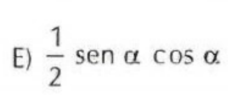
$\therefore$ $E = \sec\alpha$ **Rpta. D**

10 Halla el área de la región sombreada.

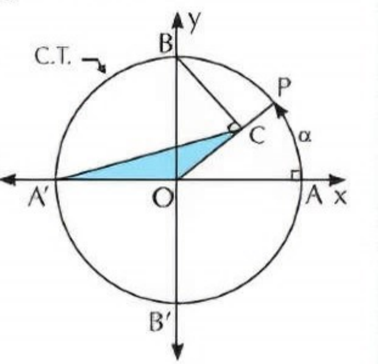


A) $\dfrac{1}{2}$ senα B) $\dfrac{1}{2}$ sen^{2}α

C) $\dfrac{1}{2}$ cosα D) $\dfrac{1}{2}$ cos^{2}α

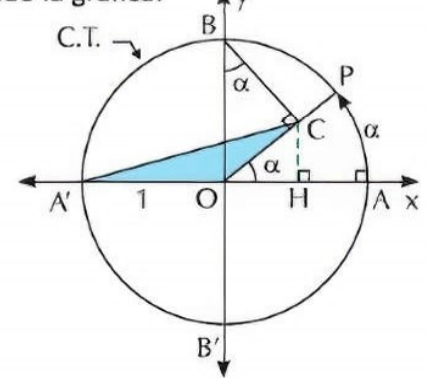


E) $\dfrac{1}{2}$ sen α cos α



Resolución:

- Analizando la gráfica:



- **En el ◺ OCB:** $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{OC}{OB}$; $OB = 1$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{OC}{1} \Rightarrow OC = \text{sen}\ \alpha$$

- **En el ◺ OHC:** $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{CH}{OC}$; $OC = \text{sen}\ \alpha$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{CH}{\text{sen}\ \alpha} \Rightarrow CH = \text{sen}^2\alpha$$

- En el Δ A'OC: $S_{\Delta A'OC} = \dfrac{(A'O)(CH)}{2}$

$$S_{\Delta A'OC} = \frac{1\left(\text{sen}^2\alpha\right)}{2}$$

$\therefore$ $S_{\Delta A'OC} = \dfrac{1}{2}\ \text{sen}^2\alpha$ **Rpta. B**

11 Halla el intervalo de la siguiente expresión:

$$F = 2\ \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right);\ \text{Si}\ \alpha \in \text{IIIC}$$

A) $\left\langle -2\ ;\ \sqrt{2} \right\rangle$ B) $\left\langle -\sqrt{2}\ ;\ 2 \right\rangle$ C) $\left\langle \sqrt{2}\ ;\ 2 \right\rangle$

D) $\left\langle \sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2} \right\rangle$ E) $\left\langle 1;\ \sqrt{2} \right\rangle$

Resolución:

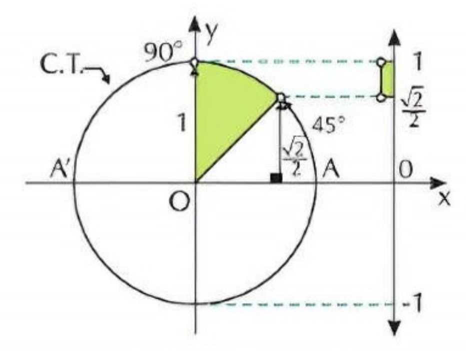
- A partir de la condición, tenemos:

$$\alpha \in \text{IIIC} \Rightarrow 180° < \alpha < 270°$$

Dividiendo $(\div 2)$ $\Rightarrow$ $90° < \dfrac{\alpha}{2} < 135°$

Restando $(45°)$ $\Rightarrow$ $45° < \dfrac{\alpha}{2} - 45° < 90°$

- Graficando en la C.T. el seno:

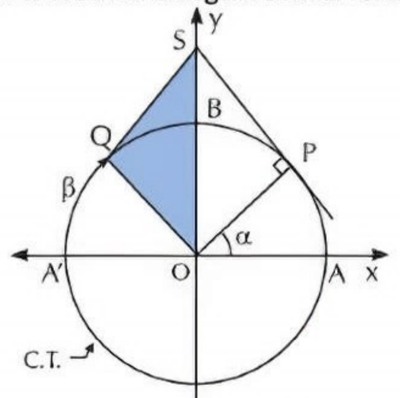


- **Entonces:** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2} - 45°\right) < 1$

- **Mult. (x2):** $\underbrace{\sqrt{2} < 2\ \text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2} - 45°\right) < 2}_{F\ \sqrt{2} < F < 2}$

$\therefore$ $F \in \langle\sqrt{2};2\rangle$ **Rpta. C**

12 Halla el área de la región sombreada:



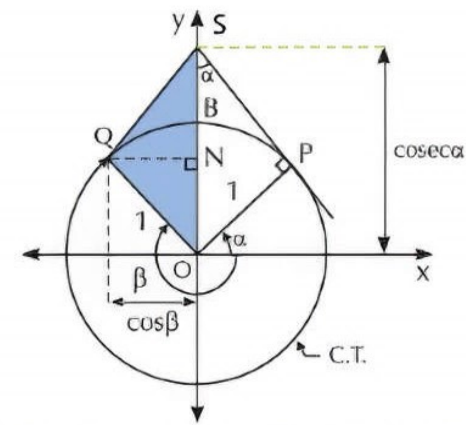
A) $-\frac{1}{2}$ cosec α · cos β B) $-\frac{1}{2}$ sec α · sen β

C) $-\frac{1}{2}$ cosec α · sen β D) $\frac{1}{2}$ cosec α · cos β

E) $\frac{1}{2}$ sec α · sen β

Resolución:

- Analizando la gráfica:



- En la C.T. se observa que la línea OS representa la cosec α, mientras que la línea QN representa el cos β; entonces:

$$OS = |\underbrace{\text{cosec } \alpha}_{+}| = \text{cosec } \alpha$$

$$ON = |\underbrace{\cos \beta}_{-}| = -\cos \beta$$

- Luego: $S_{\Delta OSQ} = \dfrac{(OS)(ON)}{2}$

$$S_{\Delta OSQ} = \frac{(\text{cosec } \alpha)(-\cos \beta)}{2}$$

$\therefore$ $S_{\Delta OSQ} = -\frac{1}{2} \text{cosec}\,\alpha \cdot \cos\beta$ **Rpta. A**

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Este capítulo por ser amplio e importante, servirá como base para capítulos posteriores, está considerado como clave dentro de esta asignatura, por supuesto que tendremos que demostrar las razones por las cuales se les considera como tal.

Definición

Las identidades trigonométricas son relaciones de igualdad entre funciones trigonométricas que se verifican para todo valor de la variable angular, siempre y cuando, la función trigonométrica esté definida en dicho valor angular.

$$\text{tg } \alpha + \text{cotg } \alpha = \sec \alpha \cdot \text{cosec } \alpha$$

Es una identidad trigonométrica cuya variable angular es "α".

- Comprobamos para algunos valores de "α":

i) Si $\alpha = 45°$ $\text{tg } 45° + \text{cotg } 45° = \sec 45° \cdot \text{cosec } 45°$

$$1 + 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$2 = 2$ *(Se verifica)*

ii) Si $\boxed{\alpha = 60^\circ}$

$$\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{cotg} 60^\circ = \sec 60^\circ \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$$

$$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

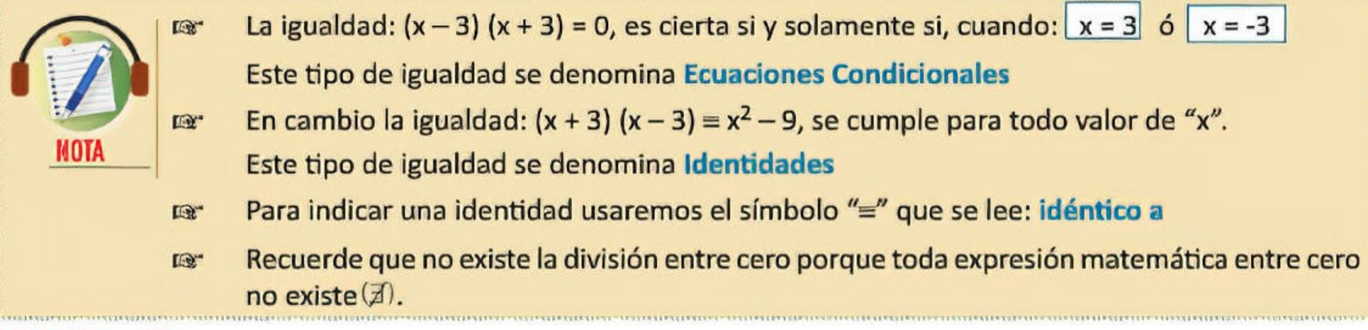
$$\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}}$$ *(Se verifica)*

iii) Si $\boxed{\alpha = 90^\circ}$

$$\operatorname{tg} 90^\circ + \operatorname{cotg} 90^\circ = \sec 90^\circ \cdot \operatorname{cosec} 90^\circ$$

$$\boxed{\nexists + 0 = \nexists \cdot 1}$$ *(No se verifica)*

- Luego, concluiremos que la identidad dada se verifica si y sólo si $\alpha \neq 90^\circ n;\ n \in \mathbb{Z}$.



NOTA

- La igualdad: $(x-3)(x+3) = 0$, es cierta si y solamente si, cuando: $\boxed{x = 3}$ ó $\boxed{x = -3}$
  Este tipo de igualdad se denomina **Ecuaciones Condicionales**
- En cambio la igualdad: $(x+3)(x-3) \equiv x^2 - 9$, se cumple para todo valor de "x".
  Este tipo de igualdad se denomina **Identidades**
- Para indicar una identidad usaremos el símbolo "≡" que se lee: **idéntico a**
- Recuerde que no existe la división entre cero porque toda expresión matemática entre cero no existe ($\nexists$).

Clasificación

Para clasificar tomaremos como base su definición, es decir, las particularidades que se presentan en las igualdades.

A continuación desarrollaremos un cuadro.

IDENTIDADES

- **I. Fundamentales**
  - a) Recíprocas.
  - b) Por división.
  - c) Pitagóricas.
- **II. Ángulos compuestos**
  - a) Suma de arcos.
  - b) Diferencia de arcos.
- **III. Ángulos múltiples**
  - a) Arco mitad.
  - b) Arco doble.
  - c) Arco triple.
- **IV. Factorización trigonométrica**
  - a) Transformación de suma y diferencia a producto.
  - b) Transformación de productos a suma o diferencia.
- **V. Ecuaciones**
  - a) Aplicación de identidades antes mencionadas.
  - b) Soluciones principales y generales.

Identidades fundamentales

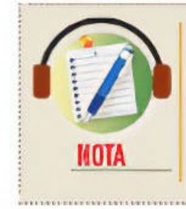
Para obtener dichas identidades, hacemos uso de la circunferencia trigonométrica:

Identidades recíprocas

- En el ⊿OMP:



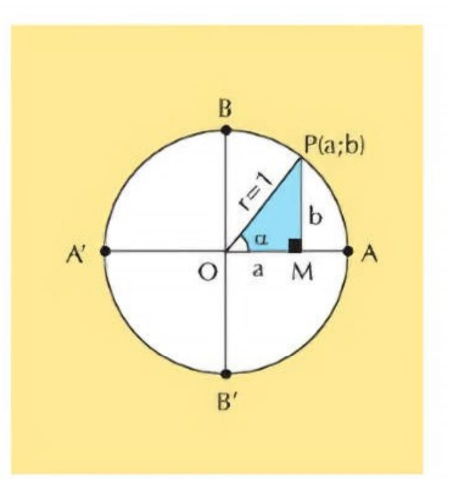
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{1}\ ; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{b}$$



× **M.A.M.** Significa multiplicar miembro a miembro.

× M.A.M: $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \frac{b}{1}\cdot\frac{1}{b} \rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1}$ ... **1**

Donde: **I)** $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}}$; **II)** $\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}$



- En el mismo ⊿OMP: $\cos\alpha = \frac{a}{1}$; $\sec\alpha = \frac{1}{a}$

× M.A.M: $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = \frac{a}{1}\cdot\frac{1}{a} \rightarrow \therefore \boxed{\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1}$ ... **2**

Donde: I) $\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}}$; II) $\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$

- En el mismo ⊿OMP: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{a}{b}$

× M.A.M.: $\operatorname{tg}\alpha \ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b} \rightarrow \therefore \boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1}$ ... **III**

Donde: I) $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}}$; II) $\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Tg}\alpha}}$

Identidades por división

- En el ⊿OMP:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{1}$; $\cos\alpha = \frac{a}{1} \rightarrow$: M.A.M.: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)$

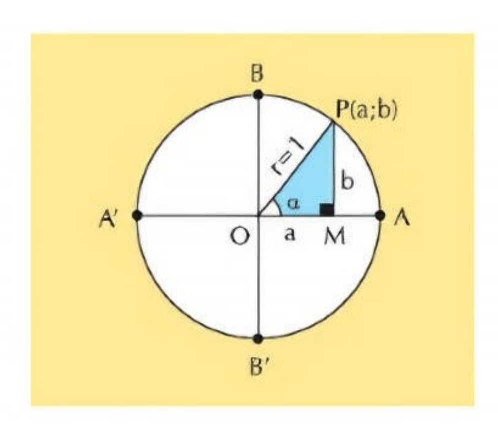
$\rightarrow \boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha}$ ... **IV**



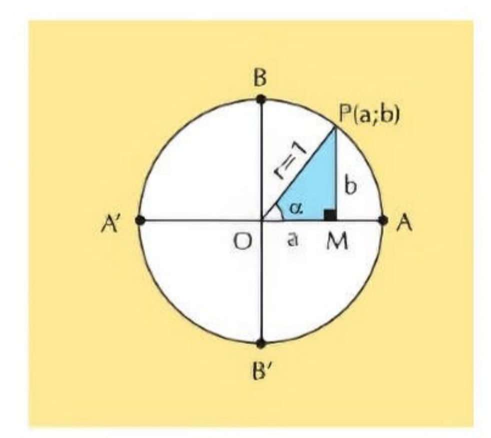
: **M.A.M.** significa dividir miembro a miembro:

Ahora, tomamos la inversa a cada miembro de esta última expresión **(IV)**, obteniendo:

$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \rightarrow \boxed{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha}$ ... **V**



Identidades pitagóricas



- En el $\triangle$OMP: por el teorema de Pitágoras:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto }1)^2 + (\text{cateto }2)^2$$

$$1^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \boxed{1 = a^2 + b^2} \ \dots (w)$$

- Por razones trigonométricas en el $\triangle$OMP, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{b}{1} \rightarrow \boxed{\text{sen } \alpha = b} \\ \cos \alpha = \dfrac{a}{1} \rightarrow \boxed{\cos \alpha = a} \end{array}\right\} (\phi)$$

- Reemplazamos los valores de **(ϕ)** en (w):

$$1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha \rightarrow \therefore \boxed{1 \equiv \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} \ \dots \text{VI}$$

Dividimos entre "$\cos^2\alpha$" a ambos miembros de la expresión **(VI)**:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \rightarrow \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1$$

$$(\sec\alpha)^2 = (\text{tg}\,\alpha)^2 + 1 \rightarrow \boxed{\sec^2\alpha = \text{tg}^2\alpha + 1} \ \dots \text{VII}$$

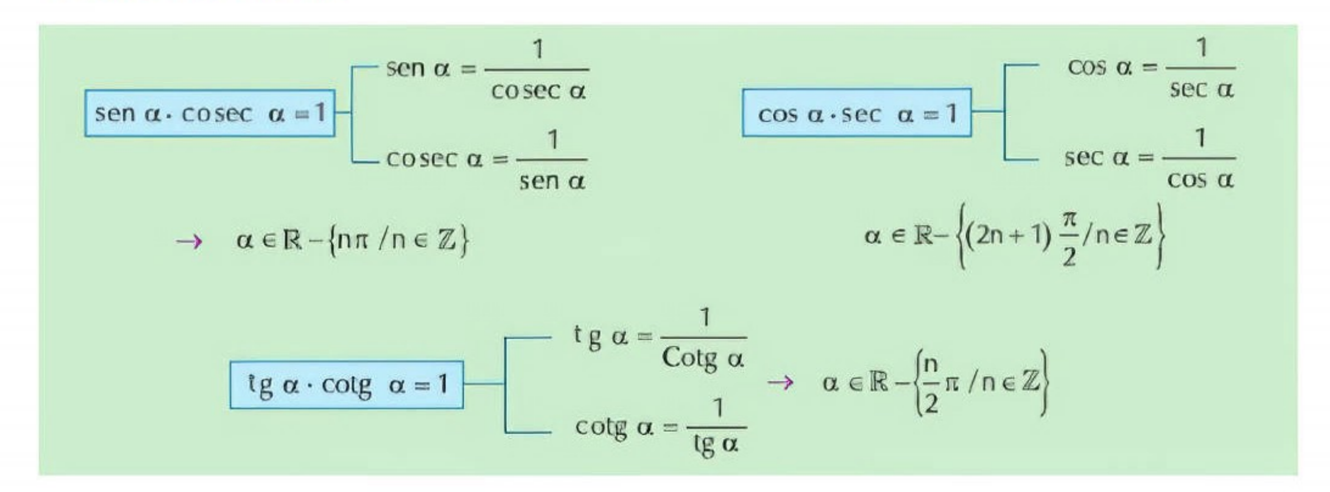
De igual manera, dividimos a ambos miembros de la expresión **(VI)** entre "$\text{sen}^2\alpha$":

$$\frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} \rightarrow \left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)^2$$

$$(\text{cosec}\,\alpha)^2 = 1 + (\text{cotg}\,\alpha)^2 \rightarrow \boxed{\text{cosec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha} \ \dots \text{VIII}$$

Cuadro de resumen de las identidades fundamentales

Identidades recíprocas



$$\boxed{\text{sen } \alpha \cdot \text{cosec } \alpha = 1} \begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{1}{\text{cosec } \alpha} \\ \text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \end{cases}$$

$$\rightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\boxed{\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1} \begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{1}{\sec \alpha} \\ \sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} \,/\, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\boxed{\text{tg } \alpha \cdot \text{cotg } \alpha = 1} \begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{1}{\text{Cotg } \alpha} \\ \text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha} \end{cases} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \left\{\frac{n}{2}\pi \,/\, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Identidades por división

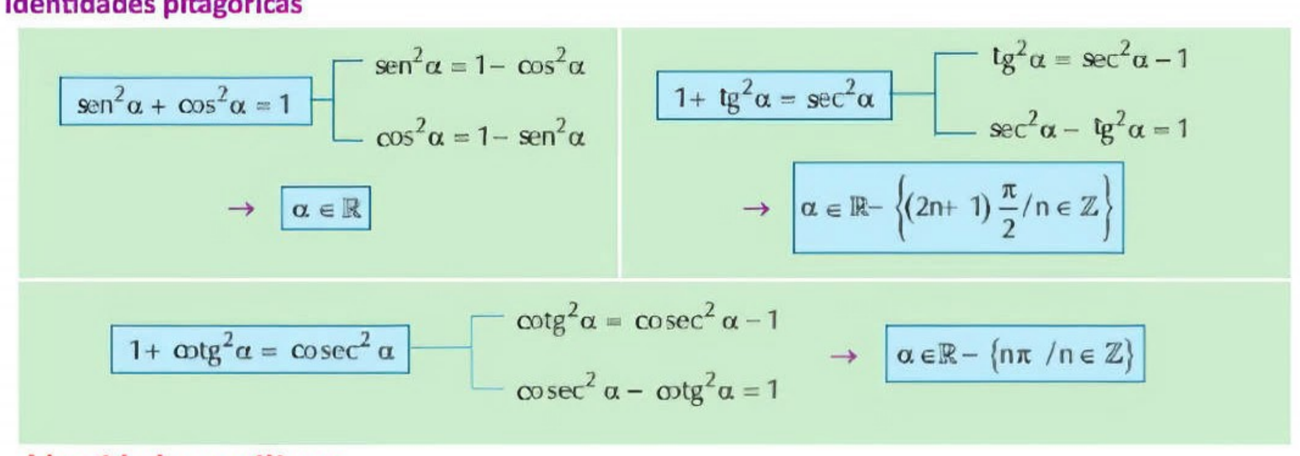
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\rightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\rightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$$

Identidades pitagóricas



Identidades auxiliares

I) $\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

II) $\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

III) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$

IV) $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$

V) $(1 \pm \operatorname{sen}\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 2(1 \pm \operatorname{sen}\alpha)(1 \pm \cos\alpha)$

Al resolver ejercicios y problemas sobre identidades trigonométricas es recomendable tener en cuenta lo siguiente:

a) Si la expresión a ser resuelta presenta funciones trigonométricas que se relacionan directamente, entonces es recomendable trabajar con dichas relaciones.

b) Si la expresión a ser resuelta presenta funciones trigonométricas que no se relacionan directamente, entonces se sugiere escribir los términos de la expresión en función del seno y coseno.

- Los ejercicios y problemas sobre identidades trigonométricas se presentan de 4 tipos:

1. Demostraciones. **2.** Simplificaciones. **3.** Condicionales. **4.** Eliminación angular.

Tipos de ejercicios

A continuación estudiaremos cada uno de ellos.

Ejercicio tipo demostración

Demostrar una identidad, implica que el primer miembro se pueda reducir al segundo miembro o viceversa, o que cada miembro por separado se pueda reducir a una misma forma.

La verificación de identidades se efectúa usando las diferentes transformaciones tanto algebraicas o trigonométricas.

No existe una regla única que sirva como norma para verificar identidades. Por lo general de los dos miembros se procura reducir del más complicado al más simple; en efecto, el estudiante debe tener presente la expresión a la que pretende llegar; pensar en todas las relaciones fundamentales (identidades) y seleccionar aquellas que le permitan obtener la expresión deseada.

Ejemplo 1 Demuestre:

$$\text{sen}^2x \cdot \text{cotg}^2x = 1 - \text{sen}^2x$$

Demostración:

- Expresaremos el primer miembro de la identidad en función de seno y coseno, entonces:

$$\text{sen}^2 x \cdot \underbrace{\text{cotg}^2 x} = 1 - \text{sen}^2 x$$

$$\text{sen}^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = 1 - \text{sen}^2 x$$

- Simplificando tenemos: $\underbrace{\cos^2 x} = 1 - \text{sen}^2 x$

L.q.q.d $1 - \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

Ejemplo 2 Demuestre:

$$\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta \cdot \cos\,\theta = \text{sen}\,\theta$$

Demostración:

- Expresando el primer miembro de la identidad en función de seno y coseno, tenemos:

$$\underbrace{\text{cosec}\,\theta} - \underbrace{\text{cotg}\,\theta} \cdot \cos\theta = \text{sen}\theta$$

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \cdot \cos\theta = \text{sen}\theta$$

$$\frac{1}{\text{sen}\,\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta} = \text{sen}\,\theta$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta} = \text{sen}\,\theta$$

- Pero: $1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta$; luego: $\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta} = \text{sen}\,\theta$

L.q.q.d $\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta$

Ejemplo 3 Demuestre:

$$\frac{\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)$$

Demostración:

- Recordemos que: $a^{2n} - b^{2n} = \left(a^n + b^n\right)\left(a^n - b\right)$ **Diferencia de cuadrados**

- Trabajando en el primer miembro de la identidad tenemos:

$$\frac{\left(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right)}{1 + \text{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)$$

- Sabemos que: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

$$\frac{\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha} = \cos^2\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)$$

- Pero: $\begin{cases} \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$

$$\frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)} = \cos^2\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)$$

$\cos^2\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right) = \cos^2\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)$ **L.q.q.d**

Ejemplo 4 Demuestre:

$$\sqrt{\frac{1+\text{sen}\,\theta}{1-\text{sen}\theta}} = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$$

Demostración:

- Trabajando dentro del radical de tal modo que se generen cuadrados perfectos, realizamos el siguiente artificio:

$$\sqrt{\left[\frac{1+\text{sen}\,\theta}{1-\text{sen}\,\theta}\right]\left[\frac{1+\text{sen}\,\theta}{1+\text{sen}\,\theta}\right]} = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$$

$$\sqrt{\frac{(1+\text{sen}\,\theta)^2}{1-\text{sen}^2\theta}} = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$$

$$\sqrt{\frac{(1+\text{sen}\,\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right)^2} = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$$

$$\frac{1+\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta} = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$$

- Separamos fracciones en la expresión del primer miembro.

$$\underbrace{\frac{1}{\cos\,\theta}} + \underbrace{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta}} = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$$

$\sec\,\theta + \text{tg}\,\theta = \sec\,\theta + \text{tg}\,\theta$ **L.q.q.d**

Ejemplo 5 Demuestre:

$$\text{sen}^2\theta \cdot \text{tg}^2\,\theta + \cos^2\,\theta \cdot \text{cotg}^2\,\theta = \text{tg}^2\,\theta + \text{cotg}^2\,\theta - 1$$

Demostración:

- Trabajando en el primer miembro de la identidad:

$$\text{sen}^2\theta \cdot \underbrace{\text{tg}^2\theta} + \underbrace{\cos^2\theta} \cdot \text{cotg}^2\theta = \text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1$$

$$\text{sen}^2\theta\left(\underbrace{\sec^2\theta} - 1\right) + \cos^2\theta\left(\underbrace{\text{cosec}^2\theta} - 1\right) = \text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1$$

$$\text{sen}^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) + \cos^2\theta\left(\frac{1}{\text{sen}^2\theta} - 1\right) = \text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1$$

$$\boxed{\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}} - \text{sen}^2\theta + \boxed{\frac{\cos^2\theta}{\text{en}^2\theta}} - \underbrace{\cos^2\theta} = \text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1$$

$$\text{tg}^2\theta - \text{sen}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - \left(1 - \text{sen}^2\theta\right) = \text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1$$

$$\text{tg}^2\theta - \text{sen}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1 + \text{sen}^2\theta = \text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1$$

$$\text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1 = \text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - 1$$ L.q.q.d

Ejercicio tipo simplificación

Se buscará una expresión reducida de la planteada con ayuda de las identidades fundamentales y/o auxiliares con transformaciones algebraicas.

Ejemplo 1 Simplifica:

$$E = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta} + \frac{1}{\text{cosec}\,\theta + \text{cotg}\,\theta}$$

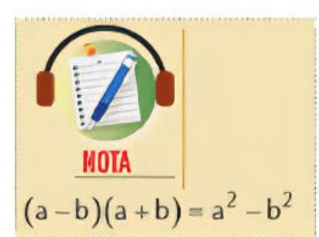
Resolución:

- Operando la expresión dada:

$$E = \frac{\text{cosec}\,\theta + \text{cotg}\,\theta + \text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta}{(\text{cosec}\,\theta - \text{cotg}\,\theta)(\text{cosec}\,\theta + \text{cotg}\,\theta)}$$

$$E = \frac{2\,\text{cosec}\,\theta}{\underbrace{\text{cosec}^2\theta - \text{cotg}^2\theta}_{1}}$$

$$\therefore \quad E = 2\,\text{cosec}\,\theta$$



Ejemplo 2 Simplifica:

$$P = \frac{\sec^4\theta \cdot \text{cosec}^4\theta - \sec^4\theta - \text{cosec}^4\theta}{\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta}$$

Resolución:

- Trabajando en el numerador:

$$P = \frac{\left(\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta\right)^2 - \sec^4\theta - \text{cosec}^4\theta}{\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta}$$

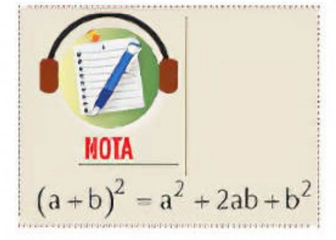
Pero: $\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta$

$$P = \frac{\left(\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta\right)^2 - \sec^4\theta - \text{cosec}^4\theta}{\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta}$$

$$P = \frac{\sec^4\theta + 2\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta + \text{cosec}^4\theta - \sec^4\theta - \text{cosec}^4\theta}{\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta}$$

$$P = \frac{2\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta}{\sec^2\theta \cdot \text{cosec}^2\theta}$$

$$\therefore \quad P = 2$$



Ejemplo 3 Simplifica:

$$K = \sec^4 x - \text{tg}^4 x - 2\,\text{tg}^2 x$$

Resolución:

- Factorizando tenemos:

$$K = \underbrace{\sec^4 x - \text{tg}^4 x} - 2\,\text{tg}^2 x$$

$$K = \left(\underbrace{\sec^2 x - \text{tg}^2 x}_{\boxed{1}}\right)\left(\sec^2 x + \text{tg}^2 x\right) - 2\,\text{tg}^2$$

$$K = \sec^2 x + \underbrace{\text{tg}^2 x - 2\,\text{tg}^2 x}$$

$$K = \underbrace{\sec^2 x - \text{tg}^2 x}_{1}$$

$$K = 1$$

Ejemplo 4 Simplifica: $R = \dfrac{2\sec x - 3\,\text{tg}^2 x - 2}{1 + 3\sec x}$

Resolución:

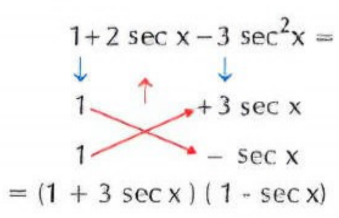
- Recordemos que: $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
- Reemplazando en la expresión a simplificar:

$$R = \frac{2\sec x - 3\left(\sec^2 x - 1\right) - 2}{1 + 3\sec x}$$

$$R = \frac{2\sec x - 3\sec^2 x + 3 - 2}{1 + 3\sec x}$$

$$R = \frac{1 + 2\sec x - 3\sec^2 x}{1 + 3\sec x}$$

- Factorización del numerador por el método del Aspa, tenemos:



$= (1 + 3\sec x)(1 - \sec x)$

- Reemplazando se tiene: $R = \frac{(1+3\sec x)(1-\sec x)}{1+3\sec x}$

$\therefore\quad R = 1 - \sec x$

Ejemplo 5 Reduce:

$$N = \frac{\cos^4 x + 2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}^4 x}{(\text{sen}\,x + \cos x)^2 + (\text{sen}\,x - \cos x)^2}$$

Resolución:

- Al simplificar esta expresión debemos tener en cuenta:

$$a^{2n} - b^{2n} = (a^n + b^n)(a^n - b^n)$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$N = \frac{\cos^4 x - \text{sen}^4 x + 2\,\text{sen}^2 x}{2\underbrace{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{1}}$$

$$N = \frac{\overbrace{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)}^{1}(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 2\,\text{sen}^2 x}{2}$$

$$N = \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}^2 x}{2}$$

$$N = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{2} \rightarrow \quad \therefore\quad N = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 6 Simplifica:

$$M = 1 + 2\sec^2\theta \cdot tg^2\theta - tg^4\theta$$

Resolución:

- Recordemos que: $1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$
- En la expresión a reducir:

$$M = 1 + 2\underbrace{\sec^2\theta}\, tg^2\theta - tg^4\theta$$

$$M = 1 + 2(1 + tg^2\theta)\,tg^2\theta - tg^4\theta$$

$$M = 1 + 2\,tg^2\theta + \underbrace{2\,tg^4\theta - tg^4\theta}$$

$$M = 1 + 2\,tg^2\theta + tg^4\theta$$

$$M = \underbrace{(1 + tg^2\theta)}^2$$

$$M = (\sec^2\theta)^2$$

$$M = \sec^4\theta$$

Ejercicio tipo condicional

Si la condición es complicada debemos simplificarla a una expresión que puede ser la pedida o que nos permita hallar fácilmente lo que nos piden. Si la condición es simple inmediatamente se procede a encontrar la expresión pedida.

Ejemplo 1 Si $\sec\alpha + tg\,\alpha = a$, halla
$E = \sec\alpha - tg\,\alpha$

Resolución:

- Ordenando y trabajando con la condición y la expresión a calcular tenemos:

$$E = \sec\alpha - tg\,\alpha \quad (\times)$$
$$a = \sec\alpha + tg\,\alpha$$

$$E \cdot a = (\sec\alpha - tg\,\alpha)(\sec\alpha + tg\,\alpha)$$

$$E \cdot a = \underbrace{\sec^2\alpha - tg^2\alpha}$$

$$E \cdot a = 1$$

$$\therefore\quad E = \frac{1}{a}$$

Ejemplo 2 Si $tg\,\alpha + cotg\,\alpha = 4$, halla
$M = tg^2\alpha + cotg^2\alpha$

Resolución:

- Elevando al cuadrado ambos miembros de la condición, tenemos:

$$(tg\,\alpha + cotg\,\alpha)^2 = (4)^2$$

$$tg^2\alpha + 2\underbrace{tg\,\alpha \cdot cotg\,\alpha}_{1} + cotg^2\alpha = 16$$

$$tg^2\alpha + 2 + cotg^2\alpha = 16$$

$$tg^2\alpha + cotg^2\alpha = 14$$

$$\therefore\quad M = 14$$

Ejemplo 3 Si $\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{4}$, halla

$$P=\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$$

Resolución:

- En la expresión pedida, elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(P)^2=(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2$$

$$P^2=\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta+2\underbrace{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}_{1/4}+\cos^2\theta}_{1}$$

$$P^2=1+2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P^2=\frac{3}{2}\rightarrow P=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\rightarrow P=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ejemplo 4 Si $\frac{\operatorname{sen}^4\theta-\cos^4\theta}{\operatorname{sen}^6\theta-\cos^6\theta}=\frac{1}{1-a^2}$, halla

$$A=\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta$$

Resolución:

- De los productos notables, recordemos que:

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$

$$a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$$

- Factorizando el numerador y denominador de la condición tenemos:

$$\frac{\cancel{(\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta)}(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}{\cancel{(\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta)}(\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta+\cos^4\theta)}=\frac{1}{1-a^2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta+\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta+\cos^4\theta}=\frac{1}{1-a^2}$$

- Recordemos que:

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\operatorname{sen}^4\theta+\cos^4\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta$$

- Reemplazando:

$$\frac{1}{1-2\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta}=\frac{1}{1-a^2}$$

$$\frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta}=\frac{1}{1-a^2}$$

- Comparando los términos de la igualdad tenemos:

$$\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta=a^2$$

$$\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta=a$$

- Nos piden: $A=\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta$

$$A=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$A=\frac{1}{\underbrace{\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}_{a}}$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{a}$$

Ejemplo 5 Si $\cos x+\sec x=n$, halla $B=\cos^3x+\sec^3x$

Resolución:

- Tenemos en cuenta que:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$$

- En la condición, elevamos al cubo ambos miembros de la igualdad:

$$(\cos x+\sec x)^3=(n)^3$$

$$\underbrace{\cos^3x+\sec^3x}_{B}+3\underbrace{\cos x\sec x}_{1}\underbrace{(\cos x+\sec x)}_{n}=n^3$$

$$B+3\cdot1(n)=n^3$$

$$B+3n=n^3$$

$$\therefore\quad B=n^3-3n$$

Ejemplo 6 Si $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$, halla

$$M=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha+1$$

Resolución:

- En la condición, elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}_{1}=\frac{6}{4}$$

$$1+2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{3}{2}$$

$$\underbrace{\text{sen }\alpha}\ \underbrace{\cos\alpha} = \frac{1}{4}$$

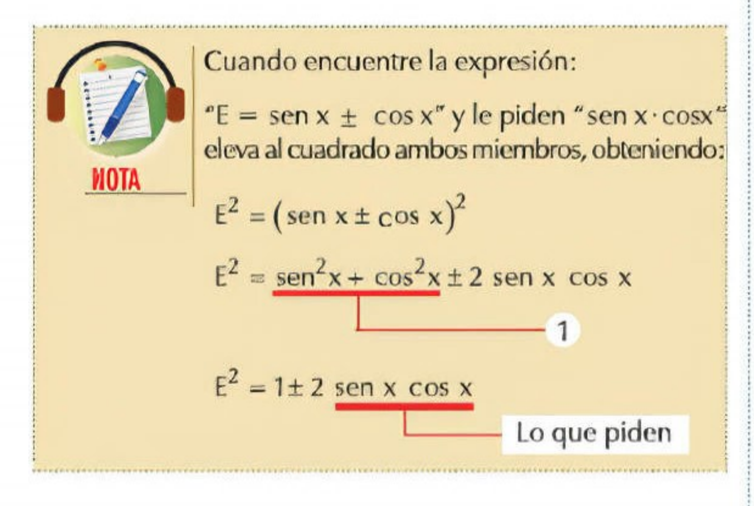
$$\frac{1}{\text{cosec }\alpha}\cdot\frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sec\alpha\cdot\text{cosec }\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$\sec\alpha\cdot\text{cosec }\alpha = 4$$

$$M = \sec\alpha\cdot\text{cosec }\alpha + 1$$

$$M = 4 + 1 \quad \therefore \quad \boxed{M = 5}$$



Cuando encuentre la expresión:

"$E = \text{sen } x \pm \cos x$" y le piden "$\text{sen } x\cdot\cos x$" eleva al cuadrado ambos miembros, obteniendo:

$$E^2 = (\text{sen } x \pm \cos x)^2$$

$$E^2 = \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} \pm 2\,\text{sen } x\,\cos x$$

$$E^2 = 1 \pm 2\,\underbrace{\text{sen } x\,\cos x}_{\text{Lo que piden}}$$

Ejemplo 7 Si $n\sec\theta + m\cos\theta = m$, determine el valor de: $E = \cos\theta + \text{sen}^2\theta$

Resolución:

- De la expresión: $n\sec\theta + m\cos\theta = m$
- Obtenemos:

$$n\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) + m\cos\theta = m$$

$$n + m\cos^2\theta = m\cos\theta$$

$$n = m\cos\theta - m\cos^2\theta$$

$$n = m\left(\cos\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$\frac{n}{m} = \cos\theta - \left(1 - \text{sen}^2\theta\right)$$

$$\frac{n}{m} = \cos\theta - 1 + \text{sen}^2\theta$$

$$\frac{n}{m} + 1 = \underbrace{\cos\theta + \text{sen}^2\theta}$$

$$\frac{n+m}{m} = E$$

$$\boxed{E = \frac{n+m}{m}}$$

Ejercicios tipo eliminación angular

Estos ejercicios consisten en que a partir de ciertas relaciones trigonométricas debemos encontrar relaciones algebraicas en donde no aparezca el ángulo.

Ejemplo 1 Elimina "α" de:

$\text{sen }\alpha + 1 = a$ ... ❶ $\quad$ $\text{cosec }\alpha + 1 = b$ ... ❷

Resolución:

- Trabajando las expresiones ❶ y ❷ tenemos:

$$\text{sen }\alpha = a - 1$$
$$\text{cosec }\alpha = b - 1 \quad (\times)$$

$$\text{sen }\alpha\cdot\text{cosec }\alpha = (a-1)(b-1)$$

$$\cancel{1} = ab - a - b + \cancel{1}$$

$$\therefore \quad \boxed{a + b = ab}$$

Ejemplo 2 Elimina "θ" de:

$\text{cotg }\theta = \sqrt{a+1}$ ... ❶ $\quad$ $\text{cosec }\theta = \sqrt{b+1}$ ... ❷

Resolución:

- Elevando al cuadrado las expresiones ❶ y ❷:

$$\begin{cases}(\text{cotg }\theta)^2 = \left(\sqrt{a+1}\right)^2 & \dots ❶\\ (\text{cosec }\theta)^2 = \left(\sqrt{b+1}\right)^2 & \dots ❷\end{cases}$$

$$\text{cotg}^2\theta = a + 1 \dots ❸$$

$$\text{cosec}^2\theta = b + 1 \dots ❹$$

- Restando miembro a miembro las expresiones ❹ y ❸:

$$\text{cosec}^2\theta = b + 1$$
$$\text{cotg}^2\theta = a + 1 \quad (-)$$

$$\underbrace{\text{cosec}^2\theta - \text{cotg}^2\theta}_{1} = b + 1 - a - 1$$

$$\boxed{1 = b - a}$$

Ejemplo 3 Elimina "x" de:

$$a \text{ sen } x + \cos x = 1 \quad \ldots (1)$$
$$b \text{ sen } x - \cos x = 1 \quad \ldots (2)$$

Resolución:

- Trabajando con las expresiones (1) y (2) tenemos:

$$a \text{ sen } x = 1 - \cos x$$
$$b \text{ sen } x = 1 + \cos x \quad (\times)$$

$$ab \text{ sen}^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$
$$ab \text{ sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$ab \text{ sen}^2 x = \text{sen}^2 x$$
$$\therefore \boxed{ab = 1}$$

Ejemplo 4 Elimina "θ" de:

$x = 4 \text{ sen } \theta \quad \ldots (1) \qquad y = 5 \cos \theta \quad \ldots (2)$

Resolución:

- Elevando al cuadrado las expresiones (1) y (2):

$$\begin{cases} (x)^2 = (4 \text{ sen } \theta)^2 \\ (y)^2 = (5 \cos \theta)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 16 \text{ sen}^2\theta \\ y^2 = 25 \cos^2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} = \text{sen}^2\theta \\ \dfrac{y^2}{25} = \cos^2\theta \end{cases} \quad (+)$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

Ejemplo 5 Elimina "α" de:

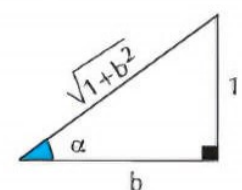
$$\text{sen}^2\alpha - \text{cosec}^2\alpha = a \quad \ldots (1)$$
$$\cos\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha = b \quad \ldots (2)$$

Resolución:

- Simplificando la expresión (2):

$$\cos\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha = b$$
$$\cos\alpha \cdot \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = b$$
$$\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = b$$
$$\text{cotg}\,\alpha = b \quad \ldots (3)$$

- A partir de **3** se construye un triángulo rectángulo:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$
$$\text{cosec}\,\alpha = \sqrt{1+b^2}$$

- Reemplazando en (1):

$$\text{sen}^2\alpha - \text{cosec}^2\alpha = a$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right]^2 - \left[\sqrt{1+b^2}\right]^2 = a$$
$$\frac{1}{1+b^2} - (1+b^2) = a$$
$$1 - (1+b^2)^2 = a(1+b^2)$$
$$1 - 1 - 2b^2 - b^4 = a + ab^2$$
$$b^4 + ab^2 + 2b^2 + a = 0$$
$$\therefore \boxed{b^4 + (a+2)b^2 + a = 0}$$

Ejemplo 6 Elimina "θ" de:

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{x} \quad \ldots (1)$$
$$\text{tg}\,\theta = \sqrt{y} \quad \ldots (2)$$

Resolución:

- Trabajando las expresiones (1) y (2):

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{x} \rightarrow \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$\text{tg}\,\theta = \sqrt{y} \rightarrow \text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

- Reemplazamos en la identidad:

$$\text{cosec}^2\theta - \text{cotg}^2\theta = 1$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = 1$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \rightarrow \quad \therefore \boxed{y - x = xy}$$

Problemas resueltos

SOBRE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1 Simplifica $K = \dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$

A) cos α   B) tg α   C) cotg α
D) sec α   E) cosec α

Resolución:

- Expresando "K" en función de "sen α" y "cos α"

$$K = \frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} + \underbrace{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$K = \frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$K = \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1+\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha}$$

$$K = \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{(1+\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha}$$

$$K = \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1+\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha}$$

$$K = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$K = \sec\alpha$ **Rpta. D**

2 Reduce:

$$E = 1 + 2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x - \sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x$$

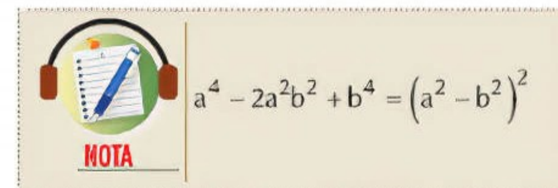
A) 0   B) 1   C) 2   D) 3   E) 4

Resolución:

- Ordenando los términos de la expresión tenemos:

$$E = 1 - \sec^4 x + 2\sec^2 x\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^4 x$$

$$E = 1 - \left(\sec^4 x - 2\sec^2 x\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x\right)$$



$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = \left(a^2 - b^2\right)^2$$

$$E = 1 - \underbrace{\left(\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x\right)^2}_{1}$$

$$E = 1 - (1)^2$$

$\therefore$ $E = 0$ **Rpta. A**

3 Halla "n" en la identidad:

$$\frac{(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)^2 - 1}{(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x)^2 - 1} = \frac{1-n}{1+n}$$

A) sen x   B) cos x   C) tg x
D) cotg x   E) sec x

Resolución:

- Operando en el primer miembro de la igualdad:

$$\frac{\operatorname{cosec}^2 x - 2\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x - 1}{\operatorname{cosec}^2 x + 2\operatorname{cosec} \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x - 1} = \frac{1-n}{1+n}$$

- Pero: $\operatorname{cosec}^2 x - 1 = \operatorname{cotg}^2 x$

$$\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 2\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x + 2\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1-n}{1+n}$$

$$\frac{2\operatorname{cotg}^2 x - 2\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x}{2\operatorname{cotg}^2 x + 2\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x} = \frac{1-n}{1+n}$$

- Factorizando "2 cotg x" en el numerador y denominador:

$$\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 2\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x + 2\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1-n}{1+n}$$

$$\frac{2\operatorname{cotg}^2 x - 2\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x}{2\operatorname{cotg}^2 x + 2\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x} = \frac{1-n}{1+n}$$

- Multiplicando por "tg x" el numerador y denominador del primer miembro de la igualdad:

$$\frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cosec} x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cosec} x} = \frac{1-n}{1+n}$$

- Pero: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cosec} x}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cosec} x} = \frac{1-n}{1+n}$$

- Comparando los términos de ambos miembros de la igualdad se observa que:

$$n = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$n = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$n = \dfrac{1}{\cos x} \rightarrow \therefore$ $n = \sec x$ **Rpta. E**

4 Sabiendo que:

$$\text{sen}^3\,\alpha + \text{sen}\,\alpha = x \qquad \dots (1)$$

$$\cos^3\alpha + \cos\alpha = y \qquad \dots (2)$$

Halla M = x cosec α + y sec α

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

- Trabajando en la igualdad (1) :

$$\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\,\alpha = x$$

$$\text{sen}\,\alpha\left(\text{sen}^2\alpha + 1\right) = x$$

$$\text{sen}^2\alpha + 1 = \frac{x}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\text{sen}^2\alpha + 1 = x\ \text{cosec}\ \alpha \dots (3)$$

- Trabajando en la igualdad (2) :

$$\cos^3\alpha + \cos\alpha = y$$

$$\cos\alpha\left(\cos^2\alpha + 1\right) = y$$

$$\cos^2\alpha + 1 = \frac{y}{\cos\alpha}$$

$$\cos^2\alpha + 1 = y\ \sec\alpha \dots (4)$$

- Sumando miembro a miembro las igualdades (3) y (4) :

$$\text{sen}^2\alpha + 1 = x\ \text{cosec}\ \alpha$$

$$\cos^2\alpha + 1 = y\ \sec\alpha \quad (+)$$

$$\underbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + 2 = \underbrace{x\ \text{cosec}\ \alpha + y\ \sec\alpha}_{M}$$

$$1 + 2 = M$$

$$\therefore \quad M = 3 \quad \textbf{Rpta. C}$$

5 Si $\text{sen}^2x + \cos^4x = n$, halla $K = \text{sen}^4x + \cos^4x$

A) 2n + 1 B) 2n – 1 C) n + 1
D) n – 1 E) 2n

Resolución:

- Recordemos la identidad auxiliar:

$$\text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\ \text{sen}^2x \cdot \cos^2x$$

- Trabajando la expresión pedida tenemos:

$$K = \text{sen}^4x + \cos^4x$$

$$K = 1 - 2\ \text{sen}^2x\ \cos^2x$$

$$K = 1 - 2\left(1 - \cos^2x\right)\cos^2x$$

$$K = 1 - 2\ \underline{\cos^2x} + 2\ \cos^4x$$

$$K = 1 - 2\left(1 - \text{sen}^2x\right) + 2\ \cos^4x$$

$$K = 1 - 2 + \underline{2\ \text{sen}^2x} + \underline{2\cos^4x}$$

$$K = -1 + 2\underbrace{\left(\text{sen}^2x + \cos^4x\right)}_{n}$$

$$K = -1 + 2(n)$$

$$\therefore \quad K = 2n - 1 \quad \textbf{Rpta. B}$$

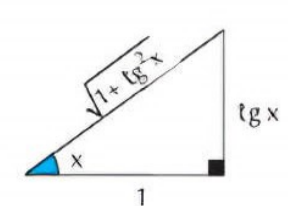
6 Dado y = sen x · cos x + sen² x.
Expresa "y" en función de "tg x"

A) $y = \dfrac{tg^2x}{1 + tg^2x}$ B) $y = \dfrac{1 + tg^2x}{tg\ x + tg^2x}$ C) $y = \dfrac{1 + tg\ x}{2\ tg^2x}$

D) $y = \dfrac{2\ tg^2x}{1 + tg\ x}$ E) $y = \dfrac{tg\ x + tg^2x}{1 + tg^2x}$

Resolución:

- Para resolver este ejercicio vamos a construir un triángulo rectángulo cuyos lados se expresen en términos de "tg x"



$$\text{sen}\ x = \frac{tg\ x}{\sqrt{1 + tg^2x}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2x}}$$

- Reemplazando en la expresión pedida, tenemos:

$$y = \text{sen}\ x \cdot \cos x + \text{sen}^2x$$

$$y = \frac{tg\ x}{\sqrt{1 + tg^2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2x}} + \left[\frac{tg\ x}{\sqrt{1 + tg^2x}}\right]^2$$

- Operando se obtiene:

$$y = \frac{tg\ x}{1 + tg^2x} + \frac{tg^2x}{1 + tg^2x}$$

$$y = \frac{tg\ x + tg^2x}{1 + tg^2x} \quad \textbf{Rpta. E}$$

7 Si cosec α – sec α = 2, calcular el valor de: E = tg²α + 2 sec α

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) 5

Resolución:

- Trabajando la expresión pedida tenemos:

$$E = \underbrace{tg^2\alpha} + 2\sec\alpha$$

$$E = \sec^2\alpha - 1 + 2\sec\alpha$$

- Factorizando "sec α":

$$E = \sec\alpha(\sec\alpha + 2) - 1$$

- De la condición: $\operatorname{cosec}\alpha - \sec\alpha = 2$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sec\alpha + 2$$

- Reemplazando: $E = \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha - 1$
- Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(E)^2 = (\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha - 1)^2$$

$$E^2 = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha - 2\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha + 1$$

- Por identidad auxiliar:

$$\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$\rightarrow E^2 = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha - 2\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha + 1$$

$$E^2 = \operatorname{cosec}^2\alpha - 2\operatorname{cosec}\alpha \cdot \sec\alpha + \sec^2\alpha + 1$$

$$E^2 = \underbrace{(\operatorname{cosec}\alpha - \sec\alpha)}_{2}{}^2 + 1$$

$$E^2 = (2)^2 + 1$$

$E = \sqrt{5}$ **Rpta. D**

8 Eliminar "θ" de:

$$\sec\theta + tg\,\theta = 2m \quad \ldots (1)$$

$$\sec\theta - tg\,\theta = 3n \quad \ldots (2)$$

A) $2m + 3n = 1$ B) $2m - 3n = 1$ C) $3m - 2n = 1$
D) $3m + 2n = 1$ E) $6mn - 1 = 0$

Resolución:

- Trabajamos simultáneamente las condiciones (1) y (2):

$$\sec\theta + tg\,\theta = 2m$$
$$\sec\theta - tg\,\theta = 3n \quad (\times)$$

$$(\sec\theta + tg\,\theta)(\sec\theta - tg\,\theta) = 2m \cdot 3n$$

$$\sec^2\theta - tg^2\theta = 6mn$$

$$1 = 6mn$$

$6mn - 1 = 0$ **Rpta. E**

9 Eliminar "θ" de:

$$tg\,\theta + \operatorname{sen}\theta = a \quad \ldots (1)$$

$$tg\,\theta - \operatorname{sen}\theta = b \quad \ldots (2)$$

A) $(a^2 - b^2)^2 = 16ab$ B) $(a^2 - b^2)^2 = 12ab$

C) $(a^2 - b^2)^2 = 9ab$ D) $(a^2 - b^2)^2 = 4ab$

E) $(a^2 - b^2)^2 = 2ab$

Resolución :

- Recordemos la solución de un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{matrix} x + y = a \\ x - y = b \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2}$$

- Resolviendo (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} tg\,\theta + \operatorname{sen}\theta = a \\ tg\,\theta - \operatorname{sen}\theta = b \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases} tg\,\theta = \dfrac{a+b}{2} \rightarrow \operatorname{cotg}\theta = \dfrac{2}{a+b} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{a-b}{2} \rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{2}{a-b} \end{cases}$$

- Aplicando la identidad pitagórica:

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cotg}^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{2}{a-b}\right)^2 - \left(\frac{2}{a+b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{4}{(a-b)^2} - \frac{4}{(a+b)^2} = 1$$

$$\frac{4\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]}{(a-b)^2(a+b)^2} = 1$$



$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$a^2b^2 = (ab)^2$$

- Entonces tenemos: $4[4ab] = [(a-b)(a+b)]^2$

$$16ab = [a^2 - b^2]^2$$

$(a^2 - b^2)^2 = 16ab$ **Rpta. A**

10 Reduce:

$$M = (\operatorname{sen}^2x - \cos^2x)(1 - 2\operatorname{sen}^2x \cdot \cos^2x)$$

A) $\operatorname{sen}^4x - \cos^4x$ B) $\operatorname{sen}^6x - \cos^6x$
C) $\operatorname{sen}^8x - \cos^8x$ D) $\operatorname{sen}^{10}x - \cos^{10}x$
E) $\operatorname{sen}^{12}x - \cos^{12}x$

Resolución:

- Recordemos que:

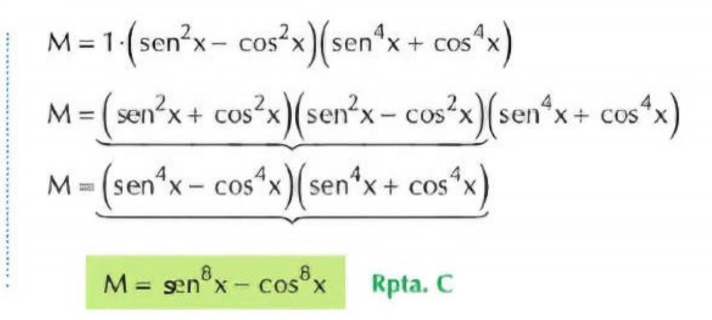
$$\operatorname{sen}^4x + \cos^4x = 1 - 2\operatorname{sen}^2x \cdot \cos^2x$$

- En la expresión:

$$M = \left(\text{sen}^2x - \cos^2x\right)\left(1 - 2\,\text{sen}^2x \cdot \cos^2x\right)$$

$$M = \left(\text{sen}^2x - \cos^2x\right)\left(\text{sen}^4x + \cos^4x\right)$$

- Recordemos que: $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$
- Multiplicando por "1":



$$M = 1 \cdot \left(\text{sen}^2x - \cos^2x\right)\left(\text{sen}^4x + \cos^4x\right)$$

$$M = \underbrace{\left(\text{sen}^2x + \cos^2x\right)\left(\text{sen}^2x - \cos^2x\right)}\left(\text{sen}^4x + \cos^4x\right)$$

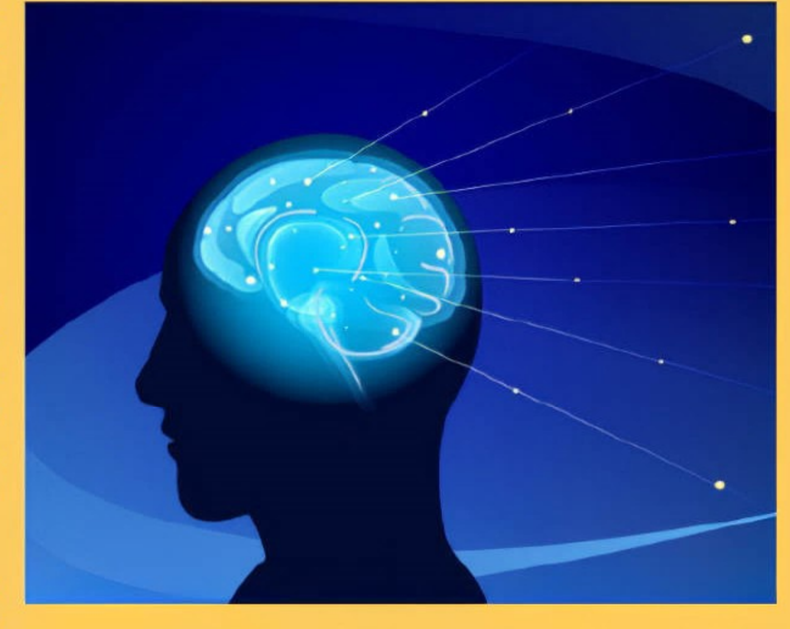
$$M = \underbrace{\left(\text{sen}^4x - \cos^4x\right)\left(\text{sen}^4x + \cos^4x\right)}$$

$$M = \text{sen}^8x - \cos^8x$$ **Rpta. C**

Amplía tus conocimientos



La actividad cerebral puede ser leída en tiempo real a través de las matemáticas



El Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) ha utilizado las matemáticas para desarrollar una técnica que registra en tiempo real la actividad del cerebro, lo que contribuiría a identificar aquellas regiones donde se originan las patologías neurológicas.

El CSIC ha asegurado que este hallazgo puede ayudar a averiguar qué núcleos cerebrales (conjuntos de neuronas) participan en el procesamiento de la información y en la ejecución de tareas, así como a detectar qué núcleos están alterados en patologías neurológicas.

La técnica combina las matemáticas, el análisis, los registros eléctricos y la biofísica, permite la lectura de la actividad eléctrica simultánea de varias zonas del interior del cerebro, en cada una de las cuales se percibe a su vez la de otros núcleos conectados entre sí, ha explicado la institución científica en un comunicado.

El líder de la investigación, el científico del Instituto Cajal del CSIC, Óscar Herreras, ha comparado el proceso con la grabación del sonido de una habitación en la que varias personas hablan a la vez: «*Las voces serían procesadas por esta técnica matemática que devuelve el sonido de cada persona por separado de forma que su mensaje es perfectamente comprensible*».

Aunque la resonancia magnética ofrece imágenes completas del cerebro, Herreras ha afirmado que son borrosas, de mala calidad y que apenas captan una pequeña fracción de lo que realmente ocurre. Por contra, la técnica desarrollada por el CSIC permite una lectura en tiempo real de grandes flujos de información con la que se podría averiguar qué núcleos participan en el procesamiento de esa información y en la ejecución de tareas.

De hecho, el equipo investigador ya está llevando a cabo experimentos con animales despiertos para conseguir leer su actividad neuronal y asociarla a distintos comportamientos.

Personaje de la Matemática

Paolo Ruffini

(Matemático y médico italiano)



Nació en Valenteno, Estados Papales (hoy Italia), el 22 de Setiembre de 1765. Siendo adolescente se desplazó con sus padres a Módena, allí ingresó a la Universidad cuando tenía 18 años de edad. Estudió matemáticas, medicina, filosofía y literatura. En el año 1788, Ruffini se graduó en filosofía, medicina y cirugía, posteriormente obtuvo su graduación en matemáticas. Gracias a sus estudios de matemáticas logró el mérito y el aprecio por lo que el año 1787, accedió al puesto de profesor en la Universidad de Módena, ocupando la plaza vacante de su profesor Cassiani, donde había estudiado. También obtuvo la cátedra de Análisis de la Escuela Militar de esa ciudad, pero tuvo que abandonar el cargo por negarse a jurar lealtad a la República Cisalpina (integrada por Emilia, Lombardía, Módena y Bolonia) de Napoleón Bonaparte, pero un año más tarde, las tropas de Austria, le restituyeron el puesto académico. No sólo fue repuesto en su puesto, sino también nombrado Rector de la Universidad y Catedrático de la clínica médica, medicina práctica y matemáticas aplicadas.

Le llevó muchos años de su vida demostrar la imposibilidad de encontrar una expresión con radicales, que resuelva una ecuación algebraica de 5º grado (problema que había mantenido ocupados a generaciones de matemáticos). En el año 1799 publicó el libro *Teoría general de las ecuaciones*, en el cual aparece la regla que lleva su nombre (Regla de Ruffini) y que permite encontrar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de un polinomio cualquiera por el binomio $(x + a)$. No ha sido esta la única regla en la que Ruffini ha contribuido en el campo de las matemáticas, también elaboró una demostración de la imposibilidad de la solución general de las ecuaciones algebraicas del grado 5º y superiores, aunque no fue del todo exacta su teoría, esta sería corregida posteriormente por el matemático Noruego, Niels Henrik Abel.

Como estudioso de la ciencia médica trató a sus pacientes de una epidemia de tifus, lo que le causó el contagio de esta enfermedad, de la cual muere unos años más tarde en Módena el 10 de mayo de 1822 a los 57 años de edad.

Investiga:

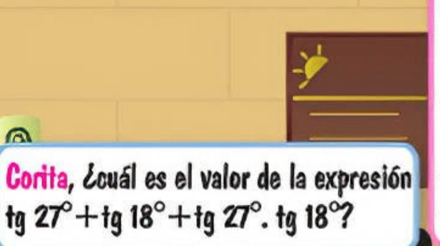


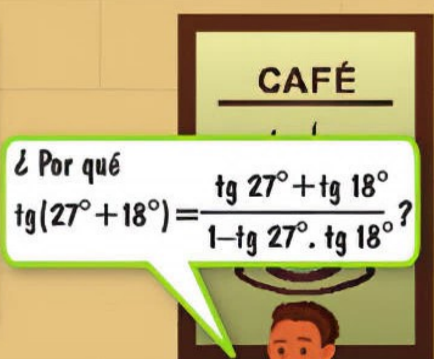
1. La vida de Paolo Ruffini estuvo marcada por su dedicación a la medicina y la matemática mostrando en ambas un destacado desempeño. ¿Cuál es tú opinión acerca de ello?

2. ¿Cuál crees que sea la actitud más destacada en la vida de Paolo Ruffini?



Funciones trigonométricas de ángulos compuestos y de ángulos múltiples











Competencia	Temas
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Seno de la suma de dos ángulos. Coseno de la suma de dos ángulos. Tangente de la suma de dos ángulos. Cotangente de la suma de dos ángulos. Funciones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos. Funciones trigonométricas del ángulo doble. Funciones trigonométricas del ángulo triple. Funciones trigonométricas del ángulo mitad.
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Transformaciones de suma o diferencia a producto. Transformaciones de producto a suma o diferencia. Ley de senos. Ley de cosenos. Ley de tangentes. Ley de las proyecciones. Semiángulos en función de los lados y del semiperímetro de un triángulo. Área de la región triangular.

ENFOQUE BÚSQUEDA DE LA EXCELENCIA

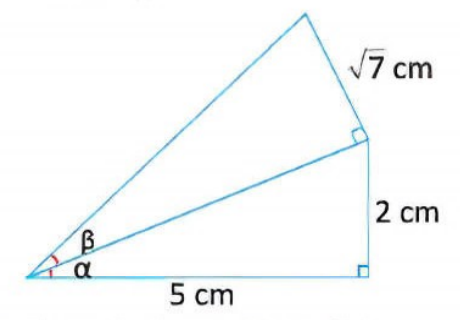
Valor	Actitudes que suponen
Flexibilidad y apertura	Disposición para adaptarse a los cambios, modificando si fuera necesario la propia conducta para alcanzar determinados objetivos cuando surgen dificultades, información no conocida o situaciones nuevas.

Recupera saberes previos



Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:

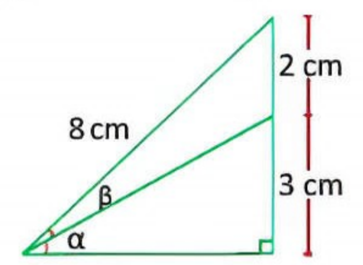
1 Observa la figura.



a. ¿Cuál es el valor de $58\text{sen}^2\alpha$?

b. ¿Cuál es el valor de $108\text{ctg}^2\beta$?

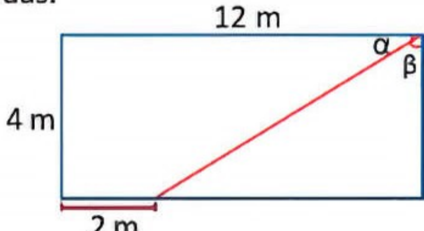
2 En la figura se indican algunas medidas.



a. ¿Cuánto vale la expresión $16\ \text{sen}^2\alpha + 117\ \text{tg}^2(\alpha + \beta)$?

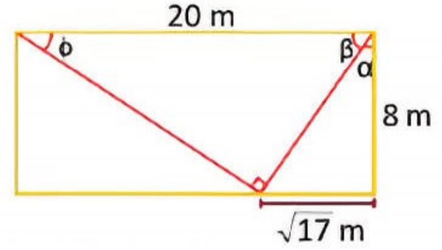
b. ¿Cuál es el resultado de $78\sec^2(\alpha + \beta) + 3\csc^2\alpha$?

3 En el rectángulo se presentan algunas medidas.



¿Cuánto vale la expresión $3\ \text{tg}\alpha + 2\sec\beta$?

4 Observa el rectángulo.



¿Cuál es el valor de la expresión $\text{sen}\,\phi + \sec\alpha - \cos\beta$?

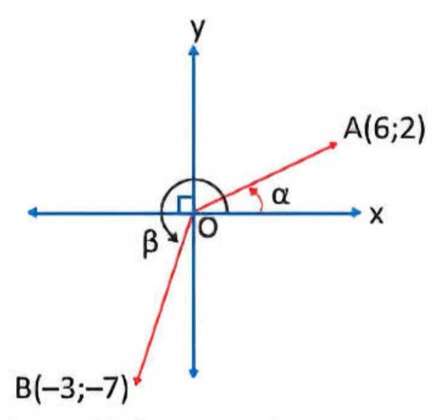
5 Expresa como producto la expresión $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$.

6 Transforma a producto la expresión $\sqrt{5}\left[\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)^2 + 1\right] \cdot \text{tg}^3\alpha$

7 Expresa como producto la expresión $x^2 - 3x - 108$.

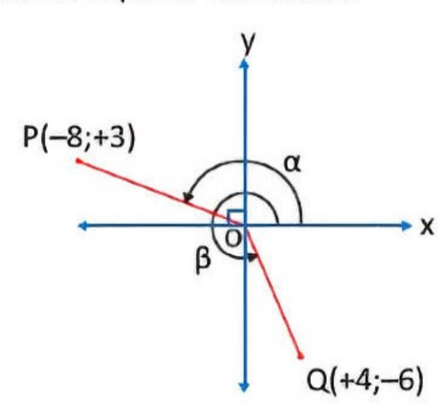
8 Transforma a producto la expresión $3a^{10} - 19a^5b^3 - 14b^6$.

9 Los puntos A y B se encuentran en el plano cartesiano.



¿Cuánto vale la expresión $10\text{sen}^2\alpha + 58\cos^2\beta$?

10 Observa el plano cartesiano.



¿Cuál es el valor de la expresión $64\text{sen}^2\alpha - 9\csc^2\beta$?

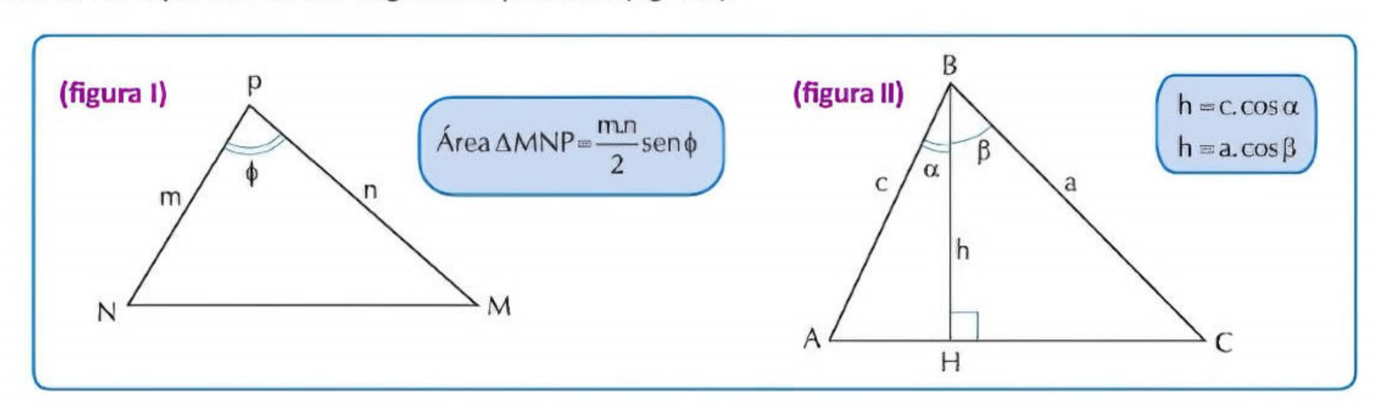
Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio	Emplea la fórmula de seno de la suma de dos ángulos para calcular el seno de un ángulo no notable, descomponiendo dicho ángulo en la suma de dos ángulos notables.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.	Afirma que en todo triángulo la suma de las tangentes de sus ángulos es igual que el producto de las tangentes de dichos ángulos, lo demuestra y justifica con ejemplos.

Funciones Trigonométricas de Ángulos Compuestos

Seno de la suma de dos ángulos

La demostración de la fórmula del seno de la suma de dos ángulos agudos a y b se realizará usando áreas de las regiones triangulares. Es sabido que el área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo comprendido (figura I).



En la figura II: $\text{Área}\,\Delta ABC = \text{Área}\,\Delta AHB + \text{Área}\,\Delta BHC$

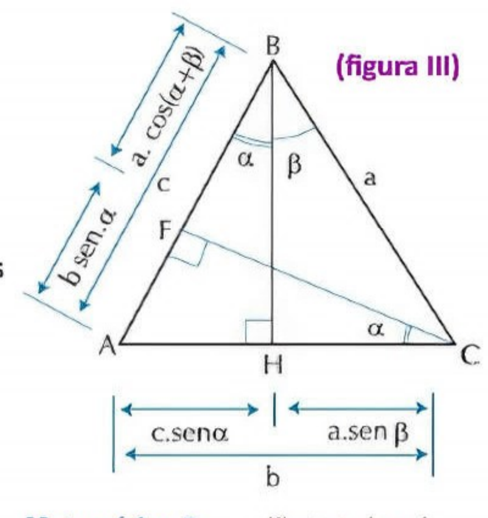
$$\frac{c.a}{2}\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{c.h}{2}\text{sen}\,\alpha + \frac{a.h}{2}\text{sen}\,\beta$$

$$\frac{c.a}{2}\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{c.(a\cos\beta)}{2}\text{sen}\,\alpha + \frac{a.(c.\cos\alpha)}{2}\text{sen}\,\beta$$

Cancelando $\frac{c.a}{2} \rightarrow$ $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\text{sen}\,\beta$ (Fórmula)

Coseno de la suma de dos ángulos

Consideramos el triángulo ABC (figura III) en donde se han trazado las alturas desde B y C.



Del gráfico:

BF = AB – AF

a.cos $(\alpha + \beta)$= c – b. sen α ...❶

AC = AH + HC

$b = c.\ \text{sen}\ \alpha + a.\text{sen}\ \beta$ ...❷

Remplazando 2 en 1

$a.\cos(\alpha+\beta) = c - (c\,\text{sen}\,\alpha + a.\text{sen}\beta)\ \text{sen}\ \alpha$

$a.\cos(\alpha+\beta) = c - c\ .\ \text{sen}^2\ \alpha + a.\text{sen}\ \alpha \cdot \text{sen}\ \beta$

$a.\cos(\alpha+\beta) = c\ (1 - \text{sen}^2\alpha) - a.\text{sen}\ \alpha \cdot \text{sen}\ \beta$

$$a\cos(\alpha+\beta) = c.\cos^2\alpha - a\,\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\beta$$

$$a\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha)(c.\cos\alpha) - a.\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\beta$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{En el } \triangle\ BHA: BH = c.\cos\alpha \\ \text{En el } \triangle\ BHC: BH = a.\cos\beta\end{array}\right\} \rightarrow c.\cos\alpha = a.\cos\beta$$

Entonces: $a.\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha)(a.\cos\beta) - a.\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\beta$

Cancelando "a" $\therefore$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$ (Fórmula)

Tangente de la suma de dos ángulos

- Sabemos que: $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$
  $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta$
- Dividiendo miembro a miembro, obtenemos: $\dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha.\text{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta}$
- Dividimos el numerador y denominador del segundo miembro entre "cos α cos β":

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\right)}{\left(\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)}$$

$$\frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\text{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}\right)}{\left(\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)} \rightarrow \therefore \quad \text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\ \text{tg}\beta}$$

(Fórmula)

Cotangente de la suma de dos ángulos

- Sabemos que: $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}.\alpha\cos\beta + \cos\alpha.\text{sen}\beta$
  $\cos(\alpha+\beta) = \cos.\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\beta$
- Dividiendo miembro a miembro, obtenemos: $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)} = \dfrac{\cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\beta}{\text{sen}\,\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\text{sen}\beta}$
- Dividimos el numerador y el denominador del segundo miembro entre " cos α cos β":

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{\left(\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{se}\quad\beta}\right)}{\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}\right)}$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{\left(\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}\right)}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}+\dfrac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta}}\quad\therefore\quad \cot g(\alpha+\beta)=\frac{\cot g\,\alpha.\cot g\,\beta-1}{\cot g\,\beta+\cot g\,\alpha}$$ (Fórmula)

F.T de la diferencia de dos ángulos

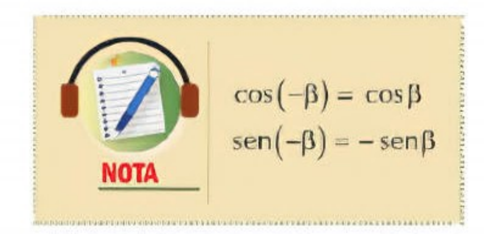
Si en las fórmulas de $\text{sen}(\alpha+\beta)$ y cos (a+b), hacemos: β = –β tenemos:

a) $\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\left[\alpha+(-\beta)\right]$

$=\text{sen}\,\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\,\text{sen}(-\beta)$

Luego: $\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\text{sen}\beta)$

$\therefore\ \text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\beta$ (Fórmula)



$\cos(-\beta)=\cos\beta$

$\text{sen}(-\beta)=-\text{sen}\beta$

b) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\left[\alpha+(-\beta)\right]$

$=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\text{sen}\,\alpha+\text{sen}(-\beta)$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha(-\text{sen}\beta)$

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta$ (Fórmula)

c) Tangente de la diferencia de dos ángulos: $\therefore\ \text{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\beta}$ (Fórmula)

d) Cotangente de la diferencia de los ángulos: $\therefore\ \cot g(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot g\,\alpha.\cot g\beta+1}{\cot g\beta-\cot g\,\alpha}$ (Fórmula)

Cuadro de fórmulas básicas

F.T de la suma de dos ángulos:	F.T de la diferencia de dos ángulos:
$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\text{sen}\beta$	$\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\text{sen}\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\beta$
$\text{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\beta}$	$\text{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\beta}$
$\cot g(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot g\,\alpha.\cot g\beta-1}{\cot g\,\beta+\cot g\,\alpha}$	$\cot g(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot g\,\alpha.\cot g\beta+1}{\cot g\beta-\cot g\,\alpha}$

Ejercicios resueltos

1 Calcula sen 67°

Resolución:

- Descomponemos 67° en la suma de:

$$67° = 37° + 30°$$

- Luego, tomamos "sen" a ambos miembros de la igualdad:

$$\text{sen}(67°) = \underbrace{\text{sen}(37°+30°)}$$

$$\text{sen}37° = \text{sen}37°.\cos 30° + \cos 37°.\text{sen}30°$$

$$\text{sen}67° = \frac{3}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5}.\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}67° = \frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{4}{10}$$

$$\therefore \text{sen}67° = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$$ **Rpta.**

2 Reduce: $M = \dfrac{\text{sen}55°}{\text{sen}10° + \cos 10°}$

Resolución:

- La expresión se puede escribir así:

$$M = \frac{\text{sen}(45°+10°)}{\text{sen}10°+\cos 10°} = \frac{\text{sen}45°\cos 10° + \cos 45°\text{sen}10°}{\text{sen}10° + \cos 10°}$$

- Reemplazando: sen 45° = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, cos 45° = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$M = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 10° + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}10°}{\text{sen}10° + \cos 10°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{(\cos 10° + \text{sen}10°)}}{\cancel{\text{sen}10° + \cos 10°}}$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ **Rpta.**

3 Calcula tg 29°.

Resolución:

- Expresamos 29° como una diferencia 29° = 74° – 45°.
- Luego, tomamos "tg" a ambos miembros de la igualdad:

$$\text{tg}(29°) = \text{tg}(74° - 45°)$$

$$\text{tg}29° = \frac{\text{tg}74° - \text{tg}45°}{1 + \text{tg}74°.\text{tg}45°}$$

$$\text{tg}29° = \frac{\frac{24}{7} - 1}{1 + \frac{24}{7}.1} = \frac{\frac{17}{\cancel{7}}}{\frac{31}{\cancel{7}}}$$

$$\therefore \text{tg}29° = \frac{17}{31}$$ **Rpta.**

4 Reduce: $E = \dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\ .\ \cos\beta} - \text{tg}\beta$

Resolución:

- Recordemos que:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\text{sen}\beta$$

- Reemplazando:

$$E = \frac{\text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} - \text{tg}\beta$$

$$E = \frac{\text{sen}\alpha.\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha.\cancel{\cos\beta}} + \frac{\cancel{\cos\alpha}\,\text{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}.\cos\beta} - \text{tg}\beta$$

$$E = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} - \text{tg}\beta$$

$$E = \text{tg}\alpha + \cancel{\text{tg}\beta} - \cancel{\text{tg}\beta}$$

$$\therefore E = \text{tg}\alpha$$ **Rpta.**

5 Si tg (37° + x) = 4, halla "tg x"

Resolución:

- De la condición tenemos:

$$\text{tg}(37° + x) = 4$$

$$\frac{\text{tg}37° + \text{tg}x}{1 - \text{tg}37°\text{tg}x} = 4$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \text{tg}x}{1 - \frac{3}{4}.\text{tg}x} = 4$$

$$\frac{3}{4} + \text{tg}x = 4 - 3\text{tg}x$$

$$4\text{tg}x = \frac{13}{4}$$

$$\therefore \text{tg}x = \frac{13}{16}$$ **Rpta.**

6 Sabiendo que: $\text{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2};\ \alpha \in \text{IIC}$

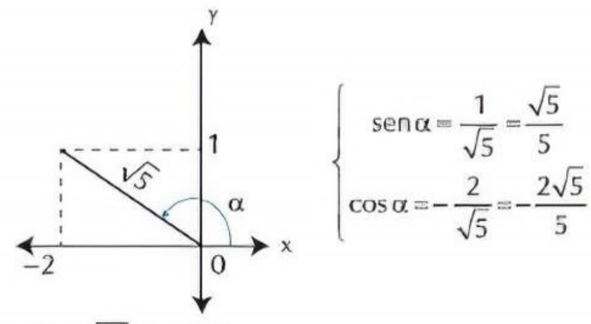
$$\sec\beta = \sqrt{10};\ \beta \in \text{IV C}$$

Calcula $\text{sen}(\alpha - \beta)$

Resolución:

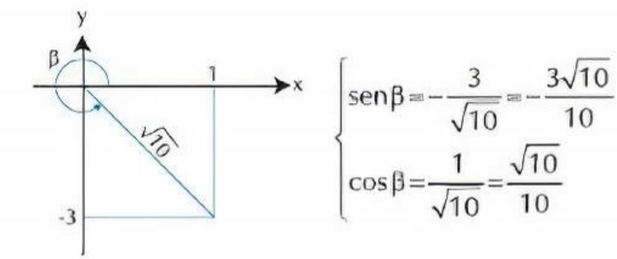
- A partir de las condiciones tenemos:

i) $\text{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2};\ \alpha \in \text{IIC}$



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

ii) $\operatorname{Sec}\beta = \sqrt{10}; \beta \in \text{IVC}$



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

- Reemplazando en lo pedido:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{5\sqrt{2}}{50} - \frac{6\cdot5\sqrt{2}}{50}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{10} = \frac{-5\sqrt{2}}{10}$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$ **Rpta.**

7 Siendo

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{1}{2};\ \operatorname{tg}(\beta+\theta) = \frac{1}{3}$$

Halla tg $(\alpha+\theta)$

Resolución:

- Observamos que: $\alpha+\theta = (\alpha-\beta)+(\beta+\theta)$
- Luego, tomamos "tg" a ambos miembros de la igualdad:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \operatorname{tg}[(\alpha-\beta)+(\theta+\beta)]$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta+\theta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha-\beta).\operatorname{tg}(\beta+\theta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{\cancel{6}}}{\frac{5}{\cancel{6}}}$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}(\alpha+\theta) = 1$$ **Rpta.**

8 Si se cumple que:

cos (x – y) = 5 Cos (x + y), halla el valor de:

E= tg x . tg y

Resolución:

- Trabajando en la condición tenemos:

cos (x – y) = 5 cos (x + y)

cos x cos y + sen x . sen y = 5 [cos x . cos y / sen x . sen y]

cos x cos y + sen x . sen y = 5 cos x . cos y – 5 sen x . sen y

- Trasponiendo términos:

6 sen x . sen y = 4 cos x cos y

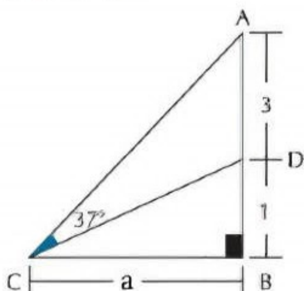
$$\frac{\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y}{\cos x\cdot\cos y} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y} = \frac{2}{3}$$

$$\underbrace{\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y}_{} = \frac{2}{3}$$

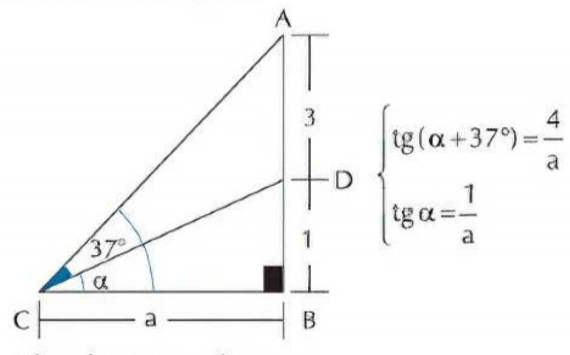
$$\therefore\ E = \frac{2}{3}$$ **Rpta.**

9 Del gráfico, halla: "a"



Resolución:

- Analizando la figura:



$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha+37°) = \frac{4}{a} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{a} \end{cases}$$

- Además se cumple que:

$$\operatorname{tg}(\alpha+37°) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}37°}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}37°}$$

- Reemplazando: $\frac{4}{a} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{a}\cdot\frac{3}{4}}$

$$\frac{4}{a}=\frac{\frac{4+3a}{4a}}{\frac{4a-3}{4a}}$$

$$\frac{4}{a}=\frac{4+3a}{4a-3}$$

$$16a-12=4a+3a^2$$

$$3a^2-12a+12=0$$

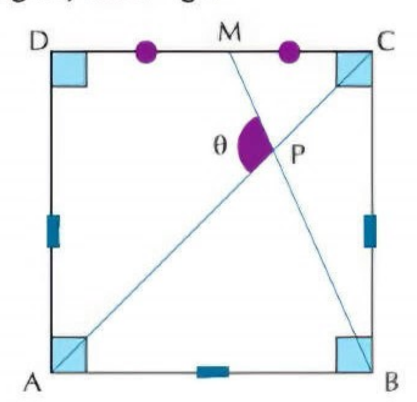
$$\underbrace{a^2-4a+a=0}$$

$$(a-2)^2=0$$

$$a-2=0$$

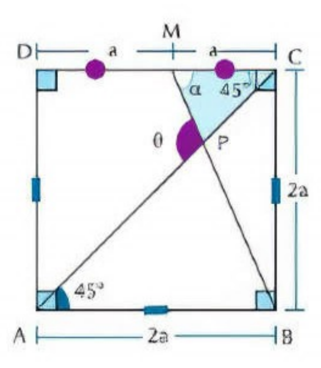
$\therefore$ $a = 2$ **Rpta.**

10 En la figura, halla: "tg θ"



Resolución:

- Analizando la figura:



i) AC: diagonal del cuadrado

$\therefore\ m\measuredangle ACD=45°$

ii) En el ◺ MCB: $tg\,\alpha=\frac{2a}{a}\rightarrow tg\,\alpha=2$

iii) En el ◢ MPC: $\theta=\alpha+45°$ (∢ exterior)

- Tomamos "tg" a ambos miembros de esta última igualdad:

$$tg\,\theta=tg(\alpha+45°)$$

$$tg\,\theta=\frac{tg\,\alpha+tg\,45°}{1-tg\,\alpha.tg\,45°}$$

- Reemplazando: $tg\,\theta=\frac{2+1}{1-2\cdot 1}=\frac{3}{-1}$

$\therefore$ $tg\,\theta=-3$ **Rpta.**

Ejercicios resueltos

Sobre funciones trigonométricas de ángulos compuestos

1 Calcula el valor de:

$A=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2$ si $\alpha-\beta=120°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

Efectuando:

$A=\cos\alpha^2-2\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta$

$A=(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta)-2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)$

Según datos $\alpha-\beta=120°$, luego:

$A=2-2\cos 120°=2-2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$A = 3$ **Rpta.** C

2 Reducir: $J = 5\operatorname{sen}(37°+x)-3\cos x$

A) 3cosx B) 2senx C) 5cosx D) 4 senx E) 1

Resolución:

- Aplicando sen (a + b) = sen a · cos b + cos a · sen b

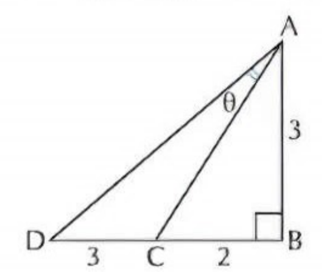
$J = 5[\operatorname{sen} 37°\cos x+\cos 37°\cdot\operatorname{sen} x]-3\cos x$

$J=5\left(\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\operatorname{sen}x\right)-3\cos x$

$J=\cancel{3\cos x}+4\operatorname{sen}x-\cancel{3\cos x}$

$\therefore$ $J = 4\operatorname{sen}x$ **Rpta.** D

3 Según el gráfico halle el valor de tg θ



A) $\frac{7}{17}$ B) $\frac{3}{13}$

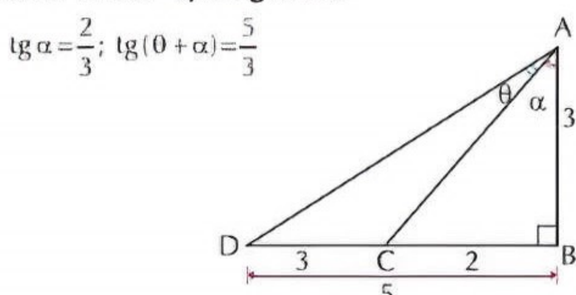
C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{3}{2}$

E) $\frac{9}{19}$

Resolución:

- Sea m∢ BAC= a; del gráfico:

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3};\ \operatorname{tg}(\theta+\alpha)=\frac{5}{3}$



Reemplazando en la identidad

$$g(\theta+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\theta.\operatorname{tg}\alpha}\rightarrow\frac{5}{3}=\frac{\operatorname{tg}\theta+\frac{2}{3}}{1-\operatorname{tg}\theta\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$5\left(1-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\theta\right)=3\left(\operatorname{tg}\theta+\frac{2}{3}\right)\rightarrow 5-\frac{10}{3}\operatorname{tg}\theta=3\operatorname{tg}\theta+2$$

$$3=\frac{19}{3}\operatorname{tg}\theta$$

$\therefore$ $\operatorname{tg}\theta=9/19$ **Rpta.** E

4 Calcula:

E= tg 20° + tg 25° + tg 20°. tg 25°

A) tg 50° B) 2 tg 25° C) 2 tg 20°
D) 1 E) 2

Resolución:

- Notamos la siguiente relación entre los ángulos:

20°+25°=45°

- Tomamos "tg" en ambos miembros de la igualdad:

$$\underbrace{\operatorname{tg}(20^\circ+25^\circ)}=\operatorname{tg}45^\circ$$

$$\frac{\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}25^\circ}{1-\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}25^\circ}=1$$

$$\underbrace{\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}25^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}25^\circ=1}$$

$\therefore$ E=1 **Rpta.** D



$\operatorname{Si}\alpha+\beta=45^\circ$; entonces:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$$

Ejemplos:

i) 18°+27°=45°; entonces:
tg 18° + tg 27° + tg 18°. tg 27° = 1

ii) 13°+32°=45°; entonces:
tg 13° + tg 32°+ tg 13° . tg 32°=1

5 Si A + B + C = 180° ; simplifica

$$R=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C}$$

A) tg A B) tg B C) tg C D) 2 E) 1

Resolución:

- A partir de la condición tenemos:

A + B + C = 180°
A + B = 180° − C

- Tomamos " tg" en ambos miembros de la igualdad:

$$\underbrace{\operatorname{tg}(A+B)}=\underbrace{\operatorname{tg}(180^\circ-C)}$$

$$\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B}=-\operatorname{tg}C$$

tg A + tg B = - tg C (1 − tg A · tg B)
tg A + tg B = - tg C + tg A · tg B · tg C

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$$

$$\underbrace{\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C}}=1$$

$\therefore$ R=1 **Rpta.** E



Si: $\alpha+\beta+\theta=180^\circ$; entonces:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\theta$$

Ejemplo:

Si $\operatorname{tg}\alpha=1;\operatorname{tg}\beta=2;\operatorname{tg}\theta=3$, calcula:
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\theta)$

Resolución:

I) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\theta=1+2+3=6$

II) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\theta=1\cdot2\cdot3=6$

Entonces se cumple que:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\theta$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\theta=180^\circ$$

Luego: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\theta)=\operatorname{tg}180^\circ$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\theta)=0$$

6 Halla " A − B" siendo:

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=A\operatorname{sen}^2\alpha+B\cos^2\beta$$

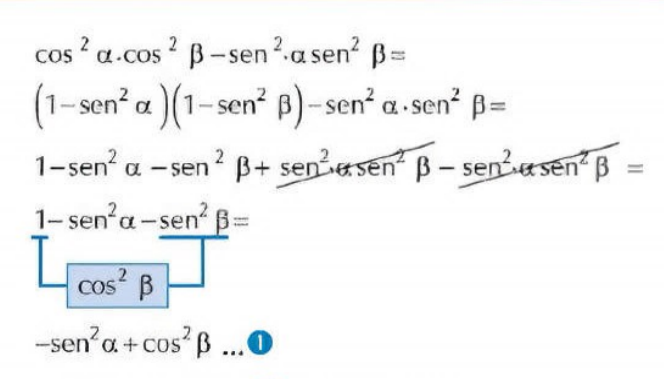
A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Resolución:

- Trabajemos en el primer miembro de la igualdad dada:

$$\underbrace{\cos(\alpha+\beta)}\ \cdot\ \underbrace{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$[\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta]\cdot[\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta]$$



$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta=$$

$$\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right)\left(1-\operatorname{sen}^2\beta\right)-\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\beta=$$

$$1-\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta+\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}-\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}=$$

$$\underbrace{1-\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta}_{\cos^2\beta}=$$

$$-\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\beta\ \ldots❶$$

- Reemplazando ❶ en la condición:

$$\underbrace{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}=A\operatorname{sen}^2\alpha+\beta\cos^2\beta$$

$$-\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\beta=A\operatorname{sen}^2\alpha+B\cos^2\beta$$

- Comparando términos:

$$\left.\begin{array}{l}A=-1\\B=1\end{array}\right\}\rightarrow\ \boxed{A-B=-2}$$ **Rpta.** A

7 Halla el valor de:

$$E=\frac{\cos 25°+\sqrt{3}\operatorname{sen}25°}{\cos 10°+\operatorname{sen}10°}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3

Resolución:

- Simplificamos el numerador de la expresión "E":

$$N=\cos 25°+\sqrt{3}\operatorname{sen}25°$$

- Multiplicamos por 1/2 ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{1}{2}N=\frac{1}{2}\cos 25°+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}25°$$

$$\frac{1}{2}N=\operatorname{sen}30°\cos 25°+\cos 30°\operatorname{sen}25°$$

$$\frac{1}{2}N=\operatorname{sen}(30°+25°)$$

$$N=2\operatorname{sen}55°\ \ldots❶$$

- Simplificamos el denominador de la expresión "E":

$$D=\cos 10°+\operatorname{sen}10°$$

- Multiplicamos por $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}D=\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos 10°+\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}\operatorname{sen}10°$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}D=\underbrace{\operatorname{sen}45°\cdot\cos 10°+\cos 45°\cdot\operatorname{sen}10°}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}D=\operatorname{sen}(45°+10°)$$

$$D=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}55°$$

$$D=\sqrt{2}\operatorname{sen}55°\ \ldots❷$$

- Reemplazamos ❶ y ❷ en la expresión "E":

$$E=\frac{2\ \cancel{\operatorname{sen}55°}}{\sqrt{2}\ \cancel{\operatorname{sen}55°}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{E=\sqrt{2}}$$ **Rpta.** C

8 A partir del gráfico, halla "tg θ"

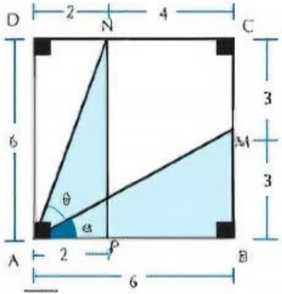
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$ D) 1

E) 2

Resolución:

- Analizamos la figura:



i) Trazamos $\overline{NP}\perp\overline{AB}$

ii) En el ⊿ ABM: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

iii) En el ⊿ APN: $\operatorname{tg}(\alpha+\theta)=\frac{6}{2}=3$

- Además se cumple que:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\theta}$$

- Reemplazando lo obtenido en ii) y iii) en esta última igualdad tenemos:

$$3=\frac{\frac{1}{2}+\operatorname{tg}\theta}{1-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\theta}$$

$$3\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\right)=\frac{1}{2}+\operatorname{tg}\theta$$

$$3-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}+\operatorname{tg}\theta$$

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\operatorname{tg}\theta\ \rightarrow\ \boxed{\operatorname{tg}\theta=1}$$ **Rpta.** D

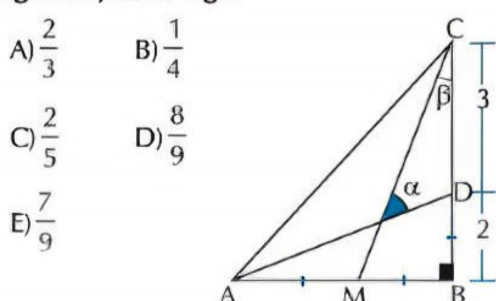


9 Del gráfico, halla "tg a"

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{8}{9}$

E) $\frac{7}{9}$



Resolución:

- Analizamos la figura

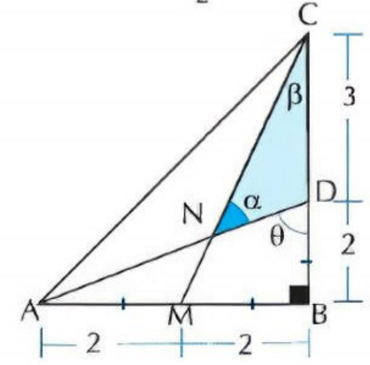
i) Sean los ángulos:

$m\sphericalangle MCB = \beta$

$m\sphericalangle ADB = \theta$

ii) En el ⊿ MBC: $tg\beta = \frac{2}{5}$

iii) en el ⊿ ABD: $tg\theta = \frac{4}{2} = 2$



- En el △ NDC se cumple: $\theta = \alpha + \beta$ (∢ exterior)

$$\alpha = \theta - \beta$$

- Tomando "tg" a ambos miembros de la igualdad:

$$tg\,\alpha = \underbrace{tg(\theta - \beta)}$$

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,\theta - tg\,\beta}{1 + tg\,\theta \cdot tg\,\beta} \;...\text{(1)}$$

- Reemplazando en 1 lo obtenido en ii) y iii) tenemos:

$$tg\,\alpha = \frac{2 - \frac{2}{5}}{1 + 2.\frac{2}{5}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{8}{\not 5}}{\frac{9}{\not 5}} \rightarrow \boxed{tg\,\alpha = \frac{8}{9}}$$ **Rpta.** D

10 Del gráfico, calcula "tg θ"

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

(Figura: θ, θ, 3, 2, 1)

Resolución:

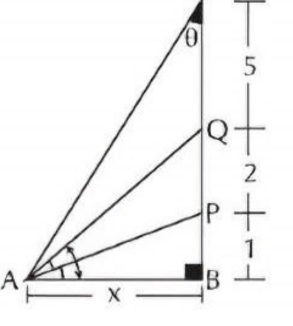
- Analizamos la figura:

i) En el ⊿ ABP: $tg\,\alpha = \frac{1}{x}$

ii) En el ⊿ ABC: $tg\,\theta = \frac{x}{6}$

iii) En el ⊿ ABQ: $tg(\alpha + \theta) = \frac{3}{x}$

- Además se cumple que:



$$tg(\alpha + \theta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\theta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\theta} \;...\text{(1)}$$

- Reemplazando i), ii) y iii) en I tenemos:

$$\frac{3}{x} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{x}{6}}{1 - \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{6}}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{\frac{6 + x^2}{6x}}{\frac{5}{6}} \rightarrow \frac{3}{x}\cdot\frac{5}{6} = \frac{6 + x^2}{6x} \rightarrow 15 = 6 + x^2$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

- Reemplazando el valor de "x" en ii) tenemos:

$$tg\,\theta = \frac{x}{6} = \frac{3}{6} \rightarrow \boxed{tg\,\theta = \frac{1}{2}}$$ **Rpta.** E

11 Si tg a y tg b son las raíces de la ecuación:

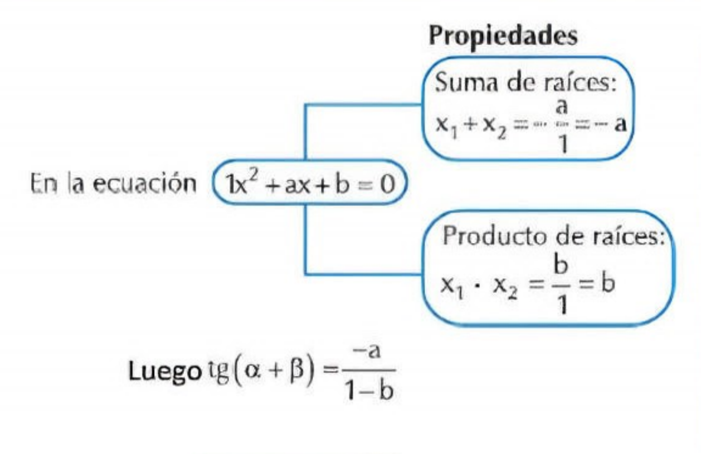
$x^2 + ax + b = 0$, calcula $tg(\alpha + \beta)$

A) $\frac{b}{a-1}$ B) $\frac{a}{b-1}$ C) $\frac{a}{1-b}$ D) $\frac{a}{b+1}$ E) $\frac{b}{1-a}$

Resolución:

- Según datos: $x_1 = tg\,\alpha$, $x_2 = tg\,\beta$ son las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$.

- $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}$



Luego $tg(\alpha + \beta) = \frac{-a}{1-b}$

$\therefore$ $tg(\alpha + \beta) = \frac{a}{b-1}$ **Rpta.** B

12 Simplificar:

$$\frac{(tg\,\alpha + tg\,\beta)(cot\,g\,\alpha + cot\,g\,\beta)}{(tg\,\alpha - cot\,\beta) + (tg\,\beta - cot\,g\,\beta)}$$

A) $tg(\alpha + \beta)$ B) $cos(\alpha + \beta)$ C) $-cot\,g(\alpha + \beta)$

D) $-tg(\alpha + \beta)$ E) 1

Resolución:

- La expresión dada se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{(tg\,\alpha + tg\beta).\left(\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg\beta}\right)}{\left(tg\,\alpha - \frac{1}{tg\,\alpha}\right) + \left(tg\beta - \frac{1}{tg\beta}\right)} = \frac{(tg\alpha + tg\beta).\left(\frac{tg\beta + tg\alpha}{tg\alpha.tg\beta}\right)}{\left(\frac{tg^2\alpha - 1}{tg\alpha}\right) + \left(\frac{tg^2\beta - 1}{tg\beta}\right)}$$

- Operamos a los términos del denominador de esta última fracción, y simplificamos; veamos:

$$\frac{(tg\alpha + tg\beta).\left(\frac{tg\beta + tg\alpha}{tg\alpha.tg\beta}\right)}{\left(\frac{tg\beta(tg^2\alpha - 1) + tg\alpha(tg^2\beta - 1)}{tg\alpha.tg\beta}\right)} = \frac{(tg\alpha + tg\beta)^2}{tg^2\alpha.tg\beta - tg\beta + tg\alpha.tg^2\beta - tg\alpha}$$

- En el denominador de esta última expresión factorizamos:

$$\frac{(tg\alpha + tg\beta)^2}{tg\alpha.tg\beta(tg\alpha + tg\beta) - (tg\alpha + tg\beta)} = \frac{(tg\alpha + tg\beta)^2}{(tg\alpha + tg\beta)\,(tg\alpha.tg\beta - 1)}$$

$$= \frac{(tg\alpha + tg\beta)}{[tg\alpha.tg\beta - 1]} = \frac{-(tg\alpha + tg\beta)}{(1 - tg\alpha.tg\beta)}$$

$= -tg(\alpha + \beta)$ **Rpta.** D

Funciones Trigonométricas de Ángulos Múltiples

Funciones trigonométricas del ángulo doble

Si en las identidades del capítulo anterior, o sea, sen $(\alpha + \beta)$, cos $(\alpha + \beta)$ y tg $(\alpha + \beta)$, se hace: $\beta = \alpha$, se obtienen identidades para: sen 2α, cos 2α y tg 2α.

Por ejemplo:

De la fórmula

- sen $(\alpha + \beta)$ = sen α cos β + cos α sen β

Para: $\beta = \alpha$, obtenemos:

sen $(\alpha + \alpha)$ = sen α cos α + cos α sen α

$\therefore$ sen 2α = 2 sen $\alpha \cdot$ cos α **(Fórmula 1)**

De la fórmula

- cos $(\alpha + \beta)$ = cos α cos β – sen α sen β

Para: $\beta = \alpha$, obtenemos:

cos $(\alpha + \alpha)$ = cos α cos α – sen α sen α

$\therefore$ cos 2α = $cos^2\alpha - sen^2\alpha$ **(Fórmula 2)**

Por identidad pitagórica:

I) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

II) $sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$

Reemplazamos (I) y (II) en la fórmula 2:

- $cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$cos\,2\alpha = (1 - sen^2\alpha) - sen^2\alpha$

$cos\,2\alpha = 1 - 2\,sen^2\alpha$ **(Fórmula)**

- $cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - (1 - cos^2\alpha)$

$cos\,2\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1$ **(Fórmula)**

De la fórmula

- $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Para: $\beta=\alpha$, obtenemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}\quad \textbf{(Fórmula 3)}$$

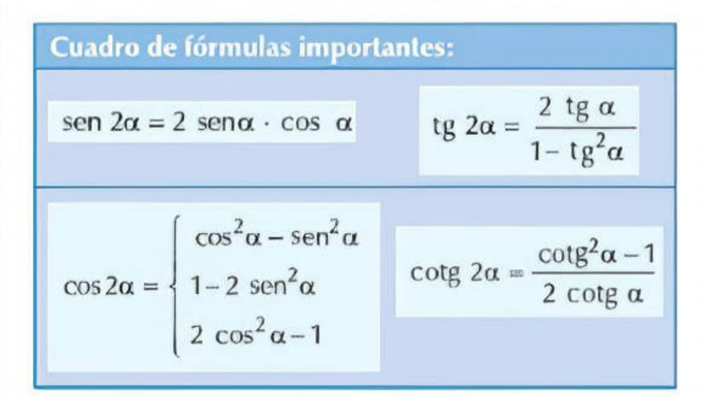
De la fórmula

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}$$

- Para: $\beta=\alpha$, obtenemos:

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}}\quad \textbf{(Fórmula 4)}$$



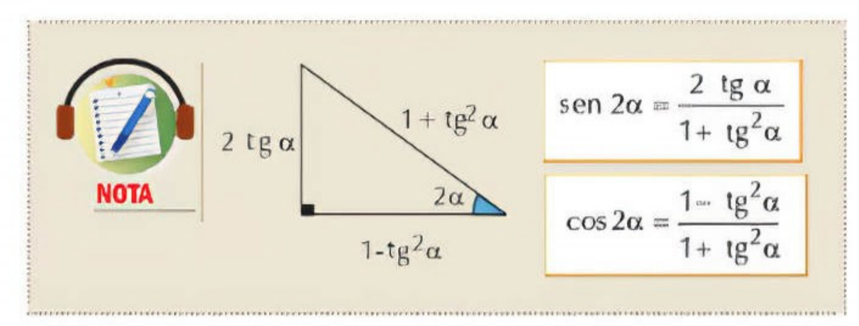
Cuadro de fórmulas importantes:

$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\cos2\alpha=\begin{cases}\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\\ 1-2\operatorname{sen}^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\end{cases}$

$\operatorname{cotg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$



$\operatorname{sen}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\cos2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

Ejercicios resueltos

1 Sabiendo que: $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{12}{13}$, calcula: "sen 2α"

Resolución:

- A partir del dato: $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{12}{13}\rightarrow\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$

Por el teorema de Pitágoras, calculamos el valor de "x".

$12^2+x^2=13^2$

$144+x^2=169$

$x^2=25$

$\boxed{x=5}$

- Nos piden:

$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

$\operatorname{sen}2\alpha=2\;\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{5}{13}$

$\therefore\;\boxed{\operatorname{sen}2\alpha=\dfrac{120}{169}}$

2 Siendo $\cos\theta=\dfrac{15}{17}$, calcula "cos 2θ".

Resolución:

- Aplicamos la siguiente relación:

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$

$\cos2\theta=2\left(\dfrac{15}{17}\right)^2-1$

$\cos2\theta=\dfrac{450}{289}-1\rightarrow\;\therefore\;\boxed{\cos2\theta=\dfrac{161}{289}}$

4 Calcula el valor de "tg 2x", siendo $\operatorname{tg}x=\sqrt{2}$.

Resolución:

- Tenemos que: $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$

- Reemplazando el dato: $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2(\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{1-2}$

$\therefore\;\boxed{\operatorname{tg}2x=-2\sqrt{2}}$

4 Si $\operatorname{sen} A + \cos A = \frac{1}{3}$, halla el valor de "sen 2A"

Resolución:

- En la condición, elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\underbrace{(\operatorname{sen} A + \cos A)^2}_{} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 A + 2 \operatorname{sen} A \cdot \cos A + \cos^2 A = \frac{1}{9}$$



- $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$
- $2 \operatorname{sen} A \cdot \cos A = \operatorname{sen} 2A$

- Luego: $1 + \operatorname{sen} 2A = \frac{1}{9}$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} 2A = -\frac{8}{9}$$

5 Simplifica la expresión:

$$K = \cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta$$

Resolución:

- Factorizamos la expresión "K" por diferencia de cuadrados:

$$K = \cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta$$

$$K = \underbrace{\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)}_{1}\underbrace{\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)}_{\cos 2\theta}$$

$$\therefore \quad K = \cos 2\theta$$

6 Si tg x + cotg x = 5, halla el valor de "cosec 2x"

Resolución:

- Recordemos la identidad auxiliar:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

- Reemplazando en la condición:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 5$$

$$\sec x \cdot \operatorname{cosec} x = 5$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 5$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = 5$$

- Multiplicando (x2) el denominador de ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{1}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{5}{2}$$

- Pero: $2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x$

- Luego: $\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{5}{2}$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} 2x = \frac{5}{2}$$

7 Simplifica: $E = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

Resolución:

- Recordemos que: $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

- Reemplazando en la expresión a simplificar tenemos:

$$E = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)}$$

$$E = \frac{\cancel{2} \cancel{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos \alpha}{\cancel{2} \cancel{\operatorname{sen}^2 \alpha}} \rightarrow E = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \rightarrow E = \operatorname{cotg} \alpha$$

Ejercicios resueltos

Sobre funciones trigonométricas de ángulos doble

1 Simplifica: $E=\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

A) cotg x B) tg x C) tg^2x
D) $cotg^2x$ E) tg 2x

Resolución:

- Tenemos que:

$$\cos 2x=2\cos^2x-1 \rightarrow 1+\cos 2x=2\cos^2x$$

$$\cos 2x=1-2\,sen^2x \rightarrow 1-\cos 2x=2\,sen^2x$$

- Reemplazando en la expresión pedida:

$$E=\frac{\cancel{2}\cos^2x}{\cancel{2}\,sen^2x}=\frac{\cos^2x}{sen^2x}$$

$\therefore$ $E=cotg^2x$ **Rpta. D**

2 Reduce la expresión:

$$A = tg\,(45° + x) + tg\,(45° - x)$$

A) 2 cosec 2x B) 2 sec 2x C) 2 tg 2x
D) 2 cotg 2x E) tg 2x

Resolución:

- Desarrollando cada término de la expresión tenemos:

$$A=\frac{tg\,45°+tg\,x}{1-tg\,45°\cdot tg\,x}+\frac{tg\,45°-tg\,x}{1+tg\,45°\cdot tg\,x}$$

$$A=\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}+\frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$$

$$A=\frac{(1+tg\,x)^2+(1-tg\,x)^2}{(1-tg\,x)(1+tg\,x)}$$

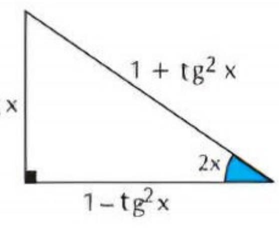


- $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
- $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

$$A=\frac{2\left(1+tg^2x\right)}{1-tg^2x}\quad\cdot\quad A=2\ \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}\ \cdots\ (1)$$

- Tenemos que:

$$sec\,2x=\frac{1+\ g^2x}{1-\ g^2x}\rightarrow$$



- Reemplazando en (1) : $A=2\,(sec\,2x)$

$\therefore$ $A=2\,sec\,2x$ **Rpta. B**

3 Simplifica la expresión:

$$N=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha$$

A) $\dfrac{sen\,8\alpha}{8\,sen\,\alpha}$ B) $\dfrac{\cos 8\alpha}{8\cos\alpha}$ C) $\dfrac{sen\,6\alpha}{6\,sen\,\alpha}$

D) $\dfrac{\cos 6\alpha}{6\cos\alpha}$ E) $\dfrac{sen\,4\alpha}{4\,sen\,\alpha}$

Resolución:

- Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por "2 sen α"

$$2\,sen\,\alpha\cdot N=\underbrace{2\,sen\alpha\cdot\cos\alpha}\ \cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha$$

$$2\,sen\alpha\ N=sen 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha$$

- Multiplicamos por "2" ambos miembros de esta última igualdad:

$$2\cdot 2\,sen\alpha\cdot N=\underbrace{2\,sen 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}\cdot\cos 4\alpha$$

$$4\,sen\,\alpha\cdot N=\ sen\,4\alpha\ \cdot\ \cos 4\alpha$$

- Multiplicando una vez más por "2" ambos miembros de la igualdad:

$$2\cdot 4\,sen\alpha\cdot N=2\cdot sen\,4\alpha\cdot\cos 4\alpha$$

$$8\,sen\alpha\cdot N=sen\,8\alpha$$

$\therefore$ $N=\dfrac{sen\,8\alpha}{8\,sen\,\alpha}$ **Rpta. A**

4 Si se cumple que:

$$f(x)=sen\,x\cdot\cos^3x-\cos x\cdot sen^3x\,,$$

calcula el valor de: $f\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$

A) $\dfrac{\sqrt2}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt2}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt2}{8}$ D) $\dfrac{1}{8}$ E) $\dfrac{1}{2}$

Resolución:

- Simplificando la expresión dada tenemos:

$$f(x)=sen\,x\cdot\cos^3x-\cos x\cdot sen^3x$$

$$f(x)=sen x\cdot\cos x\,\underbrace{\left[\cos^2x-sen^2x\right]}_{\cos 2x}$$

$$f(x)=\frac{\overbrace{2\,\text{sen}x\cdot\cos x}^{\text{sen }2x}}{2}\left[\cos 2x\right]$$

$$f(x)=\frac{\text{sen}2x\cdot\cos 2x}{2}$$

$$f(x)=\frac{\overbrace{2\,\text{sen}2x\cdot\cos 2x}^{\text{Sen }4x}}{2\cdot 2}$$

$$f(x)=\frac{\text{sen}4x}{4}$$

- Calculamos lo pedido:

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\text{sen}\left[4\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\text{sen}\frac{\pi}{4}}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}$$

$$\therefore\ \boxed{f\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}}$$ **Rpta. C**

5 Simplifica la expresión:

$$M=\frac{\text{cotg}^2 2x-1}{\text{cotg}^2 2x+1}$$

A) cos 2x B) cos 4x C) sen 4x
D) sec 4 x E) sec 2x

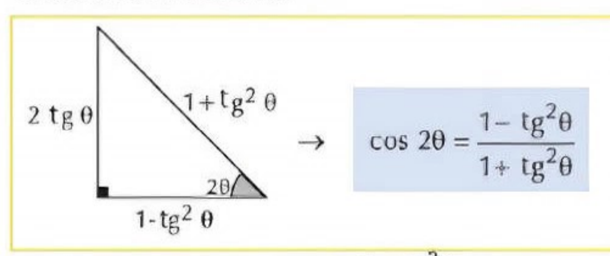
Resolución:

- Expresando "M" en términos de "tg 2x" tenemos:

$$M=\frac{\frac{1}{\text{tg}^2 2x}-1}{\frac{1}{\text{tg}^2 2x}+1}=\frac{\frac{1-\text{tg}^2 2x}{\text{tg}^2 2x}}{\frac{1+\text{tg}^2 2x}{\text{tg}^2 2x}}$$

$$M=\frac{1-\text{tg}^2 2x}{1+\text{tg}^2 2x}\quad ...❶$$

- Recordemos además:



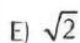
- Reemplazando en ❶ $:M=\frac{1-\text{tg}^2 2x}{1+\text{tg}^2 2x}=\cos 2(2x)$

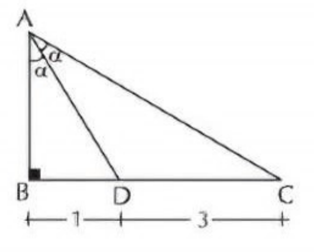
$$\boxed{M=\cos 4x}$$ **Rpta. B**

6 De la figura, halla "cotg α"

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

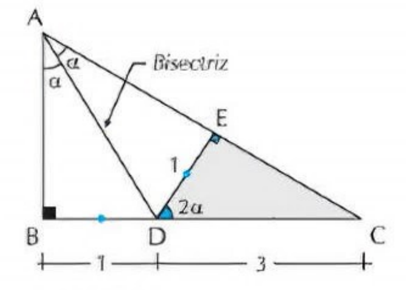
C) $\frac{1}{2}$ D) 2

E)  $\sqrt{2}$



Resolución:

- Analizando la figura:



i) Trazamos $\overline{DE}\perp\overline{AC}$:

$\rightarrow$ BD = DE (prop. bisectriz)

$\therefore\ \boxed{DE=1}$

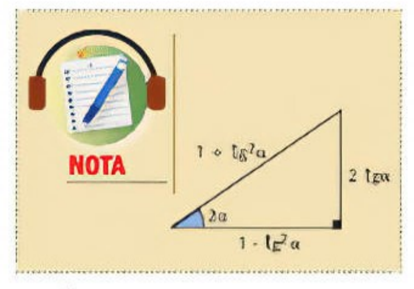
ii) En el ⊿ ABC: $m\angle C=90°-2\alpha$

En el ⊿ DEC: $m\angle D=90°-m\angle C$

$m\angle D=90°-(90°-2\alpha)$

$\boxed{m\angle D=2\alpha}$

- En el ⊿ DEC:



$$\sec 2\alpha=3$$

$$\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=3$$

$$1+\text{tg}^2\alpha=3-3\,\text{tg}^2\alpha$$

$$4\,\text{tg}^2\alpha=2\ \rightarrow\ \text{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \boxed{\text{cotg }\alpha=\sqrt{2}}$$ **Rpta. E**

7 Si se cumple que:

$$2\cos^2 44°-(\text{sen }44°-\cos 44°)^2=a,$$

halla el valor de: sen 4°

A) 2a + 1 B) 2a – 1 C) a^2-1
D) a^2+1 E) $1-a^2$

Resolución:

- En la condición tenemos:

$$2\cos^2 44° - (\underbrace{\text{sen}^2 44°}_{} - \underbrace{2\ \text{sen}44°\cdot\cos 44°}_{\text{sen } 88°} + \underbrace{\cos^2 44°}_{}) = a$$

(1)

$$2\cos^2 44° - (1 - \text{sen } 88°) = a$$

$$\underbrace{2\cos^2 44° - 1}_{\cos 88°} + \text{sen } 88° = a$$

$$\underbrace{\cos 88°}_{} + \underbrace{\text{sen } 88°}_{} = a$$

$$\text{sen } 2° + \cos 2° = a$$

- Elevamos al cuadrado ambos miembros de esta última igualdad:

$$(\text{sen } 2° + \cos 2°)^2 = (a)^2$$

$$\underbrace{\text{sen}^2 2°}_{} + \underbrace{2\ \text{sen } 2°\cdot\cos 2°}_{\text{en } 4°} + \underbrace{\cos^2 2°}_{} = a^2$$

(1)

$$1 + \text{sen } 4° = a^2$$

$$\therefore\ \boxed{\text{sen } 4° = a^2 - 1}$$ **Rpta. C**

8 Si $4tg^2x + 7\ tg\ x - 4 = 0$, halla el valor de: "tg 2x"

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{8}{7}$

Resolución:

- Trabajamos la condición:

$$4\ tg^2x + 7\ tg\ x - 4 = 0$$

$$7\ tg\ x = 4 - 4\ tg^2x$$

$$7\ tg\ x = 4(1 - tg^2x)$$

$$\frac{tg\,x}{1 - tg^2x} = \frac{4}{7}$$

- Multiplicación (x2) ambos miembros de la igualdad:

$$2\left[\frac{tg\,x}{1 - tg^2x}\right] = 2\left[\frac{4}{7}\right]$$

$$\boxed{\frac{2\ tg\,x}{1 - tg^2x}} = \frac{8}{7} \rightarrow \boxed{tg\ 2x = \frac{8}{7}}$$ **Rpta. E**

9 Simplifica $A = \dfrac{\text{sen } 2\theta + \text{sen } \theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta}$

A) tg 2θ B) cotg2θ C) tg θ
D) cotg θ E) 2 tg θ

Resolución:

- Sabemos que:
  - $\text{sen } 2\theta = 2\ \text{sen } \theta\ \cos\theta$
  - $\cos 2\theta = 2\ \cos^2\theta - 1$

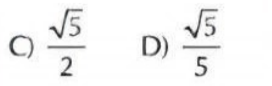
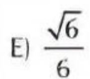
- Reemplazando en la igualdad pedida:

$$A = \frac{\text{sen } 2\theta + \text{sen } \theta}{1 + \cos\theta + \cos 2\theta}$$

$$A = \frac{2\ \text{sen } \theta\ \cos\theta + \text{sen } \theta}{1 + \cos\theta + 2\ \cos^2\theta - 1}$$

$$A = \frac{\text{sen } \theta(2\ \cos\theta + 1)}{\cos\theta(1 + 2\ \cos\theta)} \rightarrow \boxed{A = tg\ \theta}$$ **Rpta. C**

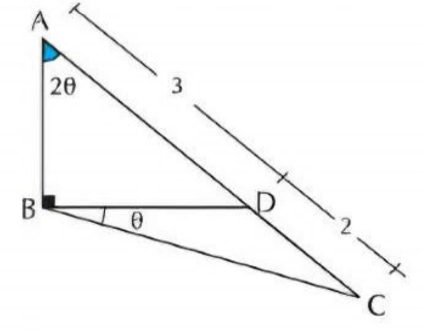
10 A partir de la figura, halla el valor de "tg θ"

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

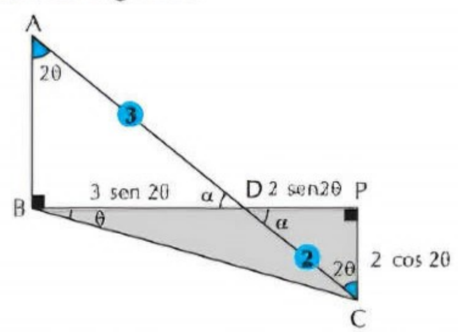
C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

E) $\frac{\sqrt{6}}{6}$



Resolución:

- Analizamos el gráfico:



i) Prolongamos BD hasta un punto "P" tal que: $\overline{BP} \perp \overline{CP}$.

ii) En el ◺ ABD: $\text{sen } 2\theta = \dfrac{BD}{3} \rightarrow BD = 3\ \text{sen } 2\theta$

iii) En el ◺ DPC: $\text{sen } 2\theta = \dfrac{DP}{2} \rightarrow DP = 2\ \text{sen } 2\theta$

$$\cos 2\theta = \frac{PC}{2} \rightarrow PC = 2\ \cos 2\theta$$

- En el ◺ BPC:

$$tg\ \theta = \frac{CP}{BP} = \frac{2\ \cos 2\theta}{3\ \text{sen}2\theta + 2\ \text{sen } 2\theta}$$

$$tg\ \theta = \frac{2\ \cos 2\theta}{5\ \text{sen}2\theta} \rightarrow tg\ \theta\cdot\frac{\text{sen } 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2}{5}$$

$$tg\ \theta\cdot tg\ 2\theta = \frac{2}{5} \rightarrow tg\ \theta\cdot\frac{2\ tg\ \theta}{1 - tg^2\theta} = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2\ tg^2\theta}{1 - tg^2\theta} = \frac{2}{5}$$

$$5\ tg^2\theta = 1 - tg^2\theta \rightarrow 6\ tg^2\theta = 1 \rightarrow \boxed{tg\ \theta = \frac{\sqrt{6}}{6}}$$ **Rpta. E**

Funciones trigonométricas del ángulo triple

Seno del ángulo triple: "sen 3A"

$\text{sen } 3A = \text{sen }(2A + A)$

$\text{sen } 3A = \text{sen } 2A \cdot \cos A + \cos 2A \text{ sen } A$

$\text{sen } 3A = 2 \text{ sen } A \cos A \cdot \cos A + (1 - 2 \text{ sen}^2 A) \text{ sen } A$

$\text{sen } 3A = 2 \text{ sen } A \cos^2 A + \text{sen } A - 2 \text{ sen}^3 A;$

Pero: $\cos^2 A = 1 - \text{sen}^2 A$

$\text{sen } 3A = 2 \text{ sen } A (1 - \text{sen}^2 A) + \text{sen } A - 2 \text{ sen}^3 A$

$\text{sen } 3A = 2 \text{ sen } A - 2 \text{ sen}^3 A + \text{sen } A - 2 \text{ sen}^3 A$

$\text{sen } 3A = 3 \text{ sen } A - 4 \text{ sen}^3 A$ **(Fórmula)**

Coseno del ángulo triple: "cos 3A"

$\cos 3A = \cos (2A + A)$

$\cos 3A = \cos 2A \cdot \cos A - \text{sen } 2A \cdot \text{sen } A$

$\cos 3A = \cos 2A \cdot \cos A \cdot \cos A - (2 \text{ sen } A \cdot \cos A) \text{ sen } A$

$\cos 3A = (2 \cos^2 A - 1) \cos A - (2 \text{ sen } A \cdot \cos A) \text{ sen } A$

$\cos 3A = 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \text{ sen}^2 A \cdot \cos A$

$\cos 3A = 2 \cos^3 A - \cos A - 2 (1 - \cos^2 A) \cos A$

$\cos 3A = 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A + 2 \cos^3 A$

$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ **(Fórmula)**

Trangente del ángulo triple: "tg 3A"

De las fórmulas: $\text{sen } 3A = 3 \text{ sen } A - 4 \text{ sen}^3 A$; $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

Dividimos miembro a miembro:

$$\frac{\text{sen}3A}{\cos 3A} = \frac{3 \text{ sen } A - 4 \text{ sen}^3 A}{4 \cos^3 A - 3 \cos A} = \frac{3 \text{ sen}A - 3 \text{ sen}^3 A - \text{sen}^3 A}{\cos^3 A + 3 \cos^3 A - 3 \cos A} = \frac{3 \text{ sen}A (1 - \text{sen}^2 A) - \text{sen}^3 A}{\cos^3 A - 3 \cos A (1 - \cos^2 A)} = \frac{3 \text{ sen}A \cdot \cos^2 A - \text{sen}^3 A}{\cos^3 A - 3 \cos A \cdot \text{sen}^2 A}$$

Dividimos a cada término del numerador y denominador entre "cos³ A" obteniendo:

$$\text{tg} = \frac{\left(\frac{3 \text{ sen } A \cos^2 A}{\cos^3 A} - \frac{\text{sen}^3 A}{\cos^3 A}\right)}{\left(\frac{\cos^3 A}{\cos^3 A} - \frac{3 \cos A \text{ sen}^2 A}{\cos^3 A}\right)} = \frac{3 \frac{\text{sen } A}{\cos A} - \text{tg}^3 A}{1 - \frac{3 \text{ sen}^2 A}{\cos^2 A}}$$

Simplificando, obtenemos: $\therefore$ $\text{tg } 3A = \dfrac{3 \text{ tg } A - \text{tg}^3 A}{1 - 3 \text{ tg}^2 A}$ **(Fórmula)**

Cuadro de fórmulas importantes:

$\text{sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha$

$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

$\text{tg } 3\alpha = \dfrac{3 \text{ tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \text{ tg}^2 \alpha}$

$\text{cotg } 3\alpha = \dfrac{3 \text{ cotg } \alpha - \text{cotg}^3 \alpha}{1 - 3 \text{ cotg}^2 \alpha}$

$\text{sen } 3\alpha = 4 \text{ sen } \alpha \cdot \text{sen } (60° - \alpha) \cdot \text{sen } (60° + \alpha)$

$\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cdot \cos (60° - \alpha) \cdot \cos (60° + \alpha)$

$\text{tg } 3\alpha = \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } (60° - \alpha) \cdot \text{tg } (60° + \alpha)$

$\dfrac{\text{sen } 3\alpha}{\text{sen } \alpha} = 2 \cos 2\alpha + 1$

$\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos 2\alpha - 1$

Ejercicios resueltos

1 Sabiendo que: $\text{sen } x = \frac{1}{4}$, calcula: "sen 3x"

Resolución:

- Nos piden calcular:

$$\text{sen } 3x = 3\ \text{sen } x - 4\ \text{sen}^3 x$$

$$\text{sen } 3x = 3\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

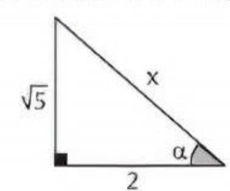
$$\text{sen } 3x = \frac{3}{4} - \frac{1}{16}$$

$$\therefore\ \text{sen } 3x = \frac{11}{16}$$

2 Si $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, calcula "cos 3α"

Resolución:

- A partir del dato tenemos: $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$
- Por el teorema de Pitágoras, calculamos el valor de "x".



$$x^2 = \sqrt{5}^2 + 2^2$$

$$x^2 = 5 + 4$$

$$x = 3$$

- Nos piden:

$$\cos 3\alpha = 4\ \cos^3\alpha - 3\ \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\cos 3\alpha = \frac{32}{27} - 2$$

$$\therefore\ \cos 3\alpha = -\frac{22}{27}$$

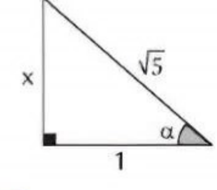
3 Si $\sec \alpha = \sqrt{5}$, calcula "tg 3α"

Resolución:

- A partir del dato se tiene:

$$\sec \alpha = \sqrt{5} \rightarrow \text{tg } \alpha = 2$$

- Por el teorema de Pitágoras, calculamos el valor de "x".



$$x^2 + 1^2 = \sqrt{5}^2$$

$$x^2 + 1 = 5$$

$$x = 2$$

- Nos piden:

$$\text{tg } 3\alpha = \frac{3\ \text{tg } \alpha - \text{tg}^3\alpha}{1 - 3\ \text{tg}^2\alpha}$$

$$\text{tg } 3\alpha = \frac{3(2) - (2)^3}{1 - 3(2)^2}$$

$$\text{tg } 3\alpha = \frac{6 - 8}{1 - 12}$$

$$\therefore\ \text{tg } 3\alpha = \frac{2}{11}$$

4 Calcula el valor de: sen 111°.

Resolución:

- Notamos que: $111° = 3 \cdot 37°$
- Tomamos "sen" a ambos miembros de la igualdad:

$$\text{sen } 111° = \underbrace{\text{sen } (3 \cdot 37°)}$$

$$\text{sen } 111° = 3\ \text{sen } 37° - 4\ \text{sen}^3 37°$$

$$\text{sen } 111° = 3\left(\frac{3}{5}\right) - 4\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$\text{sen } 111° = \frac{9}{5} - \frac{108}{125}$$

$$\therefore\ \text{sen } 111° = \frac{117}{125}$$

5 Calcula el valor de:

$$E = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$$

Resolución:

- Recordemos que:

$$\cos x \cdot \cos(60° - x) \cdot \cos(60° + x) = \frac{\cos 3x}{4}$$

- Escribiendo convenientemente la expresión pedida tenemos:

$$E = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$$

$$E = \cos 20° \cdot \cos(60° - 20°) \cdot \cos(60° + 20°)$$

$$E = \frac{\cos(3 \cdot 20°)}{4} = \frac{\cos 60°}{4} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{4}$$

$$\therefore\ E = \frac{1}{8}$$

6 Simplifica: $K = \frac{\text{sen } 21°}{\text{sen } 7°} - \frac{\cos 21°}{\cos 7°}$

Resolución:

- Recordemos que:

$$\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} = 2\cos 2x + 1$$

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = 2\cos 2x - 1$$

- Aplicando en la expresión pedida:

$$K = \frac{\text{sen}\,21°}{\text{sen}\,7°} - \frac{\cos 21°}{\cos 7°}$$

$$K = [2\cos(2\cdot 7°) + 1 - 2\cos(2\cdot 7°) - 1]$$

$$K = 2\cos 14° + 1 - 2\cos 14° + 1$$

$$\therefore\ K = 2$$

7 Simplifica: $A = \dfrac{\text{sen}\,3x + \text{sen}^3x}{\cos^3x - \cos 3x}$

Resolución:

- Recordemos que: $\text{sen}\,3x = 3\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3x$

$$\cos 3x = 4\cos^3x - 3\cos x$$

- Reemplazando en la expresión pedida tenemos:

$$A = \frac{(3\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3x) + \text{sen}^3x}{\cos^3x - (4\cos^3x - 3\cos x)}$$

$$A = \frac{3\,\text{sen}\,x - 3\,\text{sen}^3x}{3\cos x - 3\cos^3x} \to A = \frac{3\,\text{sen}\,x(1-\text{sen}^2x)}{3\cos x(1-\cos^2x)}$$

$$A = \frac{\text{sen}\,x\cdot\cos^2x}{\cos x\cdot\text{sen}^2x} \to A = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} \to A = \text{cotg}\,x$$

8 Halla "n" para que la expresión dada sea una identidad:

$$\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = n\cos 2x$$

Resolución:

- Trabajando el primer miembro de la igualdad y reemplazamos las equivalencias conocidas, obtenemos:

$$\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = n\cos 2x$$

$$2\cos 2x + 1 + 2\cos 2x - 1 = n\cos 2x$$

$$4\cos 2x = n\cos 2x$$

- Comparando términos: → $n = 4$

Probemas resueltos

Sobre funciones trigonométricas de ángulos triple

1 Si se cumple que:

$$\text{tg}^3x - 6\,\text{tg}^2x - 3\,\text{tg}\,x + 2 = 0,$$

halla el valor de: "tg 3x"

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución:

- Dándole forma conveniente a la condición tenemos:

$$\text{tg}^3x - 6\,\text{tg}^2x - 3\,\text{tg}x + 2 = 0$$

$$2 - 6\,\text{tg}^2x = 3\,\text{tg}\,x - \text{tg}^3x$$

$$2(1 - 3\,\text{tg}^2x) = 3\,\text{tg}\,x - \text{tg}^3x$$

$$2 = \frac{3\,\text{tg}\,x - \text{tg}^3x}{1 - 3\,\text{tg}^2x}$$

tg 3x

$$\therefore\ \text{tg}\,3x = 2$$ **Rpta. B**

2 Calcula el valor de:

$$K = 8\,\text{sen}^3 70° - 6\,\text{sen}\,70°$$

A) −1 B) 0 C) 1 D) $-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

Resolución:

- Escribimos convenientemente la expresión a reducir:

$$K = 8\,\text{sen}^3 70° - 6\,\text{sen}\,70°$$

$$K = -2\underbrace{(3\,\text{sen}\,70° - 4\,\text{sen}^3 70°)}_{\text{sen}(3\cdot 70°)}$$



Usamos la identidad:
$\text{sen}\,3\alpha = 3\,\text{sen}\,\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha$

$$K = -2\,\text{sen}\,210° \quad \text{...①}$$

- Pero: $\text{sen}\,210° = \text{sen}(180° + 30°) = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}$ ($\in$ IIIC, −)

- Reemplazando en ❶ :

$$K = -2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \; K = 1$$ **Rpta. C**

3 A partir del gráfico, halla: "x".

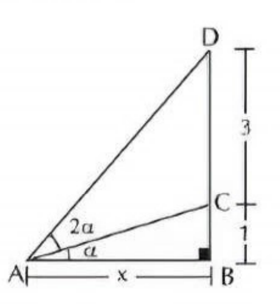
A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{7}$

E) $\sqrt{11}$



Resolución:

- Del gráfico tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} &\text{En el } \triangle ABC: \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{x} \\ &\text{En el } \triangle ABD: \ \operatorname{tg}3\alpha = \frac{4}{x} \end{aligned}\right\} \dots ❶$$

- Además: $\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$ ... ❷

- Reemplazando ❶ en ❷ :

$$\frac{4}{x} = \frac{3\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2}} \rightarrow 4 = \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 3}$$

$$4x^2 - 12 = 3x^2 - 1 \rightarrow x^2 = 11$$

$$\therefore \; x = \sqrt{11}$$ **Rpta. E**

4 Si $\operatorname{tg}3x = \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \operatorname{tg}x$, calcula el valor de: "sen 6x".

A) 1 B) 0 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Resolución:

- A partir de la condición tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x} = \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x} = \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$2\cos 2x + 1 = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2\cos 2x - 1\right)$$

$$2\cos 2x + 1 = 4\cos 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x - 2 - \sqrt{3}$$

$$3 + \sqrt{3} = 2\cos 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x$$

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + 1\right) = 2\cos 2x\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

$$\sqrt{3} = 2\cos 2x$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos 2x = \cos 30^\circ$$

Identificando: $2x = 30^\circ \rightarrow x = 15^\circ$

- Nos piden:

$$\operatorname{sen}6x = \operatorname{sen}\left(6 \cdot 15^\circ\right) = \operatorname{sen}90^\circ$$

$$\operatorname{sen}6x = 1$$ **Rpta. A**

5 Halla "A + B + C",

sabiendo que: $\dfrac{\operatorname{sen}3\theta + \cos 3\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = A + B\operatorname{sen}C\theta$

A) 2 B) 3 C) 4 D 5 E) 6

Resolución:

- Simplificamos el primer miembro de la igualdad dada en la condición:

$$\frac{\operatorname{sen}3\theta + \cos 3\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

- Factorizamos adecuadamente:

$$\frac{4\left(\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta\right) - 3\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} \dots ❶$$

- Notamos que:

$$\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta$$

$$= \left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)\left(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1} + \underbrace{\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}_{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta}\right)$$

$$= \left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right) \dots ❷$$

- Reemplazando ❷ en ❶ :

$$\frac{4\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right) - 3\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} =$$

- Simplificando, obtenemos:

$$4\left(1+\frac{1}{2}\text{sen }2\theta\right)-3=1+2\text{ sen }2\theta$$

- Comparando términos:

$$\underline{1}+\underline{2}\text{ sen }\underline{2}\theta=\underline{A}+\underline{B}\text{ sen }\underline{C}\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}A=1\\B=2\\C=2\end{array}\right\}\rightarrow \boxed{A+B+C=5}$$ **Rpta. D**

6 Reduce la expresión:

$$M=\frac{\text{sen }3x+\text{sen}^3x}{\text{sen }2x}$$

A) $\frac{3}{2}\cos x$ B) $\frac{3}{2}\text{sen }x$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\text{tg }2x$ E) $\text{tg }x$

Resolución:

- Recordemos que: $\text{sen }3x=3\text{ sen }x-4\text{ sen}^3x$

  $\text{sen }2x=2\text{ sen }x\cdot\cos x$

- Reemplazando en la expresión a simplificar:

$$M=\frac{3\text{ sen }x-4\text{ sen}^3x+\text{sen}^3x}{2\text{ sen }x\cdot\cos x}$$

$$M=\frac{3\text{ sen }x-3\text{ sen}^3x}{2\text{ sen }x\cdot\cos x}$$

$$M=\frac{3\text{ sen }x\left(1-\text{sen}^2x\right)}{2\text{ sen }x\cdot\cos x}$$

$$M=\frac{3\text{ sen }x\cdot\cos^2x}{2\text{ sen }x\cdot\cos x}\rightarrow \boxed{M=\frac{3}{2}\cos x}$$ **Rpta. A**

7 Calcula el valor de:

$$E=\text{tg }20°\cdot\text{tg }40°\cdot\text{tg }80°$$

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) 1

Resolución:

- Recordemos que:

$$\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }(60°-\alpha)\cdot\text{tg }(60°+\alpha)=\text{tg}3\alpha$$

- Escribiendo convenientemente la expresión dada tenemos:

$$E=\text{tg }20°\cdot\text{tg }40°\cdot\text{tg }80°$$

$$E=\text{tg }20°\cdot\text{tg }(60°-20°)\cdot\text{tg }(60°+20°)$$

$$E=\text{tg }(3\cdot 20°)=\text{tg }60°$$

$$\therefore\ \boxed{E=\sqrt{3}}$$ **Rpta. A**

8 Si $\text{sen }x+\cos x=\frac{1}{2}$, calcula el valor de:
K = cos 3x – sen 3x

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{4}$

Resolución:

- Trabajamos la expresión a calcular:

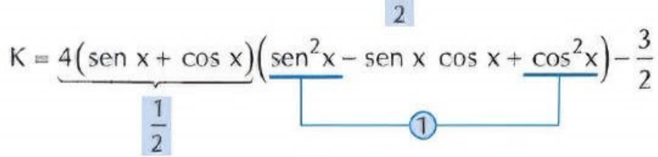
$$K=\cos 3x-\text{sen }3x$$

$$K=\left(4\cos^3x-3\cos x\right)-\left(3\text{ sen }x-4\text{ sen}^3x\right)$$

$$K=\underline{4\cos^3x}-\underline{3\cos x}-\underline{3\text{ sen }x}+\underline{4\text{ sen}^3x}$$

- Factorizando tenemos:

$$K=4\left(\underline{\text{sen}^3x+\cos^3x}\right)-3\left(\text{sen }x+\cos x\right)$$



$$K=4\underbrace{(\text{sen }x+\cos x)}_{\frac{1}{2}}\overbrace{\left(\text{sen}^2x-\text{sen }x\cos x+\cos^2x\right)}^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}$$

(sen²x + cos²x: ①)

$$K=2\left(1-\text{sen }x\cdot\cos x\right)-\frac{3}{2}$$

$$K=\frac{1}{2}-2\text{ sen }x\cdot\cos x$$

$$K=\frac{1}{2}-\text{sen }2x\ \ldots\ (1)$$

- De la condición: $\text{sen }x+\cos x=\frac{1}{2}$

- Elevamos al cuadrado, ambos miembros:

$$\left(\text{sen }x+\cos x\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\underline{\text{sen}^2x}+2\text{ sen }x\cdot\cos x+\underline{\cos^2x}=\frac{1}{4}$$

(①)

$$\boxed{1+2\text{ sen }x\cdot\cos x}=\frac{1}{4}$$

$$\text{sen }2x=-\frac{3}{4}\ \ldots\ (2)$$

- Reemplazando (2) en (1):

$$K=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \boxed{K=\frac{5}{4}}$$ **Rpta. D**

9 Simplifica:

$$A = \frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

- Descomponiendo la expresión dada en fracciones parciales tenemos:

$$A = \frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$A = \underbrace{\cos^2\alpha - (2\cos 2\alpha - 1) + \operatorname{sen}^2\alpha}_{①} + (2\cos 2\alpha + 1)$$

$$A = 1 - 2\cos 2\alpha + 1 + 2\cos 2\alpha + 1$$

$\therefore$ $A = 3$ **Rpta.** C

10 Simplifica la expresión:

$$V = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen}^3 x} - 3\operatorname{cotg}^2 x + 4$$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Resolución:

- Ordenamos convenientemente la expresión dada:

$$V = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen}^3 x} + 4 - 3\operatorname{cotg}^2 x$$

$$V = \frac{3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen}^3 x} + 4 - 3\operatorname{cotg}^2 x$$

$$V = \frac{3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x + 4\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen}^3 x} - 3\operatorname{cotg}^2 x$$

$$V = \frac{3\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} - 3\operatorname{cotg}^2 x$$

$$V = \frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} - 3\operatorname{cotg}^2 x$$

$$V = 3\operatorname{cosec}^2 x - 3\operatorname{cotg}^2 x$$

$$V = 3\underbrace{(\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x)}_{①}$$

$\therefore$ $V = 3$ **Rpta.** E

Funciones trigonométricas del ángulo mitad

Seno y Coseno del ángulo mitad:

- Sabemos que:

$\cos 2A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$ ... *(Por ángulo doble)*

Donde: $\operatorname{sen}^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{2}$$

- Como se observa hemos extraído la mitad a cada uno de los ángulos de las funciones trigonométricas, para concluir finalmente que:

$$\therefore \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \textit{(Fórmula)}$$

- También sabemos que:

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ ... *(Por ángulo doble)*

Donde: $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

Luego:

$$\therefore \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad \textit{(Fórmula)}$$

Tangente del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad ... (1)$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad ... (2)$$

- Dividimos miembro a miembro **(1)** y **(2)**:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$\therefore \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \quad \textit{(Fórmula)}$$

- Ahora, tomamos la inversa a ambos miembros de esta última expresión:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}}$$

$$\therefore \operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} \quad \textit{(Fórmula)}$$

Cuadro de fórmulas importantes:

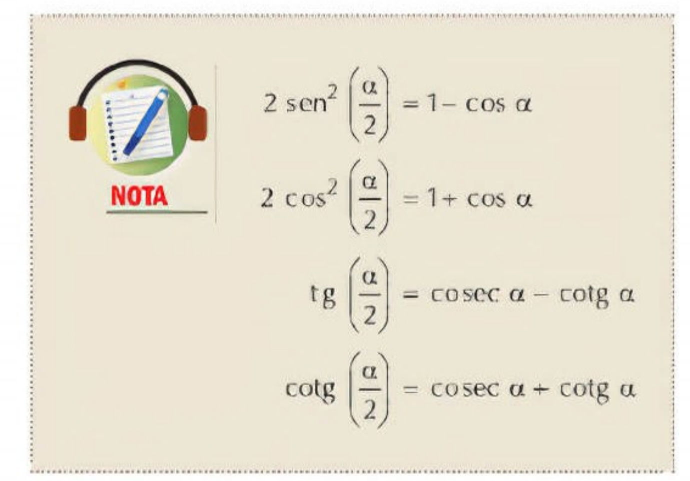
$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

$(\pm)$: se elige de acuerdo al signo que tenga la F.T. en el cuadrante en el cual se ubica $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

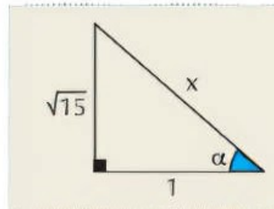


Ejercicios resueltos

1 Sabiendo que $\text{tg}\,\alpha=\sqrt{15}$, tal que: $\alpha\in$ IC, calcula "$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$".

Resolución:

- A partir del dato tenemos: $\text{tg}\,\alpha=\sqrt{15}\rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{4}$
- Por el teorema de Pitágoras, calculamos el valor de "x".



$$x^2=\sqrt{15}^2+1^2$$
$$x^2=15+1$$
$$x=4$$

- Nos piden: $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$$\alpha\in\text{IC}\rightarrow\frac{\alpha}{2}\in\text{IC}\rightarrow\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}:(+)$$

- Reemplazando: $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\therefore\quad \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

2 Calcula el valor de: cos 22°30'.

Resolución:

- Tenemos en cuenta que:

$$22°30'=\frac{45°}{2}$$
$$\rightarrow\cos 22°30'=\cos\left(\frac{45°}{2}\right)$$

- Además sabemos que:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{45°}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}};\ \frac{45°}{2}\in\text{IC}$$

$$\cos 22°30'=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\therefore\quad \cos 22°30'=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

3 Halla el valor de: tg 18°30'.

Resolución:

- Recordemos que: $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\text{cosec}\,\alpha-\text{cotg}\,\alpha$
- También se cumple que: $18°30'=\frac{37°}{2}$

$$\text{tg}\,18°30'=\text{tg}\left(\frac{37°}{2}\right)$$
$$\text{tg}\,18°30'=\text{cosec}\,37°-\text{cotg}\,37°$$
$$\text{tg}\,18°30'=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$$
$$\therefore\quad \text{tg}\,18°30'=\frac{1}{3}$$

4 Calcula: cotg 63°30'

Resolución:

- Sabemos que: $\cot g\,\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cosec}\alpha + \cot g\,\alpha$
- Además se cumple que:

$$63°30' = \frac{127°}{2}$$
$$\cot g\,63°30' = \cot g\left(\frac{127°}{2}\right)$$
$$\cot g\,63°30' = \operatorname{cosec}127° + \cot g\,127°$$

- Pero: $\begin{cases} \operatorname{cosec}127° = \operatorname{cosec}53° = \frac{5}{4} \\ \cot g\,127° = -\cot g\,53° = -\frac{3}{4} \end{cases}$
- Reemplazando:

$$\cot g\,63°30' = \frac{5}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{4}$$
$$\therefore\ \cot g\,63°30' = \frac{1}{2}$$

5 Calcula cos 157°30'.

Resolución:

- Sabemos que: $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
- Además notamos que:

$$157°30' = \frac{315°}{2}$$
$$\cos 157°30' = \cos\left(\frac{315°}{2}\right)$$
$$\underbrace{\cos}_{\ominus}\ \underbrace{157°30'}_{\in IIC} = -\sqrt{\frac{1+\cos 315°}{2}}$$

- Recordemos que:

$$\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Reemplazando en la igualdad anterior:

$$\cos 157°30' = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$
$$\therefore\ \cos 157°30' = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

6 Simplifica $E = \frac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A}$

Resolución:

- Recordemos que: $1 - \cos A = 2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$

$$\operatorname{sen} A = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

- Reemplazando en la expresión pedida, tenemos:

$$E = \frac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$
$$\therefore\ E = \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

7 Reduce $K = \frac{\operatorname{sen} 2x\cdot\cos x}{(1+\cos 2x)(1-\cos x)}$

Resolución:

- En la expresión a reducir notamos lo siguiente:

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cdot\cos x$$
$$1+\cos 2x = 2\cos^2\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\cos^2 x$$
$$1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

- Reemplazando tenemos:

$$K = \frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot\cos x}{(2\cos^2 x)\left(2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}$$
$$K = \frac{\cancel{2}\operatorname{sen} x\cdot\cancel{\cos^2 x}}{(\cancel{2\cos^2 x})\cdot\left(2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

- Pero: $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$
- Luego: $K = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$

$$\therefore\ K = \cot g\,\frac{x}{2}$$

8 Simplifica $E = \cot g\,\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

Resolución:

- Recordemos que: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cosec}\alpha - \cot g\,\alpha$
- Reemplazando en la expresión a simplificar tenemos:

$$E = \cot g\,\alpha + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$
$$E = \cancel{\cot g\,\alpha} + \operatorname{cosec}\alpha - \cancel{\cot g\,\alpha}$$
$$\therefore\ E = \operatorname{cosec}\alpha$$

Problemas resueltos

1 Si $\cos x = -\frac{1}{4}$; $x \in$ IIIC, calcula: "$\text{sen } \frac{x}{2}$"

A) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ B) $-\frac{\sqrt{10}}{4}$ C) $-\frac{\sqrt{6}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Resolución:

- Ubiquemos a qué cuadrante pertenece "$\frac{x}{2}$":

$$x \in \text{IIIC} \rightarrow 180° < x < 270°$$

$$\frac{180°}{2} < \frac{x}{2} < \frac{270°}{2}$$

$$90° < \frac{x}{2} < 135°$$

$$\therefore \quad \frac{x}{2} \in \text{IIC}$$

- Luego, sabemos que el seno en el IIC es (+), entonces:

$$\text{sen } \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

- Reemplazando el dato obtenemos:

$$\text{sen } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \text{sen } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$ **Rpta. D**

2 Si $\text{sen } A = -\frac{7}{25}$; $A \in$ IVC, calcula "$\text{tg } \frac{A}{2}$"

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{7}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) -7 E) $\frac{4}{3}$

Resolución:

$$A \in \text{IVC} \rightarrow 270° < A < 360°$$

$$\frac{270°}{2} < \frac{A}{2} < \frac{360°}{2}$$

$$135° < \frac{A}{2} < 180° \rightarrow \frac{A}{2} \in \text{IIC}$$

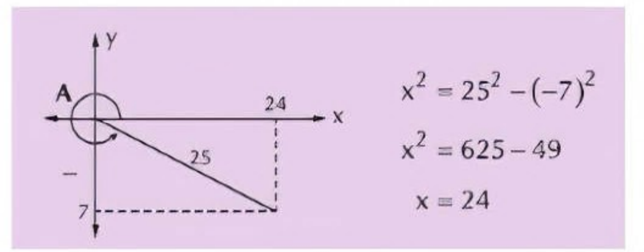
- Ubicamos el cuadrante al cual pertenece "$\frac{A}{2}$"

$$\text{tg } \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \quad \dots \text{❶}$$

- Además, sabemos que la tangente en el IIC es (–),

$$\text{sen } A = -\frac{7}{25} = \frac{y}{r} \begin{cases} y = -7 \\ r = 25 \end{cases}$$

- Por el teorema de Pitágoras, calculamos el valor de "x":



$$x^2 = 25^2 - (-7)^2$$

$$x^2 = 625 - 49$$

$$x = 24$$

entonces:

- Del dato tenemos:
- Luego: $\cos A = \frac{x}{r} = \frac{24}{25} \quad \dots$ ❷
- Reemplazando ❷ en ❶ :

$$\text{tg } \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{24}{25}}{1+\frac{24}{25}}} = -\sqrt{\frac{1}{49}}$$

$$\therefore \quad \text{tg } \frac{A}{2} = -\frac{1}{7}$$ **Rpta. B**

3 Reduce la expresión:

$$E = \text{cotg } \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \text{cotg } x$$

A) sen x B) cos x C) tg x

D) $\text{sen } \frac{x}{2}$ E) $\cos \frac{x}{2}$

Resolución:

- Reemplazando en la expresión a reducir tenemos:

$$E = \text{cotg } \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \text{cotg } x$$

$$E = (\text{cosec } x + \text{cotg } x) - (1 + \cos x) \cdot \text{cotg } x$$

$$E = \text{cosec } x + \cancel{\text{cotg } x} - \cancel{\text{cotg } x} - \cos x \cdot \text{cotg } x$$

$$E = \text{cosec } x - \cos x \cdot \text{cotg } x$$

$$E = \frac{1}{\text{sen } x} - \cos x \cdot \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$$E = \frac{1-\cos^2 x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen } x}$$

$\therefore$ $E = \text{sen } x$ **Rpta. A**

4 Simplifica la expresión:

$$M = \frac{\text{cotg } \frac{x}{2} - \text{tg } \frac{x}{2}}{\text{cosec } 2x + \text{cotg } 2x}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

- Sabemos que: $\text{cotg } \frac{x}{2} = \text{cosec } x + \text{cotg } x$ ... ❶

$$\text{tg } \frac{x}{2} = \text{cosec } x - \text{cotg } x \quad ... ❷$$

- También notamos que:

$$\text{cotg } x = \text{cosec } 2x + \text{cotg } 2x \quad ... ❸$$

- Reemplazando ❶, ❷ y ❸ en la expresión a reducir tenemos:

$$M = \frac{(\text{cosec } x + \text{cotg } x) - (\text{cosec } x - \text{cotg } x)}{\text{cotg } x}$$

$$M = \frac{\text{cosec } x + \text{cotg } x - \text{cosec } x + \text{cotg } x}{\text{cotg } x}$$

$M = \frac{2 \text{ cotg } x}{\text{cotg } x} \rightarrow$ $M = 2$ **Rpta. B**

5 Reduce la expresión:

$$E = \text{cosec } \frac{x}{8} + \text{cosec } \frac{x}{4} + \text{cosec } \frac{x}{2} + \text{cosec } x + \text{cotg } x$$

A) $\text{tg } \frac{x}{16}$ B) $\text{tg } \frac{x}{8}$ C) $\text{tg } \frac{x}{4}$

D) $\text{cotg } \frac{x}{8}$ E) $\text{cotg } \frac{x}{16}$

Resolución:

- Recordemos que: $\text{cotg } \frac{x}{2} = \text{cosec } x + \text{cotg } x$
- Aplicamos en forma recurrente esta relación en la expresión a reducir:

$$E = \text{cosec } \frac{x}{8} + \text{cosec } \frac{x}{4} + \text{cosec } \frac{x}{2} + \text{cosec } x + \text{cotg } x$$

$$E = \text{cosec } \frac{x}{8} + \text{cosec } \frac{x}{4} + \text{cosec } \frac{x}{2} + \text{cotg } \frac{x}{2}$$

$$E = \text{cosec } \frac{x}{8} + \text{cosec } \frac{x}{4} + \text{cotg } \frac{x}{4}$$

$$E = \text{cosec } \frac{x}{8} + \text{cotg } \frac{x}{8}$$

$\therefore$ $E = \text{cotg } \frac{x}{16}$ **Rpta. E**

6 Simplifica la expresión:

$$R = \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}}$$

A) $\text{tg } \frac{x}{2}$ B) $\text{cotg } \frac{x}{2}$ C) $\text{tg} x$ D) $\text{cotg } x$ E) 2

Resolución:

- Recordemos que: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- Reemplazando en la expresión a simplificar:

$$R = \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\frac{1}{\cos x} + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\frac{1+\cos x}{\cos x}}}$$

$$R = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad ...❶$$

- Además, sabemos que: $\text{tg } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ... ❷
- Reemplazando ❷ en ❶ tenemos:

$\therefore$ $R = \text{tg} \frac{x}{2}$ **Rpta. A**

7 Calcula el valor de: " $\text{tg } \frac{\pi}{24}$ "

A) $\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$ B) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$

C) $\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ D) $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 2$

E) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$

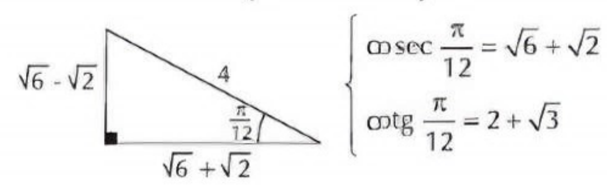
Resolución:

- Sabemos que: $\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \text{cosec } \alpha - \text{cotg } \alpha$
- Luego, se tiene que:

$$\text{tg } \frac{\pi}{24} = \text{tg} \left(\frac{\frac{\pi}{12}}{2} \right)$$

$$\text{tg } \frac{\pi}{24} = \text{cosec} \frac{\pi}{12} - \text{cotg } \frac{\pi}{12} \quad ... ❶$$

- Recordemos que: $\left(\frac{\pi}{12}\text{ rad} <> 15°\right)$



$$\begin{cases} \operatorname{cosec}\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}+\sqrt{2} \\ \operatorname{cotg}\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3} \end{cases}$$

- Reemplazando estos valores en ❶ tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2}$$ **Rpta. C**

8 Simplifica la expresión:

$$E=(2\text{ sen }x-\text{sen }2x)\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

A) 4 B) 4 sen x C) 4 cos x
D) 4 tg x E) 4 cotg x

Resolución:

- Trabajando la expresión a simplificar tenemos:

$$E=(2\text{ sen }x-\text{sen }2x)\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

$$E=(\underline{2\text{ sen }x}-\underline{2\text{ sen }x}\cdot\cos x)\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

$$E=2\text{ sen }x\underbrace{(1-\cos x)}\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

$$E=2\text{ sen }x\cdot 2\text{ sen}^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

$$E=4\text{ sen }x\cdot\text{sen}^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

$$E=4\text{ sen }x\cdot(1)$$

$$\therefore\ \boxed{E=4\text{ sen }x}$$ **Rpta. B**

9 Calcula el valor de:

$$K=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{16}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}$$

A) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ B) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+2$ E) $\sqrt{2}+4$

Resolución:

- Recordemos que: $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\operatorname{cosec}x+\operatorname{cotg}x$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{cosec}x-\operatorname{cotg}x$$

- Aplicando estas relaciones en la expresión a calcular tenemos:

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{16}=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}\quad (-)$$

$$\underbrace{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{16}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}}=2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}$$

$$K=2\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{K=2\left(\sqrt{2}+1\right)}$$ **Rpta. B**

10 Simplifica la expresión:

$$R=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 8x}}}}{2-4\text{ sen}^2\frac{x}{2}}$$

A) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ B) $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ C) 1 D) cotg x E) tg x

Resolución:

- Trabajamos el numerador "N" de la expresión a reducir:

$$N=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 8x}}}$$

$$N=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 8x)}}}$$

- Pero: $1+\cos 8x=2\cos^2 4x$

$$N=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2\cdot 2\cos^2 4x}}}$$

$$N=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 4x}}$$

$$N=\sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos 4x)}}$$

- También $1+\text{Cos }4x=2\cos^2 2x$

$$N=\sqrt{2-\sqrt{2\cdot 2\cos^2 2x}}$$

$$N=\sqrt{2-2\cos 2x}$$

$$N=\sqrt{2(1-\cos 2x)}$$

- Finalmente: $1-\cos 2x=2\text{ sen}^2x$

$$N=\sqrt{2\cdot 2\text{ sen}^2x}$$

$$N=2\text{ sen }x\quad\ldots ❶$$

- Trabajamos el denominador "D" de la expresión a reducir:

$$D = 2 - 4\ sen^2 \frac{x}{2}$$

$$D = 2\left(1 - 2\ sen^2 \frac{x}{2}\right)$$

- Pero: $2\ sen^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

$$D = 2\left(1 - (1 - \cos x)\right)$$

$$D = 2 \cos x \ ...❷$$

- Reemplazando ❶ y ❷ en la expresión a reducir tenemos:

$$R = \frac{N}{D} = \frac{2\ sen\ x}{2 \cos x} = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

$\therefore$ $R = tg\ x$ **Rpta.** E

11 Simplifica la expresión:

$$K = \tan 4x - cosec\ 8x$$

A) – tan 8x B) – cot 8x C) – cot 4x

D) cosec 4x E) – sec 4x

Resolución:

- Recordemos que:

$$\tan\frac{x}{2} = cosec\,x - cotg\,x$$

$$\Rightarrow \tan\frac{x}{2} - cosec\,x = -cotg\,x$$

- Nos piden:

$$\tan 4x - cosec\,8x = -\cot 4x$$

$\therefore$ $k = -cotg\,4x$ **Rpta.** C

12 Si se cumple que:

$$tg\frac{\theta}{2} = cosec\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta}{2}$$

Calcula el valor de:

$$P = 4\cos^2\frac{\theta}{4}$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $\sqrt{5} + 1$

D) $\sqrt{5} + 2$ E) $4 - \sqrt{5}$

Resolución:

- Sabemos que:

$$tg\frac{\theta}{2} = cosec\,\theta - cotg\,\theta$$

Entonces:

$$tg\frac{\theta}{4} = cosec\frac{\theta}{2} - cotg\frac{\theta}{2}\ .....❶$$

- Sabemos que:

$$tg\frac{\theta}{4} = cosec\frac{\theta}{2} - sen\frac{\theta}{2}\ .....❷$$

- De ❶ y ❷ se tiene:

$$cotg\frac{\theta}{2} = sen\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}} = sen\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = sen^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = 1$$

Completando cuadrados

$$\cos^2\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} (\leq -1) \times \text{¡NO!} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \checkmark \text{¡SI!} \end{cases}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

- Nos piden :

$$P = 4\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$P = 2\left(2\cos^2\frac{\theta}{4}\right)$$

$$P = 2\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$P = 2\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

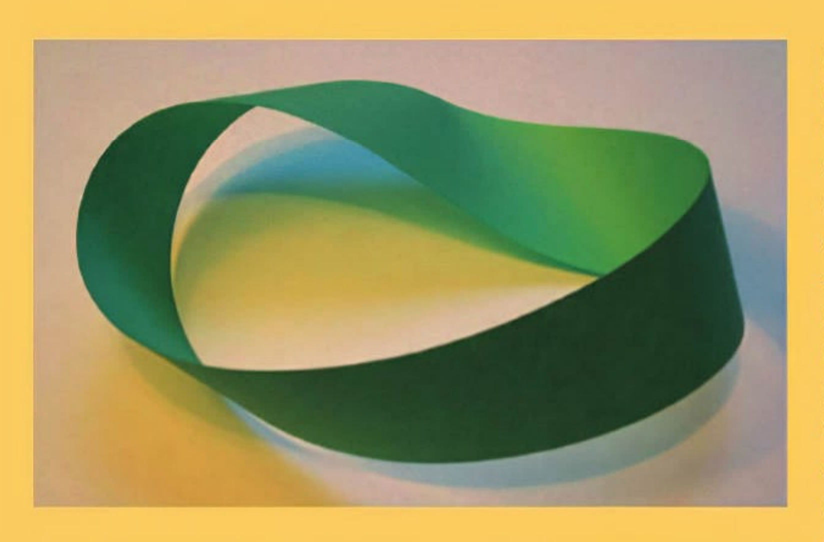
$$P = 2 + \sqrt{5} - 1$$

$\therefore$ $P = \sqrt{5} + 1$ **Rpta.** C

Amplía tus conocimientos



La Cinta de Möbius



La geometría no euclídea, o mejor dicho, las geometrías no euclídeas, que trabajan en campos más abstractos que la geometría euclídea o convencional y sobre superficies, espacios matemáticos en ocasiones más de tres dimensiones, nos plantean a menudo cuestiones sorprendentes que parecen escapar a toda lógica.

Un ejemplo de ello es la cinta de Möbius, introducida casi en 1858 por dos matemáticos alemanes, August Ferdinand Möbius y Johann Benedict Listing, y que fue el primer ejemplo de variedad no orientable.

Para hacer una cinta de Möbius como la de la imagen nada más sencillo que unir los extremos de una cinta, pero no formando un aro como sería lo más natural, sino efectuando una torsión, es decir, dotando a uno de los extremos de un giro de 180º de tal manera que pegamos el lado exterior de un extremo de la cinta sobre el lado exterior del otro extremo.

La cinta así obtenida presenta las siguientes particularidades:

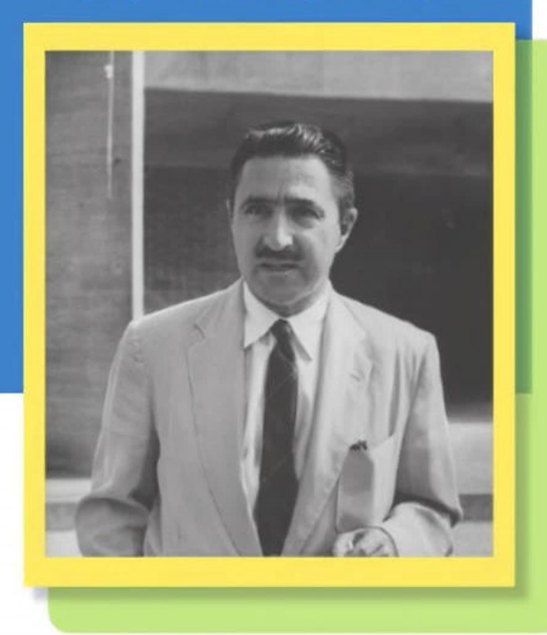
1. No tiene dos bordes, tan solo uno. Fácilmente verificable siguiendo el borde con el dedo.
2. No tiene dos lados, solamente uno. Fácilmente verificable trazando una línea a bolígrafo siguiendo la única cara.
3. Si se corta la cinta longitudinalmente por la mitad no se obtienen dos cintas del mismo tamaño como sería de esperar, sino ¡una sola cinta el doble de grande!
4. Si se repite el proceso y se corta de nuevo la cinta resultante longitudinalmente por la mitad ¿se obtienen dos cintas iguales? ¿se obtiene una el doble de larga? pues no, se obtienen dos cintas iguales pero... ¡enlazadas!
5. Una nueva cinta de Möbius, pero ahora no la cortamos por la mitad, el corte ha de ser longitudinal, como siempre, pero a un tercio del borde derecho. Se comienza a cortar y no se pierde de vista el margen derecho hasta que se llega al punto de inicio del corte. Ahora obtenemos también dos cintas entrelazadas, pero ¡una es de doble tamaño que la otra!

SORPRENDENTE ¿NO?

Félix Candela

(arquitecto e ingeniero)

Personaje de la Matemática



Félix Candela Outeriño nació el 27 de enero de 1910 en Madrid. Félix no se sintió atraído por ninguna vocación en particular. A sugerencia de un amigo, escogió Arquitectura, como hubiera escogido, el creé, cualquier otra cosa.

La carrera de arquitectura en Madrid exige un estudio previo de ciencias exactas. En su primer año en la Escuela Superior de Arquitectura en Madrid, Candela desarrolló una gran afición por la geometría y empezó a impartir lecciones privadas de geometría descriptiva a sus compañeros. En su tercer año estudió con Luis Vegas, profesor de Resistencia de Materiales. Pero a diferencia del estudiante de arquitectura promedio, Candela no tenía pretensiones intelectuales o estéticas. Lo que más le intrigaba era cómo se podría calcular una estructura para prevenir su colapso. Aunque nunca se sintió atraído por la matemática pura, su inteligencia visual aunada con su talento para la geometría analítica y trigonometría, le ayudaron a cautivar a Vegas, quien más tarde le dotó con el título honorario de ayudante. Candela fue un deportista y ganó de joven varias competiciones.

Después de su graduación en 1935, Candela abrió un pequeño taller con Eduardo Robles y Ramírez Dampierre : daban lecciones privadas a estudiantes y dibujaban para arquitectos locales. Candela empezó a tener encargos para calcular de estructuras de acero y concreto. En 1936 hizo una solicitud de una beca de viaje, otorgada cada año por la Academia de Bellas Artes de San Fernando, presentando una tesis intitulada *La influencia de las Nuevas Tendencias en las Técnicas de Concreto Armado sobre la Forma Arquitectónica*. Decidió ir a Alemania, equipado con la cartas de presentación para los renombrados especialistas en cascarones : Dischinger y Frinsterwalder. El boleto de tren que Candela tenía fecha del 18 de julio de 1936, y las nuevas del pronunciamiento militar eran tan alarmantes que permaneció, con sus maletas listas en Madrid. Candela se refiere a este hecho como un ejemplo de talento «*estar en el lugar y el momento preciso, porque si no logre beneficiarme con las sabias enseñanzas de los profesores alemanes, absorbí algunas de las lecciones impartidas por la revolución y la guerra civil, que me fueron mucho más útiles*».

Investiga:



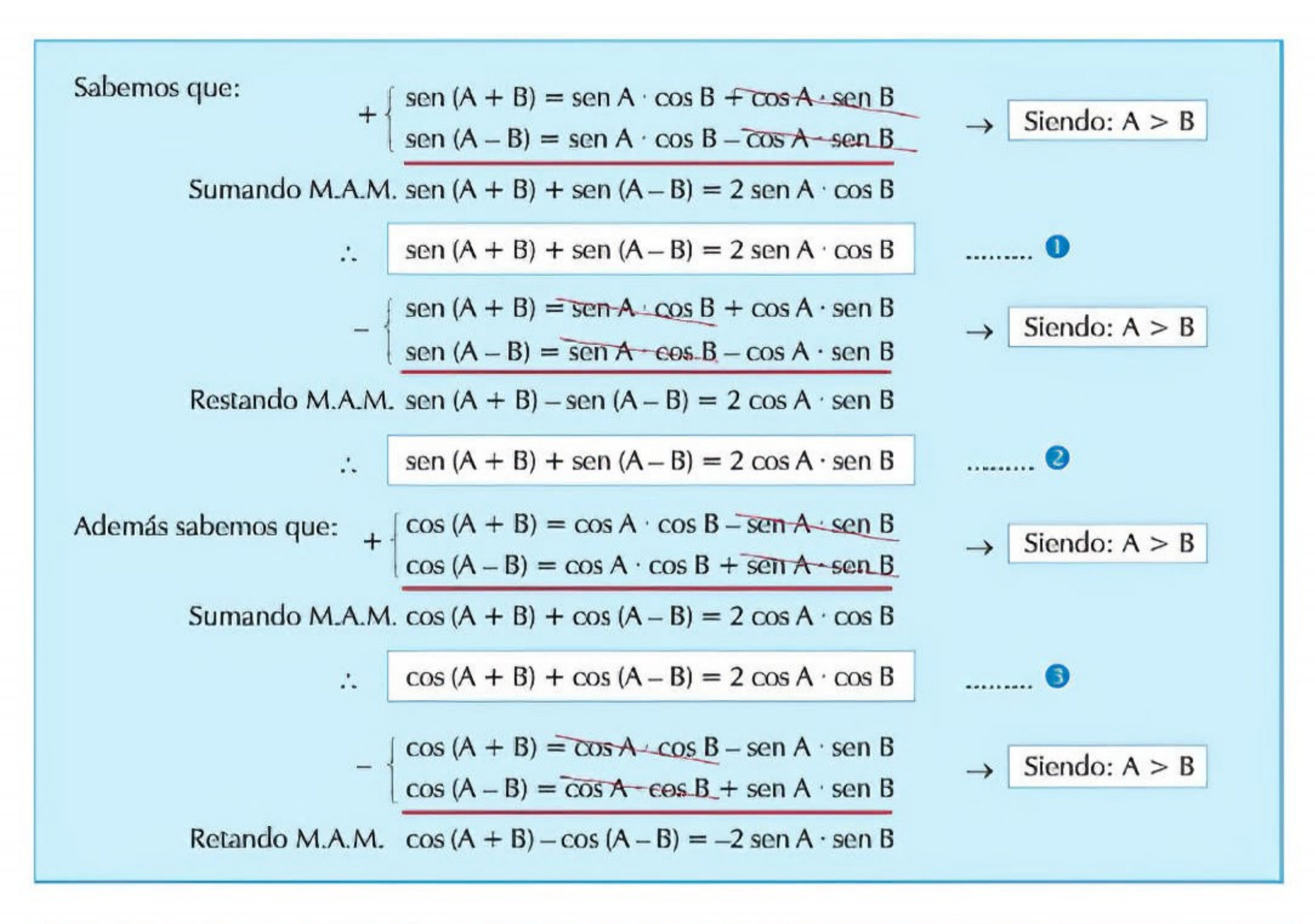
1. **Qué construcciones en el Perú llaman tu atención. Comenta.**
2. **Qué es lo más resaltante en la formación profesional de Félix ¿puedes construir un poligono regular?**

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Escribe las fórmulas de transformación de suma o diferencia de senos y cosenos a producto y da una ejemplo de cada una de ellas.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Emplea la fórmula $A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ para calcular el área de una región triangular, cuando conoce las longitudes de sus tres lados; p es el semiperímetro.

Transformaciones Trigonométricas

Transformaciones de suma o diferencia a producto (factorización trigonométrica)



Sabemos que:

$$+\begin{cases} \text{sen}(A+B) = \text{sen}\,A \cdot \cos B + \cos A \cdot \text{sen}\,B \\ \text{sen}(A-B) = \text{sen}\,A \cdot \cos B - \cos A \cdot \text{sen}\,B \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Siendo: } A > B}$$

Sumando M.A.M. $\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B) = 2\,\text{sen}\,A \cdot \cos B$

$$\therefore \quad \boxed{\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B) = 2\,\text{sen}\,A \cdot \cos B} \quad \ldots\ldots\ldots \text{❶}$$

$$-\begin{cases} \text{sen}(A+B) = \text{sen}\,A \cdot \cos B + \cos A \cdot \text{sen}\,B \\ \text{sen}(A-B) = \text{sen}\,A \cdot \cos B - \cos A \cdot \text{sen}\,B \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Siendo: } A > B}$$

Restando M.A.M. $\text{sen}(A+B) - \text{sen}(A-B) = 2\cos A \cdot \text{sen}\,B$

$$\therefore \quad \boxed{\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B) = 2\cos A \cdot \text{sen}\,B} \quad \ldots\ldots\ldots \text{❷}$$

Además sabemos que:

$$+\begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \text{sen}\,A \cdot \text{sen}\,B \\ \cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \text{sen}\,A \cdot \text{sen}\,B \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Siendo: } A > B}$$

Sumando M.A.M. $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cdot \cos B$

$$\therefore \quad \boxed{\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cdot \cos B} \quad \ldots\ldots\ldots \text{❸}$$

$$-\begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \text{sen}\,A \cdot \text{sen}\,B \\ \cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \text{sen}\,A \cdot \text{sen}\,B \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Siendo: } A > B}$$

Retando M.A.M. $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\,\text{sen}\,A \cdot \text{sen}\,B$

Cambiando el signo a todos sus términos, obtenemos:

$$\therefore \quad \cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\,\text{sen}\,A \cdot \text{sen}\,B \quad \ldots\ldots\ldots \text{❹}$$

Luego, hacemos los siguientes cambios de variables, veamos.

$$\begin{array}{l} \text{i)} \\ \text{ii)} \end{array} + \begin{cases} A + B = x \\ A - B = y \end{cases} \text{Sumando M.A.M.}$$

$$2A = x + y \rightarrow A = \frac{x+y}{2} \quad \dots \text{(a)}$$

De las expresiones:

$$\begin{array}{l} \text{i)} \\ \text{ii)} \end{array} - \begin{cases} A + B = x \\ A - B = y \end{cases} \text{Restando M.A.M.}$$

$$2B = x - y \rightarrow B = \frac{x-y}{2} \quad \dots \text{(b)}$$

Luego, reemplazamos las expresiones **(i)**, **(ii)**, **(a)** y **(b)** en ❶, ❷, ❸ y ❹, obteniendo:

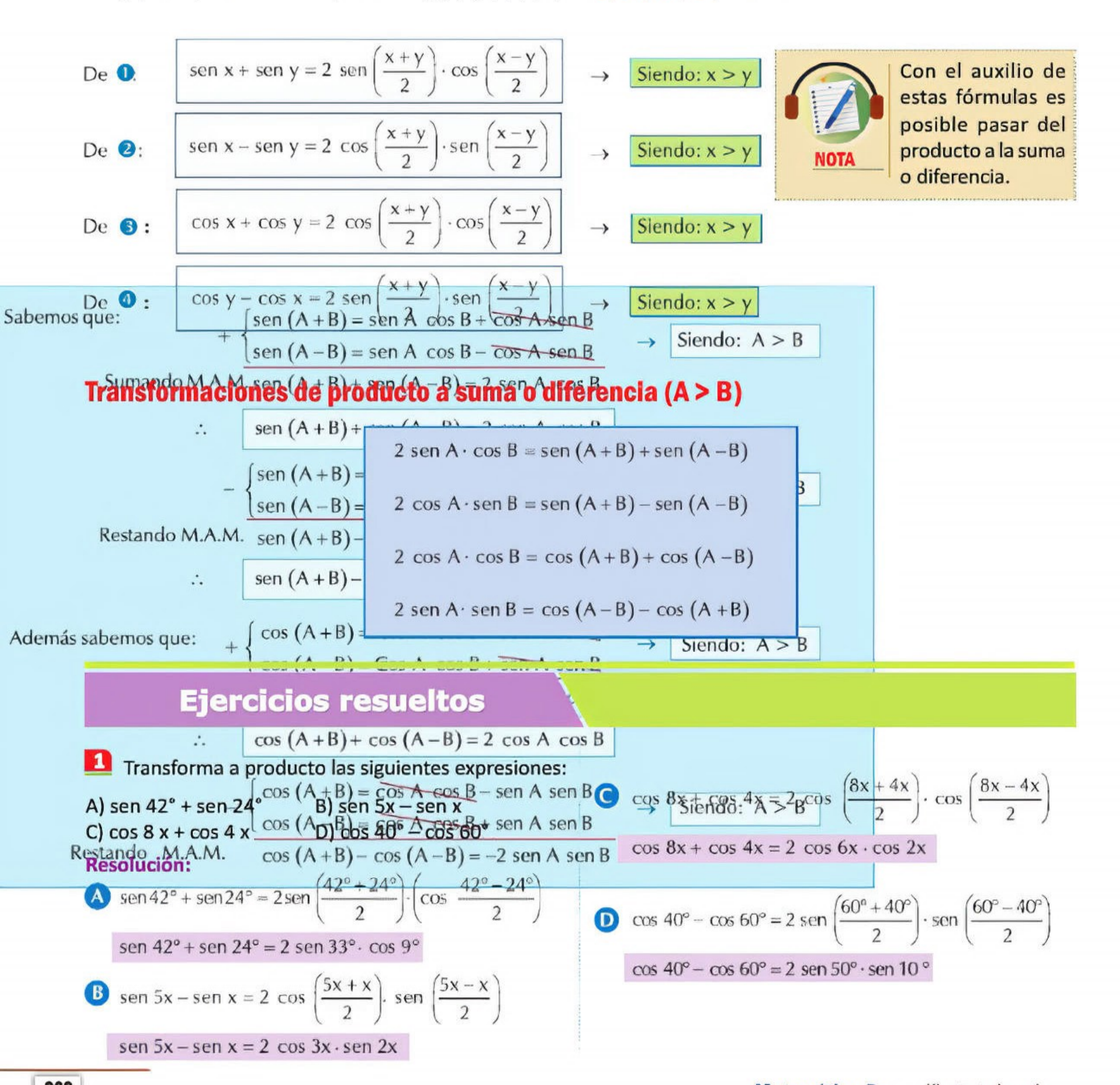
De ❶: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ → Siendo: $x > y$

De ❷: $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ → Siendo: $x > y$

De ❸: $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ → Siendo: $x > y$

De ❹: $\cos y - \cos x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ → Siendo: $x > y$

NOTA: Con el auxilio de estas fórmulas es posible pasar del producto a la suma o diferencia.


Sabemos que: $+\begin{cases} \operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B \end{cases}$ → Siendo: $A > B$

Sumando M.A.M. $\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2 \operatorname{sen} A \cos B$

∴ $\operatorname{sen}(A+B) + \dots$

$-\begin{cases} \operatorname{sen}(A+B) = \dots \\ \operatorname{sen}(A-B) = \dots \end{cases}$

Restando M.A.M. $\operatorname{sen}(A+B) - \dots$

∴ $\operatorname{sen}(A+B) - \dots$

Además sabemos que: $+\begin{cases} \cos(A+B) = \dots \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \end{cases}$ → Siendo: $A > B$

∴ $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$

$-\begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \end{cases}$ → Siendo: $A > B$

Restando M.A.M. $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

Transformaciones de producto a suma o diferencia (A > B)

$$2 \operatorname{sen} A \cdot \cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$$

$$2 \cos A \cdot \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)$$

$$2 \cos A \cdot \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2 \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

Ejercicios resueltos

1 Transforma a producto las siguientes expresiones:

A) sen 42° + sen 24°   B) sen 5x − sen x

C) cos 8 x + cos 4 x   D) cos 40° − cos 60°

Resolución:

A $\operatorname{sen} 42° + \operatorname{sen} 24° = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{42° + 24°}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{42° - 24°}{2}\right)$

$\operatorname{sen} 42° + \operatorname{sen} 24° = 2 \operatorname{sen} 33° \cdot \cos 9°$

B $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x = 2 \cos\left(\frac{5x + x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5x - x}{2}\right)$

$\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x = 2 \cos 3x \cdot \operatorname{sen} 2x$

C $\cos 8x + \cos 4x = 2 \cos\left(\frac{8x + 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{8x - 4x}{2}\right)$

$\cos 8x + \cos 4x = 2 \cos 6x \cdot \cos 2x$

D $\cos 40° - \cos 60° = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{60° + 40°}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{60° - 40°}{2}\right)$

$\cos 40° - \cos 60° = 2 \operatorname{sen} 50° \cdot \operatorname{sen} 10°$

2 Expresar como suma o diferencia, según convenga, las siguientes expresiones:

A) $2\ \text{sen}\ 40° \cdot \cos 12°$ B) $2\ \cos 8x \cdot \text{sen}\ 2x$

C) $2\ \cos 20° \cdot \cos 8°$ D) $2\ \text{sen}\ 5x \cdot \text{sen}\ 3x$

Resolución:

A $2\ \text{sen}\ 40° \cdot \cos 12° = \text{sen}\,(40°+12°) + \text{sen}\,(40°-12°)$

$2\ \text{sen}\ 40° \cdot \cos 12° = \text{sen}\ 52° + \text{sen}\ 28°$

B $2\ \cos 8x \cdot \text{sen}\,2x = \text{sen}\,(8x+2x) - \text{sen}\,(8x-2x)$

$2\ \cos 8x \cdot \text{sen}\ 2x = \text{sen}\ 10x - \text{sen}\ 6x$

C $2\ \cos 20° \cdot \cos 8° = \cos\,(20°+8°) + \cos\,(20°-8°)$

$2\ \cos 20° \cdot \cos 8° = \cos 28° + \cos 12°$

D $2\ \text{sen}\ 5x \cdot \text{sen}\ 3x = \cos\,(5x-3x) - \cos\,(5x+3x)$

$2\ \text{sen}\ 5x \cdot \text{sen}\ 3x = \cos 2x - \cos 8x$

3 Simplifica:

$$E = \cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$$

Resolución:

Agrupamos convenientemente y transformamos a producto:

$$E = \cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$$

$$E = \cos 20° + 2\ \cos\left(\frac{140°+100°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{140°-100°}{2}\right)$$

$$E = \cos 20° + 2\ \cos 120° \cdot \cos 20°$$

- pero: $\cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

$$E = \cos 20° + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 20°$$

$$E = \cos 20° - \cos 20°$$

$$\therefore\ E = 0$$

4 Simplifica la expresión:

$$E = \frac{\text{sen}\ 10° + \text{sen}\ 20° + \text{sen}\ 30°}{\cos 10° + \cos 20° + \cos 30°}$$

Resolución:

Agrupando convenientemente tenemos:

$$E = \frac{(\text{sen}\ 30° + \text{sen}\ 10°) + \text{sen}\ 20°}{(\cos 30° + \cos 10°) + \cos 20°} \ \ldots ❶$$

Transformando a producto:

i) $\text{sen}\ 30° + \text{sen}\ 10° = 2\ \text{sen}\left(\dfrac{30°+10°}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{30°-10°}{2}\right)$

$= 2\ \text{sen}\ 20° \cdot \cos 10°$

ii) $\cos 30° + \cos 10° = 2\ \cos\left(\dfrac{30°+10°}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{30°-10°}{2}\right)$

$= 2\ \cos 20°\ \cos 10°$

- Reemplazando **i)** y **ii)** en ❶ :

$$E = \frac{2\ \text{sen}\ 20° \cdot \cos 10° + \text{sen}\ 20°}{2\ \cos 20° \cdot \cos 10° + \cos 20°}$$

$$E = \frac{\text{sen}\ 20°\,(2\ \cos 10° + 1)}{\cos 20°\,(2\ \cos 10° + 1)}$$

$$E = \frac{\text{sen}\ 20°}{\cos 20°} \ \rightarrow\ E = \text{tg}\ 20°$$

5 Reduce la expresión:

$$P = \text{sen}\ 7x \cdot \cos 2x + \cos 8x \cdot \text{sen}\ 3x$$

Resolución:

- Multiplicamos (x2) cada término de la expresión dada:

$2P = 2\ \text{sen}\ 7x \cdot \cos 2x + 2\ \cos 8x \cdot \text{sen}\ 3x \ \ldots$ 

- Transformando a suma o diferencia:

i) $2\ \text{sen}\ 7x \cdot \cos 2x = \text{sen}\,(7x+2x) + \text{sen}\,(7x-2x)$

$= \text{sen}\ 9x + \text{sen}\ 5x$

ii) $2\ \cos 8x \cdot \text{sen}\ 3x = \text{sen}\,(8x+3x) + \text{sen}\,(8x-3x)$

$= \text{sen}\ 11x + \text{sen}\ 5x$

- Reemplazando **i)** y **ii)** en ❶ :

$$2P = \text{sen}\ 9x + \text{sen}\ 5x + \text{sen}\ 11x - \text{sen}\ 5x$$

$$2P = \text{sen}\ 11x + \text{sen}\ 9x$$

- Transformando a producto:

$$2P = 2\ \text{sen}\left(\frac{11x+9x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{11x-9x}{2}\right)$$

$$2P = 2\ \text{sen}\ 10x \cdot \cos x$$

$$\therefore\ P = \text{sen}\ 10x \cdot \cos x$$

6 Si se cumple que:

$$\text{sen}\ 5x \cdot \cos x - \cos 4x \cdot \text{sen}\,2x = \text{sen}\ Ax \cdot \cos Bx\,,$$

Calcula "A + B" ($x \neq 0$)

Resolución:

Simplificando el primer miembro de la igualdad dada tenemos:

$$\text{sen}\ 5x \cdot \cos x - \cos 4x \cdot \text{sen}\ 2x$$

Multiplicamos "x2" al numerador y denominador, obteniendo:

$$\frac{2\ \text{sen}\ 5x \cdot \cos x - 2\ \cos 4x \cdot \text{sen}\ 2x}{2}$$

$$\frac{\left[\text{sen}\ (5x+x) + \text{sen}\ (5x-x)\right] - \left[\text{sen}\ (4x+2x) - \text{sen}\ (4x-2x)\right]}{2}$$

$$\frac{\cancel{\text{sen}\ 6x} + \text{sen}\ 4x - \cancel{\text{sen}\ 6x} + \text{sen}\ 2x}{2}$$

$$\frac{\text{sen}\ 4x + \text{sen}\ 2x}{2}$$

$$\frac{\cancel{2}\ \text{sen}\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}{\cancel{2}}$$

$\text{sen}\ 3x \cdot \cos x$ ... ❶

- Reemplazando ❶ en la igualdad dada:

$$\underbrace{\text{sen}\ 5x \cdot \cos x - \cos 4x \cdot \text{sen}\ 2x}_{} = \text{sen}\ Ax \cdot \cos Bx$$

$$\text{sen}\ 3x \cdot \cos x = \text{sen}\ Ax \cdot \cos Bx$$

- Comparando términos: $\begin{cases} 3x = Ax \rightarrow A = 3 \\ x = Bx \rightarrow B = 1 \end{cases}$

$$\therefore \boxed{A + B = 4}$$

7 Calcula el valor de:

$$M = \frac{\text{sen}\ 5x + \text{sen}\ 3x}{\cos 5x + \cos 3x}, \text{ cuando: } x = \frac{\pi}{24}\ \text{rad}$$

Resolución:

Transformando a producto el numerador y denominador de la expresión dada, obtenemos:

$$M = \frac{2\ \text{sen}\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}{2\ \cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}$$

$$M = \frac{\cancel{2}\ \text{sen}\ 4x \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{2}\ \cos 4x \cdot \cancel{\cos x}}$$

$$M = \frac{\text{sen}\ 4x}{\cos 4x} \rightarrow M = \text{tg}\ 4x$$

- Reemplazando el valor de "x" tenemos:

8 Simplifica la expresión:

$$K = 3 + 5\ \text{sen}\ 23°$$

$$M = \text{tg}\left[4\left(\frac{\pi}{24}\right)\right] \rightarrow M = \text{tg}\ \frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{M = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Resolución:

- Factorizamos (5) en la expresión a reducir:

$$K = 5\left[\frac{3}{5} + \text{sen}\ 23°\right]$$

$$K = 5\left[\text{sen}\ 37° + \text{sen}\ 23°\right]$$

- Transformando a producto:

$$K = 5\left[2\ \text{sen}\left(\frac{37° + 23°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{37° - 23°}{2}\right)\right]$$

$$K = 10\ \text{sen}\ 30° \cdot \cos 7°$$

$$K = 10\left(\frac{1}{2}\right)\cos 7° \rightarrow \therefore \boxed{K = 5\ \cos 7°}$$

9 Simplifica:

$$M = \frac{2\ \text{sen}\ 5x \cdot \cos 3x - \text{sen}\ 8x}{2\ \cos 3x \cdot \cos 2x - \cos 5x}$$

Resolución:

- Se sabe que:

$$2\ \text{sen}\ 5x \cdot \cos 3x = \text{sen}\ (5x+3x) + \text{sen}\ (5x-3x)$$
$$2\ \text{sen}\ 5x \cdot \cos 3x = \text{sen}\ 8x + \text{sen}\ 2x$$

$$2\ \cos 3x \cdot \cos 2x = \cos (3x+2x) + \cos (3x-2x)$$
$$2\ \cos 3x \cdot \cos 2x = \cos 5x + \cos x$$

- Reemplazando en "M" tenemos:

$$M = \frac{\cancel{\text{sen}\ 8x} + \text{sen}\ 2x - \cancel{\text{sen}\ 8x}}{\cancel{\cos 5x} + \cos x - \cancel{\cos 5x}}$$

$$M = \frac{\text{sen}\ 2x}{\cos x}; \text{ pero: } \boxed{\text{sen}\ 2x = 2\ \text{sen}\ x \cdot \cos x}$$

- Entonces:

$$M = \frac{2\ \text{sen}\ x\ \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} \quad \therefore \boxed{M = 2\ \text{sen}\ x}$$

Ejercicios resueltos

Sobre transformaciones trigonométricas

1 Reduce la expresión:

$$A = \frac{\text{sen } x + \text{sen } 3x + \text{sen } 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

A) tg x B) tg 2x C) tg 3x
D) cotg x E) cotg 3x

Resolución:

Agrupamos convenientemente el numerador y denominador, luego transformamos a producto:

$$A = \frac{(\text{sen } 5x + \text{sen } x) + \text{sen } 3x}{(\cos 5x + \cos x) + \cos 3x}$$

$$A = \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right) + \text{sen } 3x}{2\cos\left(\frac{5x+x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right) + \cos 3x}$$

$$A = \frac{2\,\text{sen } 3x\cdot\cos 2x + \text{sen } 3x}{2\cos 3x\cdot\cos 2x + \cos 3x}$$

$$A = \frac{\text{sen } 3x(2\cos 2x + 1)}{\cos 3x(2\cos 2x + 1)}$$

$$A = \frac{\text{sen } 3x}{\cos 3x} \rightarrow \boxed{A = \text{tg } 3x}$$ **Rpta. C**

2 Transformar a producto:

$$E = \text{sen } 2x + \text{sen } 4x + \text{sen } 6x + \text{sen } 8x$$

A) $4\,\text{sen } 5x\cdot\cos 2x\cdot\cos x$ B) $4\,\text{sen } 5x\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x$
C) $4\,\text{sen } x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x$ D) $4\,\text{sen } 3x\cdot\cos 2x\cdot\cos x$
E) $4\,\text{sen } x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$

Resolución:

Agrupamos convenientemente y luego transformamos a producto:

$$E = (\text{sen } 8x + \text{sen } 2x) + (\text{sen } 6x + \text{sen } 4x)$$

$$E = 2\,\text{sen}\left(\frac{8x+2x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{8x-2x}{2}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{6x+4x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{6x-4x}{2}\right)$$

$$E = 2\,\text{sen } 5x\cdot\cos 3x + 2\,\text{sen } 5x\cdot\cos x$$

$$E = 2\,\text{sen } 5x[\cos 3x + \cos x]$$

$$E = 2\,\text{sen } 5x\cdot\left[2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)\right]$$

$$E = 2\,\text{sen } 5x[2\cos 2x\cdot\cos x]$$

$$\therefore \boxed{E = 4\,\text{sen } 5x\cdot\cos 2x\cdot\cos x}$$ **Rpta. A**

3 Reduce la expresión:

$$M = \frac{\sec 40° + \sec 80°}{4\,\text{sen } 40°}$$

A) tg 20° B) cotg 20° C) 2 tg 20°
D) 2 cotg 20° E) 4 cotg 20°

Resolución:

De las identidades, tenemos: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

- Luego, en la expresión "M".

$$M = \frac{\frac{1}{\cos 40°} + \frac{1}{\cos 80°}}{4\,\text{sen } 40°}$$

$$M = \frac{\frac{\cos 80° + \cos 40°}{\cos 40°\cdot\cos 80°}}{4\,\text{sen } 40°}$$

$$M = \frac{\cos 80° + \cos 40°}{4\,\text{sen } 40°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°} \quad \dots (1)$$

- Transformando a producto el numerador, tenemos:

$$\cos 80° + \cos 40° = 2\cos\left(\frac{80°+40°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{80°-40°}{2}\right)$$

$$\cos 80° + \cos 40° = 2\cos 60°\cdot\cos 20°$$

$$\cos 80° + \cos 40° = 2\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 20°$$

$$\cos 80° + \cos 40° = \cos 20° \quad \dots (2)$$

- Analizando el denominador y aplicando F.T. del ángulo doble:

$$\text{sen } 2\alpha = 2\,\text{sen }\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$4\,\text{sen } 40°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80° = 2\;2\,\text{sen } 40°\cdot\cos 40°\;\cos 80°$$

$$4\,\text{sen } 40°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80° = 2\,\text{sen } 80°\cdot\cos 80°$$

$$4\,\text{sen } 40°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80° = \text{sen } 160°$$

$$\text{pero}: \text{sen } 160° = \text{sen}(180° - 20°) = \text{sen } 20°$$

$$4\,\text{sen } 40°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80° = \text{sen } 20° \dots (3)$$

- Reemplazamos (2) y (3) en (1):

$$M = \frac{\cos 20°}{\text{sen } 20°} \rightarrow \boxed{M = \text{cotg } 20°}$$ **Rpta. B**

4 Transforma a producto:

$$W = \cos^2 5x - \text{sen}^2 3x$$

A) $\cos 5x \cdot \cos 3x$ B) $\cos 6x \cdot \cos 2x$

C) $\cos 8x \cdot \cos 2x$ D) $\cos 8x \cdot \text{sen } 2x$

E) $\text{sen } 8x \cdot \text{sen } 2x$

Resolución:

- Recordamos que: $2\,\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

  $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

- Multiplicando (x2) ambos miembros de la expresión dada:

$$2W = \underbrace{2\cos^2 5x} - \underbrace{2\,\text{sen}^2 3x}$$

$$2W = (1 + \cos 10x) - (1 - \cos 6x)$$

$$2W = \cancel{1} + \cos 10x - \cancel{1} + \cos 6x$$

$$2W = \cos 10x + \cos 6x$$

- Transformando a producto el segundo miembro de la igualdad:

$$2W = 2\cos\left(\frac{10x + 6x}{2}\right)\cos\left(\frac{10x - 6x}{2}\right)$$

$$\cancel{2}W = \cancel{2}\cos 8x \cdot \cos 2x$$

$$\therefore\ W = \cos 8x \cdot \cos 2x$$ **Rpta.** C

5 Reduce

$$P = \sqrt{1 + \cos 20°} - \sqrt{1 - \cos 20°}$$

A) 2 sen 35° B) 2 cos 35° C) 2 sen 55°
D) 4 cos 55° E) 4 sen 35°

Resolución:

- De las F.T. del ángulo mitad recordamos que:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\,\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

- Luego:

$$1 + \cos 20° = 2\cos^2\left(\frac{20°}{2}\right) = 2\cos^2 10°$$

$$1 - \cos 20° = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{20°}{2}\right) = 2\,\text{sen}^2 10°$$

- Reemplazando en la expresión a reducir:

$$P = \sqrt{2\cos^2 10°} - \sqrt{2\,\text{sen}^2 10°}$$

$$P = \sqrt{2}\cos 10° - \sqrt{2}\,\text{sen } 10°$$

Pero: cos 10° = sen (90° - 10°) = sen 80°

$$P = \sqrt{2}\,\text{sen } 80° - \sqrt{2}\,\text{sen } 10°$$

$$P = \sqrt{2}\,[\text{sen } 80° - \text{sen } 10°]$$

- Transformando a producto:

$$P = \sqrt{2}\left[2\cos\left(\frac{80° + 10°}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{80° - 10°}{2}\right)\right]$$

$$P = \sqrt{2}\,[2\cos 45°\,\text{sen } 35°]$$

$$P = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{sen } 35° \rightarrow P = 2\,\text{sen } 35°$$ **Rpta.** A

6 Sabiendo que:

$\text{sen } x + \text{sen } y = a$ ... ❶

$\cos x + \cos y = b$ ... ❷

Hallla "sen (x + y)"

A) $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$ B) $\frac{a^2 - b^2}{2ab}$ C) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

D) $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ E) $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$

Resolución:

- Transformando a producto las condiciones ❶ y ❷:

De ❶: $2\,\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = a$ ... ❸

De ❷: $2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = b$ ... ❹

- Dividiendo miembro a miembro ❸ : ❹ tenemos:

$$\frac{\cancel{2}\,\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \cancel{\cos\frac{x - y}{2}}}{\cancel{2}\cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \cancel{\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)} = \frac{a}{b} \rightarrow \text{tg}\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{a}{b}$$ ... ❺

- De las F.T. del ángulo doble recordamos que:

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{2 \text{ tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha}$$

- Aplicando la relación anterior:

$$\text{sen}(x+y) = \frac{2 \text{ tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} \ldots ⑥$$

- Reemplazando ⑤ en ⑥ y operando:

$$\text{sen}(x+y) = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{\frac{2a}{b}}{\frac{b^2+a^2}{b^2}}$$

$$\therefore \quad \text{en}(x+y) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$ **Rpta. E**

7 Si $\frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,y} = \frac{6}{5}$; calcula

$$A = \text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \text{cotg}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 11

Resolución:

- En la condición aplicamos la propiedad de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Luego: $\frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,y} = \frac{6}{5} \rightarrow \frac{\text{sen}\,x + \text{sen}\,y}{\text{sen}\,x - \text{sen}\,y} = \frac{6+5}{6-5}$

$$\therefore \quad \frac{\text{sen}\,x + \text{sen}\,y}{\text{sen}\,x - \text{sen}\,y} = 11$$

- Transformando a producto tenemos:

$$\frac{\not{2} \text{ sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\not{2} \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = 11$$

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = 11$$

$$\underbrace{\text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \text{cotg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = 11}$$

$$\therefore \quad A = 11$$ **Rpta. E**

8 Calcula el valor de:

$$S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) 1

Resolución:

- Multiplicando y dividiendo la expresión dada por: $\left(2 \text{ sen}\frac{\pi}{7}\right)$:

$$S = \frac{2\text{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + 2\text{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + 2\text{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}}{2\text{sen}\frac{\pi}{7}}$$

- Observamos que:

$$\rightarrow \quad 2 \text{ sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} = \text{sen}\frac{2\pi}{7} \ldots ❶$$

$$\rightarrow 2 \text{ sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$2 \text{ sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \text{sen}\frac{4\pi}{7} - \text{sen}\frac{2\pi}{7} \ldots ❷$$

$$\rightarrow 2 \text{ sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right) - \text{sen}\left(\frac{5\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$2 \text{ sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \text{sen}\frac{6\pi}{7} - \text{sen}\frac{4\pi}{7} \ldots ❸$$

- Reemplazando ❶ , ❷ y ❸ en "S" tenemos:

$$S = \frac{\cancel{\text{sen}\frac{2\pi}{7}} + \cancel{\text{sen}\frac{4\pi}{7}} - \cancel{\text{sen}\frac{2\pi}{7}} + \text{sen}\frac{6\pi}{7} - \cancel{\text{sen}\frac{4\pi}{7}}}{2\text{ sen}\frac{\pi}{7}}$$

$$S = \frac{\text{sen}\frac{6\pi}{7}}{2 \text{ sen}\frac{\pi}{7}}$$

pero: $\text{sen}\frac{6\pi}{7} = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{7}$

$$S = \frac{\cancel{\text{sen}\frac{\pi}{7}}}{2\,\cancel{\text{sen}\frac{\pi}{7}}} \rightarrow S = \frac{1}{2}$$ **Rpta. C**

Propiedad:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+...+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+...+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

Donde: $n\in\mathbb{Z}^+$

Ejemplos:

- $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$
- $\cos\frac{\pi}{31}+\cos\frac{3\pi}{31}+\cos\frac{5\pi}{31}+..+\cos\frac{29\pi}{31}=\frac{1}{2}$
- $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$
- $\cos\frac{2\pi}{27}+\cos\frac{4\pi}{27}+\cos\frac{6\pi}{27}+...+\cos\frac{26\pi}{27}=-\frac{1}{2}$

9 Si $A+B+C=180°$,

factoriza: $E=\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C$

A) $4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$ B) $4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{C}{2}$

C) $4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ D) $4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$

E) $4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{C}{2}$

Resolución:

De la transformación a producto tenemos que:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\ ...\ ❶$$

Además, por F.T. del ángulo doble tenemos que:

$$\operatorname{sen}C=2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\ ...\ ❷$$

Reemplazando ❶ y ❷ en la expresión "E" se logra:

$$E=\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C$$

$$E=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\ ...❸$$

De la condición:

- Reemplazando ❹ en ❸ :

$$A+B+C=180°$$

$$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$$

$$\text{F.T.}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\text{Co F.T.}\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}\\ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{C}{2}\end{array}\right\}\ ...\ ❹$$

- Transformando a producto la suma de cosenos:

$$E=2\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$E=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$E=2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right)\right]$$

$$E=2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$\therefore\ E=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$ **Rpta. D**

Propiedad:

Si $A+B+C=180°$, entonces:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$$

10 Halla los límites entre los cuales varía la expresión:

$$F=\operatorname{sen}(40°+x)\cdot\operatorname{sen}(20°-x)$$

A) $[0\,;\,1]$ B) $[-1\,;\,1]$ C) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]$

D) $\left[\frac{1}{4};1\right]$ E) $\left[-\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right]$

Resolución:

- Multiplicamos (x2) ambos miembros de la igualdad dada:

$$2F=2\operatorname{sen}(40°+x)\cdot\operatorname{sen}(20°-x)$$

- Transformando el segundo miembro de la igualdad a diferencia de cosenos:

$$2F = \cos(40° + x - 20° + x) - \cos(40° + x + 20° - x)$$

$$2F = \cos(20° + 2x) - \cos 60°$$

$$2F = \cos(20° + 2x) - \frac{1}{2}$$

$$F = \frac{1}{2}\cos(20° + 2x) - \frac{1}{4}$$

- Además, recordamos la variación del coseno:

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(20° + 2x) \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos(20° + 2x) \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\cos(20° + 2x) - \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{4} \leq F \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad F \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right]$$ **Rpta. E**

11 Sabiendo que:

$$\frac{\text{sen } 9x}{\text{sen } 3x} + \frac{\cos 6x}{\cos 2x} = A \cdot \cos Bx \cdot \cos Cx$$

Calcula el valor de: "A + B + C"

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Resolución:

- Recordemos que:

$$\frac{\text{sen } 3\alpha}{\text{sen } \alpha} = 2\cos 2\alpha + 1$$

$$\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2\cos 2\alpha - 1$$

Entonces: $\frac{\text{sen } 9x}{\text{sen } 3x} = 2\cos 6x + 1$ ... ❶

$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2\cos 4x - 1$... ❷

- Reemplazando ❶ y ❷ en la igualdad dada tenemos:

$$\frac{\text{sen } 9x}{\text{sen } 3x} + \frac{\cos 6x}{\cos 2x} = A\cos Bx \cdot \cos Cx$$

$$2\cos 6x + 1 + 2\cos 4x - 1 = A\cos Bx \cdot \cos Cx$$

$$2\cos 6x + 2\cos 4x = A\cos Bx \cdot \cos Cx$$

$$2(\underbrace{\cos 6x + \cos 4x}) = A\cos Bx \cdot \cos Cx$$ ...❸

- Transformando a producto la expresión señalada tenemos:

$$\cos 6x + \cos 4x = 2\cos\left(\frac{6x + 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x - 4x}{2}\right)$$

$$\cos 6x + \cos 4x = 2\cos 5x \cdot \cos x$$ ... ❹

- Reemplazando ❹ en ❸ tenemos:

$$2(2\cos 5x \cdot \cos x) = A\cos Bx \cdot \cos Cx$$

$$4\cos 5x \cdot \cos x = A\cos Bx \cdot \cos Cx$$

- Comparando términos:

$$\left.\begin{matrix} A = 4 \\ B = 5 \\ C = 1 \end{matrix}\right\} \therefore \quad A + B + C = 10$$ **Rpta. C**

12 Simplifica la expresión:

$$E = \cos^2 40° + \cos^2 80° + \cos^2 160°$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

Resolución:

- Multiplicamos (x2) los términos de la igualdad dada:

$$2E = 2\cos^2 40° + 2\cos^2 80° + 2\cos^2 160°$$ ... ❶

- Además recordemos que: $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

Entonces:

$$\left.\begin{matrix} 2\cos^2 40° = 1 + \cos 80° \\ 2\cos^2 80° = 1 + \cos 160° \\ 2\cos^2 160° = 1 + \cos 320° \end{matrix}\right\}$$ ... ❷

- Reemplazamos ❷ en ❶ tenemos:

$$2E = 1 + \cos 80° + 1 + \cos 160° + 1 + \cos 320°$$

$$2E = 3 + \cos 80° + \underbrace{\cos 160° + \cos 320°}$$ ... ❸

- Transformando a producto la expresión señalada tenemos:

$$\cos 320° + \cos 160° = 2\cos\left(\frac{320° + 160°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{320° - 160°}{2}\right)$$

$$\cos 320° + \cos 160° = 2\cos 240° \cdot \cos 80°$$

$$\cos 320° + \cos 160° = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 80°$$

$$\cos 320° + \cos 160° = -\cos 80°$$ .... ❹

- Reemplazando ❹ en ❸ tenemos:

$$2E = 3 + \cancel{\cos 80°} + (\cancel{-\cos 80°})$$

$$\therefore \quad E = \frac{3}{2}$$ **Rpta. E**

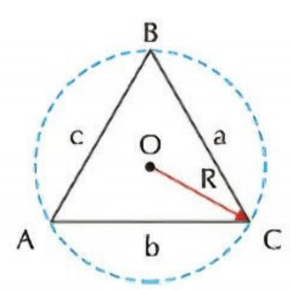
Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Resolución de triángulos oblicuángulos

La resolución de un triángulo de este tipo exige conocer tres de sus elementos donde por lo menos uno de ellos sea un lado (puede ser dos lados y un ángulo, tres lados, un lado y dos ángulos). Siguiendo las mismas normas que en los triángulos rectángulos, estableceremos primero unas fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo de los cuales se deducen en cada caso las fórmulas necesarias para resolver el triángulo.

Ley de senos (ley de Briggs)

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, y la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo.

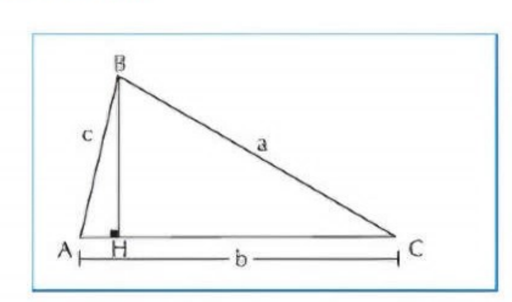


$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

Donde:

$a = 2R \text{ sen } A$
$b = 2R \text{ sen } B$
$c = 2R \text{ sen } C$

Demostración



Sea ABC un triángulo cualquiera, trazamos su altura BH:

- En el ◺ AHB: $\text{sen } A = \frac{BH}{c}$

$BH = c \text{ sen } A$ .... ❶

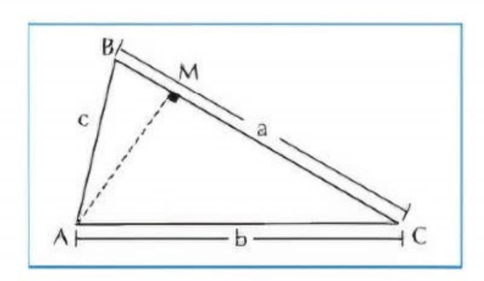
- En el ◺ BHC: $\text{sen } C = \frac{BH}{a}$

$BH = a \text{ sen } C$ .... ❷

Igualamos las expresiones ❷ y ❶: a sen C = c sen A   Donde: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$ .... ❶

Análogamente trazando la altura desde el vértice "A" se obtiene:

En el ◺ AMB: $\text{sen } B = \frac{AM}{c} \rightarrow AM = c \text{ sen } B$ .... ❸



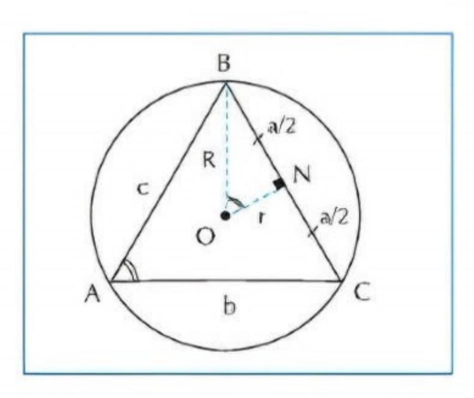
En el ◺ AMC: $\text{sen } C = \frac{AM}{b} \Rightarrow AM = b \text{ sen } C$ ... ❹

Igualamos las expresiones ❸ y ❹:

b sen C = c sen B

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B}$$ .... ❷

De las expresiones ❶ y ❷, obtenemos: $\dfrac{a}{\text{sen } A}=\dfrac{c}{\text{sen } C}=\dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \therefore \dfrac{a}{\text{sen } A}=\dfrac{b}{\text{sen } B}=\dfrac{c}{\text{sen } C}$ ... ❸



En el ⊿ ONB: $\text{sen } O=\dfrac{a/2}{R}$; donde: R: circunradio

Como: $\measuredangle A \cong \measuredangle O \quad \text{sen } A = \text{sen } O$

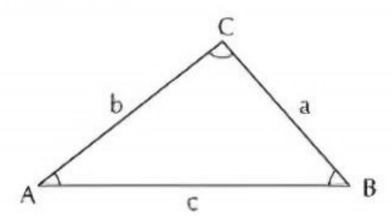
Luego: $\text{sen } A=\dfrac{a}{2R} \Rightarrow \therefore \dfrac{a}{\text{sen } A}=2R$ ... ❹

Igualando ❸ y ❹: $\therefore \dfrac{a}{\text{sen } A}=\dfrac{b}{\text{sen } B}=\dfrac{c}{\text{sen } C}=2R$ **L.q.q.d**

Ley de cosenos (ley de Carnot)

En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$



Demostración:

Consideramos un triángulo acutángulo (figura 1) y otro obtúsangulo (figura 2).

Construyamos sus alturas $\overline{BH}$:

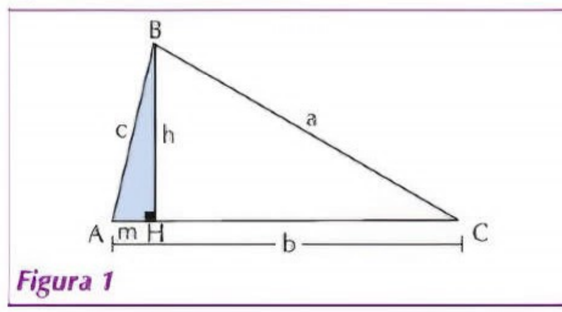


Figura 1

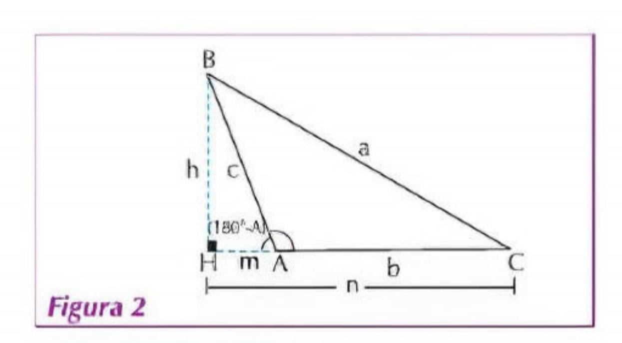


Figura 2

Si el ángulo "A" es agudo, sabemos por geometría plana que: $a^2=b^2+c^2-2bm$ .... ❶

Y si el ángulo "A" es obtuso: $a^2=b^2+c^2+2bm$ .... ❷

De la **figura (1)** en el ⊿ AHB: $\cos A=\dfrac{m}{c} \Rightarrow m=c\cdot\cos A$ .... ❸

De la **figura (2)** en el ⊿ BHA: $\cos B\hat{A}H=\dfrac{m}{c} \Rightarrow \cos(180°-A)=\dfrac{m}{c}$

$$-\cos A=\frac{m}{c} \Rightarrow \therefore m=-c\cdot\cos A$$

Reemplazamos ❸ en ❶, resultando: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ .... ❺

Y reemplazamos ❹ en ❷, resultando: $a^2=b^2+c^2+2b(-c\cdot\cos A)$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \quad \text{........................ ❻}$$

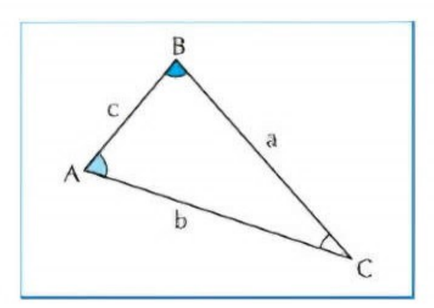
Como se observará ❺ y ❻ son idénticos, llegando a la conclusión de que cualquiera sea el ángulo "A" (agudo u obtuso) la ley de cosenos se cumple.

Ley de tangentes

En todo triángulo, la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados es proporcional a la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.

Por ley de senos, se tiene que:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

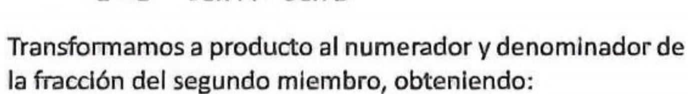




Dada la proporción: por propiedad

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \qquad \frac{n+m}{n-m} = \frac{p+q}{p-q}$$

Luego: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B}$


Transformamos a producto al numerador y denominador de la fracción del segundo miembro, obteniendo:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \text{ sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

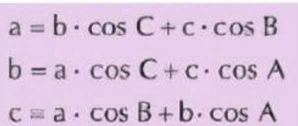
$$\frac{a+b}{a-b} = \text{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right) \text{cotg}\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{ ; pero: } \text{cotg}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

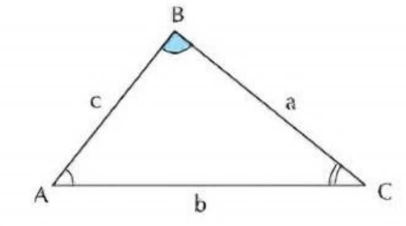
$$\frac{a+b}{a-b} = \text{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}\right] \rightarrow \therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

También: $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{\text{tg}\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{A-C}{2}\right)} \qquad \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{\text{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

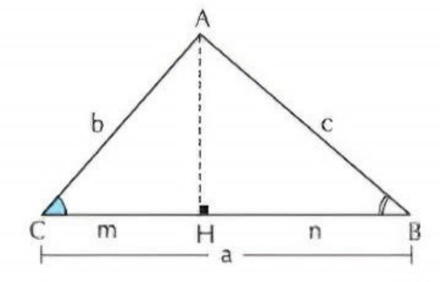
Ley de las proyecciones

En todo triángulo cada lado es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos lados sobre él.


$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$
$$b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A$$
$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$$



Demostración:



Trazamos $\overline{AH} \perp \overline{CB}$

En el ⊿ CHA: $\cos C = \dfrac{m}{b} \rightarrow m = b \cdot \cos C$

En el ⊿ AHB: $\cos B = \dfrac{n}{c} \rightarrow n = c \cdot \cos B$

Además: $a = m + n$, reemplazando:

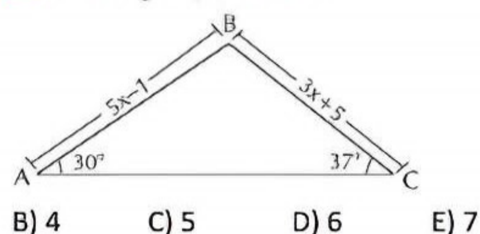
$$a = b \cos C + c \cdot \cos B$$

En forma análoga se logra la demostración para los otros dos lados.

Problemas resueltos

Sobre resolución de triángulos oblicuángulos: Ley de senos, cosenos y tangentes

Problema 1 De la figura, calcula "x"



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución:

Aplicamos la ley de senos:

$$\frac{AB}{\text{sen } C}=\frac{BC}{\text{sen } A} \rightarrow \frac{5x-1}{\text{sen } 37°}=\frac{3x+5}{\text{sen } 30°}$$

$$\frac{5x-1}{\frac{3}{5}}=\frac{3x+5}{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{25x-5}{3}=6x+10$$

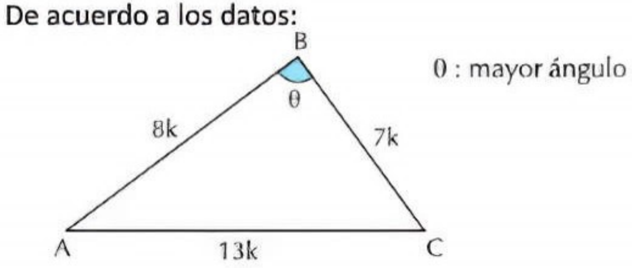
$$25x-5=18x+30 \qquad \therefore \boxed{x=5} \quad \textbf{Rpta. C}$$

Problema 2 Determina el mayor ángulo de un triángulo cuyos lados son proporcionales a los números: 7; 8 y 13.

A) 60° B) 75° C) 90° D) 120° E) 150°

Resolución:

De acuerdo a los datos:



Aplicamos la ley de cosenos:

$$(13k)^2=(8k)^2+(7k)^2-2(8k)(7k)\cdot\cos\theta$$

$$169k^2=64k^2+49k^2-112k^2\cos\theta$$

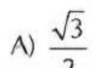
$$112k^2\ \cos\theta=-56k^2$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta=\cos 120°$$

$$\therefore \boxed{\theta=120°} \quad \textbf{Rpta. D}$$

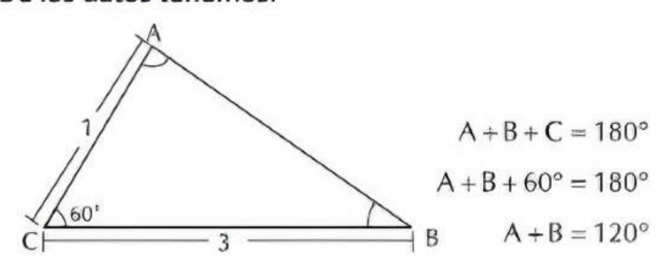
Problema 3 En un triángulo ABC se tiene que $C=60°$; $a=3$; $b=1$. Calcula $\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)$



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución:

De los datos tenemos:



$$A+B+C=180°$$
$$A+B+60°=180°$$
$$A+B=120°$$

Aplicamos la ley de tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{3+1}{3-1}=\frac{\text{tg}\left(\frac{120°}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)} \rightarrow 2\ \text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\text{tg } 60°$$

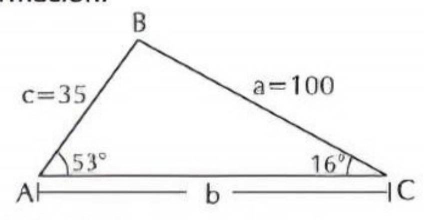
$$\therefore \boxed{\text{tg}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \textbf{Rpta. A}$$

Problema 4 En un triángulo ABC se tiene que $A=53°$; $C=16°$; $a=100$ y $c=35$. Calcular "b"

A) 120 B) 117 C) 114 D) 112 E) 108

Resolución:

De la información:

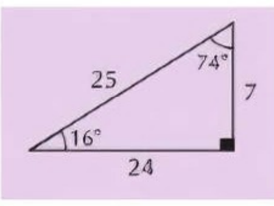


Aplicamos la ley de las proyecciones:

$$b=a\cdot\cos C+c\cdot\cos A$$

$$b=100\ \cos 16°+35\ \cos 53°$$

$$b=100\cdot\left(\frac{24}{25}\right)+35\cdot\left(\frac{3}{5}\right)$$



$$b=96+21$$



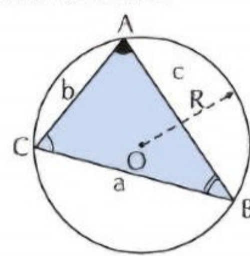
$$\therefore \boxed{b=117} \quad \textbf{Rpta. B}$$

Problema 5 En un triángulo ABC se cumple que $a\cdot\text{sen}A-b\cdot\text{sen}B=c\cdot\text{sen}C$. Halla "A".

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

Resolución:

A partir de los datos tenemos:



Ley de senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}=2R \rightarrow \begin{cases} \text{sen } A=\dfrac{a}{2R} \\ \text{sen } B=\dfrac{b}{2R} \\ \text{sen } C=\dfrac{c}{2R} \end{cases}$$

Reemplazando en la condición:

$$a \cdot \text{sen } A - b \cdot \text{sen } B = c \cdot \text{sen } C$$

$$a \cdot \left(\frac{a}{2R}\right) - b \cdot \left(\frac{b}{2R}\right) = c \cdot \left(\frac{c}{2R}\right)$$

$$\frac{a^2-b^2}{\cancel{2R}}=\frac{c^2}{\cancel{2R}}$$

$$a^2-b^2=c^2$$

$$a^2=b^2+c^2$$

Δ ABC es rectángulo, luego: $A = 90°$ **Rpta.** D

Problema 6 Siendo "α" un ángulo cualquiera, a, b, c los lados del triángulo ABC, halla:

$$K=[a\ \cos(\alpha-B)+b\ \cos(\alpha+A)]\cdot \sec\ \alpha$$

A) a B) b C) c D) a + b E) a – b

Resolución:

Operando la expresión "K" tenemos:

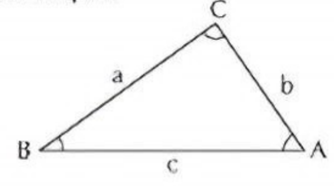
$$K=[a\cdot(\cos\alpha\cdot\cos B+\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}B)+ b(\cos\alpha\cdot\cos A-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}A)]\sec\alpha$$

$$K=[a\cos\alpha\cdot\cos B+a\ \text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\,B+ b\ \cos\alpha\cdot\cos A-b\ \text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\,A]\sec\alpha$$

Factorizando convenientemente:

$$K=[\cos\alpha(a\ \cos B+b\ \cos A)+ \text{sen}\alpha(a\ \text{sen}B-b\ \text{sen}A)]\ \sec\alpha \quad \dots ❶$$

Además tenemos que:



Ley de senos:

$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}$$

$$a\ \text{sen}\,B=b\ \text{sen}\,A$$

$$a\ \text{sen}\,B-b\ \text{sen}\,A=0 \quad \dots ❷$$

Ley de las proyecciones:

$$c=a\ \cos B+b\ \cos A \quad \dots ❸$$

Reemplazando ❷ y ❸ en ❶:

$$K=[\cos\alpha(c)+\text{sen}\,\alpha(0)]\cdot\sec\ \alpha$$

$$K=c\cdot[\underbrace{\cos\alpha\cdot\sec\alpha}_{1}+0]$$

$\therefore$ $K=c$ **Rpta.** C

Problema 7 De la figura, halla "tg B"

A) $\sqrt{3}$

B) 3

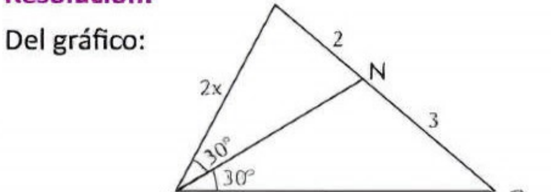
C) $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$

E) 6

Resolución:

Del gráfico:



Aplicamos la propiedad de la bisectriz:

$$\frac{AB}{2}=\frac{AC}{3}=x \rightarrow \begin{cases} AB=2x \\ AC=3x \end{cases}$$

En el Δ ABC aplicamos la ley de cosenos:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

$$5^2=(3x)^2+(2x)^2-2(3x)(2x)\cos 60°$$

$$25=9x^2+4x^2-12x^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$25=7x^2$$

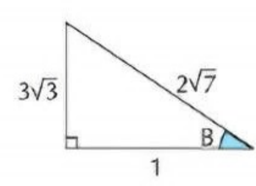
$$\therefore\ x=\frac{5}{\sqrt{7}}$$

En el Δ ABC aplicamos la ley de senos:

$$\frac{b}{\text{sen B}}=\frac{a}{\text{sen A}} \rightarrow \frac{3x}{\text{sen B}}=\frac{5}{\text{sen }60°}$$

$$\frac{3\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right)}{\text{sen B}}=\frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{sen B}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

Finalmente:



$$\text{tg } B = \frac{3\sqrt{3}}{1}$$

$$\therefore \ \text{tg } B = 3\sqrt{3}$$ **Rpta. D**

Problema 8 En el triángulo ABC calcula el lado AB, siendo:
$A = 75°$, $C = 45°$, $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

A) $b = \sqrt{3}$; $c = \sqrt{2}$; $B = 60°$

B) $b = 3$; $c = 2$; $B = 60°$

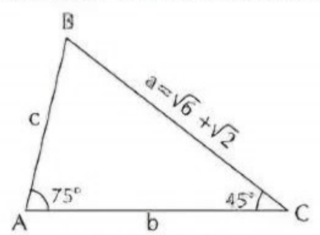
C) $b = 2\sqrt{3}$; $c = 2\sqrt{2}$; $B = 60°$

D) $b = 3\sqrt{2}$; $c = 2\sqrt{3}$; $B = 60°$

E) $b = 3\sqrt{2}$; $c = 3\sqrt{3}$; $B = 60°$

Resolución:

De acuerdo a los datos tenemos:



$$A + B + C = 180°$$
$$75° + B + 45° = 180°$$
$$B = 60°$$

Hallamos "b", (Ley de senos).

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 60°} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\text{sen } 75°}$$

$$b = \left[\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}\right] \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad b = [4] \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = 2\sqrt{3}$$

Hallamos "c", (Ley de senos).

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \rightarrow \frac{c}{\text{sen } 45°} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{sen } 60°}$$

$$c = \left[\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow c = [4] \ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

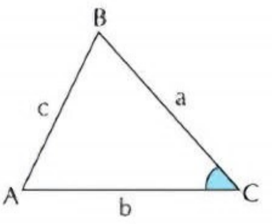
$$\therefore \ c = 2\sqrt{2}$$ **Rpta. C**

Problema 9 En un triángulo ABC se cumple que $2p\,(a + b - c) = 3ab$. Halla "C"

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

Resolución:

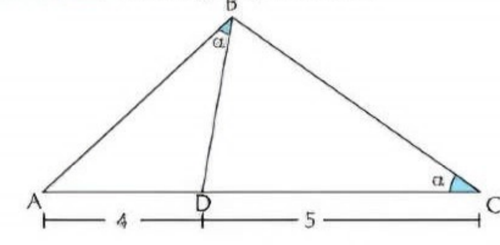
$$2p = a + b + c$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Reemplazando en la condición:

$$2p\,(a + b - c) = 3ab$$
$$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$$
$$(a + b)^2 - (c)^2 = 3ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab$$
$$a^2 + b^2 - ab = c^2$$
$$a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$-ab = -2ab \cos C$$
$$\frac{1}{2} = \cos C$$
$$\therefore \ C = 60°$$ **Rpta. C**

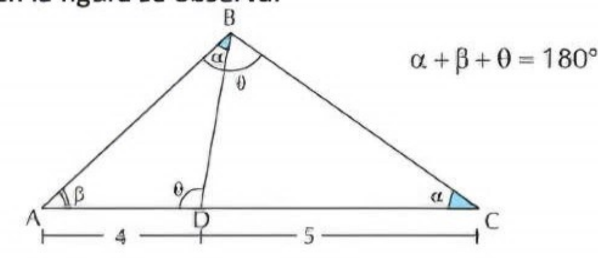
Problema 10 En la figura, halla AB.



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Resolución:

En la figura se observa:



$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

En el Δ ADB. (Ley de senos.)

$$\frac{AB}{\text{sen}\theta} = \frac{4}{\text{sen}\alpha} \rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \alpha} \quad \ldots (1)$$

En el Δ ABC. (Ley de senos.)

$$\frac{9}{\text{sen } \theta} = \frac{AB}{\text{sen } \alpha} \rightarrow \frac{9}{AB} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \alpha} \quad \ldots (2)$$

De (1) y (2) tenemos: $\frac{AB}{4} = \frac{9}{AB} \rightarrow (AB)^2 = 36$

$$\therefore \ AB = 6$$ **Rpta. B**

2. Calcular semiángulos en función de los lados y del semiperímetro de un triángulo

Fórmulas de Briggs

Estas fórmulas relacionan las funciones trigonométricas de la mitad de los ángulos de un triángulo con los lados de dicho triángulo.

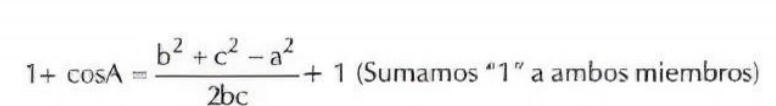
Dado un Δ ABC. expresar $\cos\frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b y c) y el semiperímetro (p)

Resolución:

En el Δ ABC, por la ley de cosenos, se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$$

Donde: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$



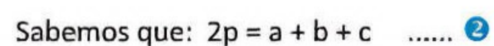
$$1 + \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1 \text{ (Sumamos "1" a ambos miembros)}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc} = \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc} \rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} \text{ ...... ❶}$$

NOTA

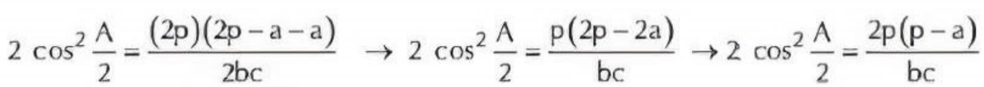
Semiperímetro = p
Luego: perímetro = 2p
Σ de lados = 2p
∴ $a + b + c = 2p$



Sabemos que: $2p = a + b + c$ ...... ❷

De donde: $2p - a = b + c$ ...... ❸

Reemplazando ❷ y ❸ en ❶:



$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(2p)(2p-a-a)}{2bc} \rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(2p-2a)}{bc} \rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \text{(Sólo se tomará el valor positivo)}$$

Luego: $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ $\quad\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ $\quad\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

Dado un Δ ABC, expresar $\text{sen}\frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b, c) y el semiperímetro (p)

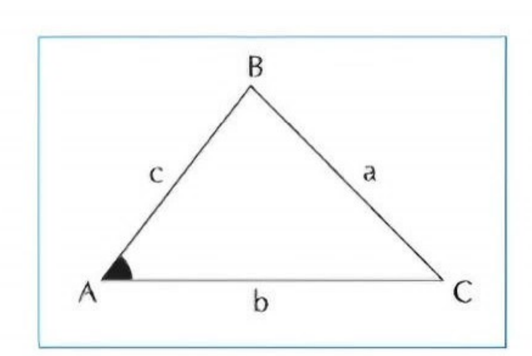
Resolución:

En el Δ ABC, por la ley de cosenos, se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Donde:

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; multiplicamos por "–1" a ambos miembros.



$$(-1)\cos A = (-1)\cdot\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] \rightarrow -\cos A = \frac{-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$ (Sumamos "1" a ambos miembros)

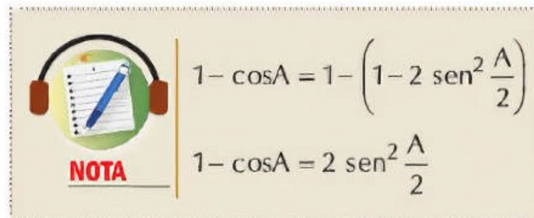
$$1-\cos A = \frac{-b^2-c^2+a^2}{2bc}+1 \rightarrow 1-\cos A = \frac{-b^2-c^2+a^2+2bc}{2bc}$$

$$1-\cos A = \frac{a^2-\left(b^2-2bc+c^2\right)}{2bc} \rightarrow 1-\cos A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} \rightarrow 1-\cos A = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

$$2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

Pero: $a+b+c=2p$ .... ❷

$$\begin{cases} a+b=2p-c & \text{....... ❸} \\ a+c=2p-b & \text{....... ❹} \end{cases}$$



$$1-\cos A = 1-\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{A}{2}\right)$$

$$1-\cos A = 2\,\text{sen}^2\frac{A}{2}$$

Reemplazando ❸ y ❷ en ❶:

$$2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(2p-c-c)(2p-b-b)}{2bc} = \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{2bc} \rightarrow 2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{4(p-c)(p-b)}{2bc}$$

$$\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \rightarrow \therefore\ \text{sen}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$ (Sólo se tomará el valor positivo)

Luego: $\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ $\quad$ $\text{sen}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ $\quad$ $\text{sen}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

Dado un Δ ABC, expresar $\text{tg}\,\frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b, c) y del semiperímetro (p).

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ .... ❶ $\quad$ $\cos\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ..... ❷

Dividimos miembro a miembro ❶ y ❷; obteniendo:

$$\frac{\text{sen}\,\frac{A}{2}}{\cos\,\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}{\frac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \rightarrow \therefore\ \text{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Por simple deducción: $\text{tg}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $\quad$ $\text{tg}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

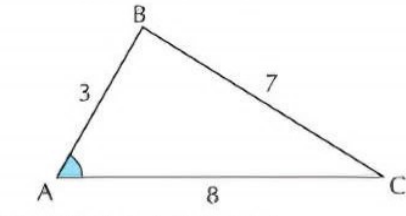
Ejercicios resueltos

1 En un triángulo ABC se cumple que a = 7; b = 8; c = 3. Calcular $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

Resolución:

De acuerdo a los datos:



$$p = \frac{7+8+3}{2}$$

$$p = 9$$

Además tenemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(9-8)(9-3)}{8\cdot 3}} = \sqrt{\frac{6}{24}} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

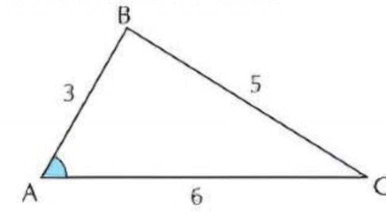
$$\therefore \operatorname{sen}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$ **Rpta. B**

2 En un triángulo ABC se cumple a = 5 ; b = 6 ; c = 3. Calcula $E = 7\ tg^2\frac{A}{2} - 2$.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Resolución:

Del enunciado tenemos:



$$p = \frac{5+6+3}{2}$$

$$p = 7$$

Calculamos "$tg\frac{A}{2}$"

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(7-6)(7-3)}{7(7-5)}} = \sqrt{\frac{4}{14}}$$

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2}{7}} \rightarrow tg^2\frac{A}{2} = \frac{2}{7}$$

Reemplazando en "E"

$$E = 7\left(\frac{2}{7}\right) - 2$$

$$\therefore E = 0$$ **Rpta E**

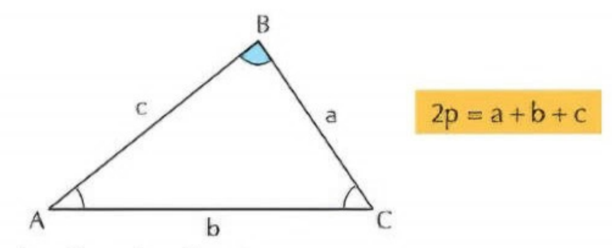
3 Dado un triángulo ABC, simplifica la expresión:

$$E = a\ \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + b\ \operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + c$$

A) 0 B) p C) 2p D) 3p E) 4p

Resolución:

De acuerdo a los datos:



$$2p = a + b + c$$

De las fórmulas de Briggs:

i) $$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$a\ \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} = \frac{(p-a)(p-c)}{c}$$

ii) $$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$b\cdot\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{c}$$

Reemplazando en la expresión "E".

$$E = \frac{(p-a)(p-c)}{c} + \frac{(p-b)(p-c)}{c} + c$$

$$E = \frac{(p-c)[(p-a)+(p-b)]}{c} + c$$

$$E = \frac{(p-c)[2p-a-b]}{c} + c$$

$$E = \frac{(p-c)[\cancel{a}+\cancel{b}+c-\cancel{a}-\cancel{b}]}{c} + c$$

$$E = \frac{(p-c)[\cancel{c}]}{\cancel{c}} + c$$

$$E = p - c + c$$

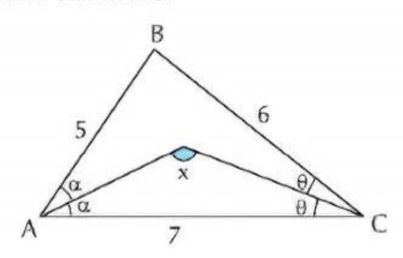
$$\therefore E = p$$ **Rpta. B**

4 En un triángulo ABC, se cumple que $a = 6$, $b = 7$, $c = 5$. Calcula el seno del mayor ángulo formado por las bisectrices interiores de los ángulos A y C.

A) $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$ B) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ C) $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ D) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Resolución:

Del enunciado tenemos:



Por propiedad: $x = 90° + \dfrac{B}{2}$

Luego: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(90° + \dfrac{B}{2}\right)$

$$\operatorname{sen} x = \cos\frac{B}{2}$$

Calculamos "$\cos\dfrac{B}{2}$": $2p = 6 + 7 + 5 \Rightarrow p = 9$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \rightarrow \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{9(9-7)}{6\cdot 5}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \rightarrow \cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Reemplazamos ❷ en ❶:

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{15}}{5}}$$ **Rpta. E**

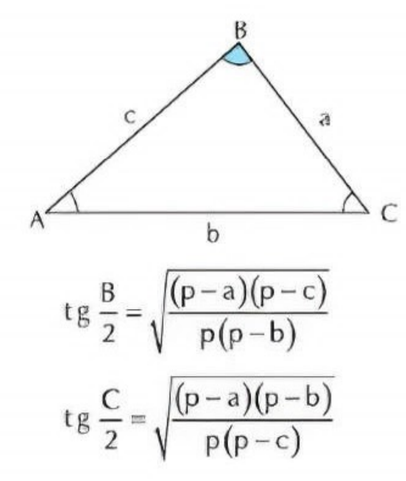
5 En un triángulo ABC, reduce la expresión:

$$M = a + p \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

A) 0 B) 1 C) p D) 2p E) 3p

Resolución:

Del enunciado:



$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Reemplazando en la expresión "M":

$$M = a + p \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$M = a + p \cdot \sqrt{\frac{(p-a)^2 (p-b)(p-c)}{p^2 (p-b)(p-c)}}$$

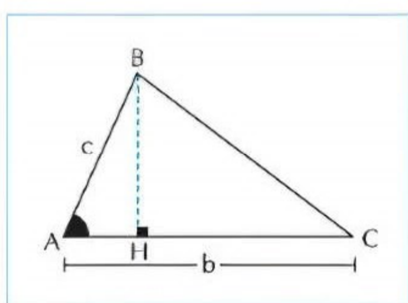
$$M = a + p\left[\frac{(p-a)}{p}\right]$$

$$M = a + p - a$$

$$\therefore \boxed{M = p}$$ **Rpta. C**

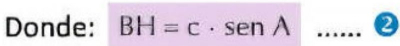
Área de la región triangular

I El área de la región de todo triángulo, es igual al semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.



Por geometría: $S = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \rightarrow S = \dfrac{b \times BH}{2}$ ..... ❶

En el ◺ AHB: $\operatorname{sen} A = \dfrac{BH}{c}$




Donde: $\boxed{BH = c \cdot \operatorname{sen} A}$ ...... ❷

Reemplazando ❷ en ❶:

$$S = \frac{bc \cdot \operatorname{sen} A}{2} \rightarrow \therefore \boxed{S = \frac{bc}{2} \cdot \operatorname{sen} A}$$ **(Fórmula)**

II Si $S=\frac{b\cdot c}{2}\cdot \text{sen } A$ ... ❶ Por la ley de senos: $\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}=2R$

De donde: $\frac{a}{\text{sen } A}=2R \rightarrow$ $\text{sen } A=\frac{a}{2R}$ ... ❶

Reemplazando ❷ en ❶: $S=\frac{bc}{2}\cdot\left(\frac{a}{2R}\right)\rightarrow \therefore$ $S=\frac{abc}{4R}$ **(Fórmula)**

Si: $S=\frac{b\cdot c}{2}\cdot \text{sen } A$ ... **(θ)** Por ángulo mitad: $\text{sen } A=2\,\text{sen}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$ ... **(β)**

Reemplazando (β) en (θ): $S=\frac{bc}{2}\cdot\left(2\,\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\rightarrow S=bc\cdot\left(\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$ ... **(ω)**

De las fórmulas de Briggs: $\text{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ y $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

Reemplazando el valor de estas fórmulas en (ω):

$$S=bc\cdot\left[\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\right] \qquad S=bc\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)p(p-a)}{(bc)^2}}=bc\cdot\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$$

$$\therefore\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad \textbf{(Fórmula)}$$

Ejercicios resueltos

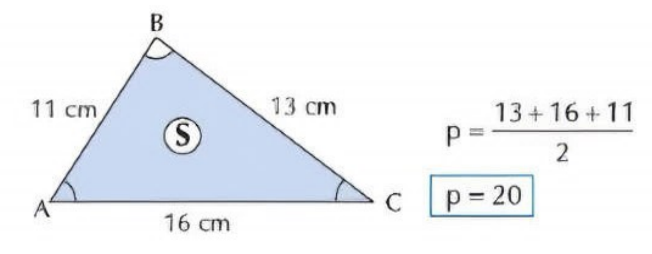
1 Halla el área de la región triangular ABC, siendo a = 13 cm; b = 16 cm y c = 11 cm.

A) $12\sqrt{35}\ cm^2$ B) $10\sqrt{30}\ cm^2$ C) $9\sqrt{26}\ cm^2$

D) $8\sqrt{21}\ cm^2$ E) $7\sqrt{15}\ cm^2$

Resolución:

De acuerdo a los datos:



$p=\frac{13+16+11}{2}$

$p=20$

Calculamos el área del Δ ABC:

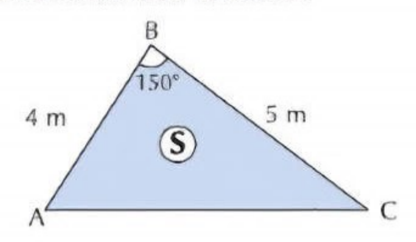
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S=\sqrt{20(20-13)(20-16)(20-11)}$$
$$S=\sqrt{20\cdot7\cdot4\cdot9}=\sqrt{144\cdot35}$$
$$\therefore\ S=12\sqrt{35}\ cm^2$$ **Rpta. A**

2 Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m, además el ángulo comprendido entre ellos es de 150°. Calcula el área de la región triangular.

A) $2\ m^2$ B) $3\ m^2$ C) $4\ m^2$ D) $5\ m^2$ E) $6\ m^2$

Resolución:

Graficamos de acuerdo a los datos:



Calculamos el área del Δ ABC:

$$S=\frac{ac}{2}\cdot \text{sen } B$$
$$S=\frac{5\cdot4}{2}\cdot \text{sen } 150°$$
$$S=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\ S=5\ m^2$$ **Rpta. D**

3 En un triángulo ABC, de área igual a S, reduce: $E = a^2 \cdot \text{sen } 2B + b^2 \cdot \text{sen } 2A$

A) 8S B) 6S C) 4S D) 2S E) S

Resolución:

Recordemos las funciones trigonométricas del ángulo doble:

$$\boxed{\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x}$$

Entonces:

$$E = a^2 (2 \text{ sen } B \cos B) + b^2 (2 \text{ sen } A \cos A)$$

$$E = 2a^2 \cdot \text{sen } B \cos B + 2b^2 \cdot \text{sen } A \cos A$$

$$E = 2\left(a^2 \cdot \text{sen } B \cos B + b^2 \cdot \text{sen } A \cos A\right)$$

De la ley de senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

$$\boxed{a \text{ sen } B = b \text{ sen} A}$$

Ordenando convenientemente y reemplazando tenemos:

$$E = 2\left[(a \text{ sen } B)(a \cos B) + (b \text{ sen } A)(b \cos A)\right]$$

$$E = 2\left[(b \text{sen } A)(a \cos B) + (a \text{ sen } B)(b \cos A)\right]$$

$$E = 2\left[ab \text{ sen} A \cdot \cos B + ab \cos A \cdot \text{sen } B\right]$$

$$E = 2ab\left[\underbrace{\text{sen } A \cdot \cos B + \cos A \cdot \text{sen } b}\right]$$

$$E = 2ab \text{ sen } (A + B)$$

Pero:

$$A + B + C = 180°$$

$$A + B = 180° - C$$

$$\text{sen } (A + B) = \text{sen } (180° - C)$$

$$\text{sen } (A + B) = \text{sen } C$$

Reemplazando:

$$E = 2ab \text{ sen } C$$

$$E = 4\underbrace{\left[\frac{ab}{2} \text{ sen } C\right]}_{S}$$

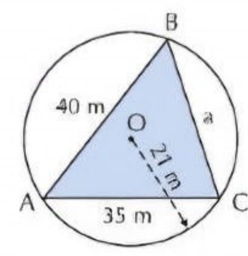
$$\therefore \boxed{E = 4S} \quad \textbf{Rpta. C}$$

4 Dos lados de un triángulo miden 40 m y 35 m. Siendo el área de la región de dicho triángulo 550 m^2 y el radio de la circunferencia circunscrita 21 m; halla la medida del tercer lado.

A) 30 m B) 31 m C) 32 m
D) 33 m E) 34 m

Resolución:

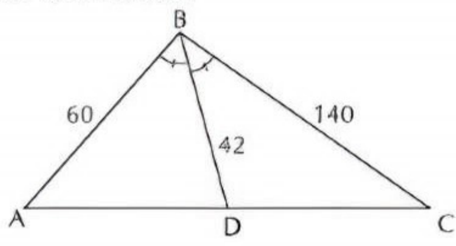
De acuerdo al enunciado tenemos:



$$S = \frac{abc}{4R} \rightarrow 550 = \frac{a \cdot 35 \cdot 40}{4 \cdot 21}$$

$$550 = \frac{50a}{3} \quad \therefore \boxed{a = 33 \text{ m}} \quad \textbf{Rpta. D}$$

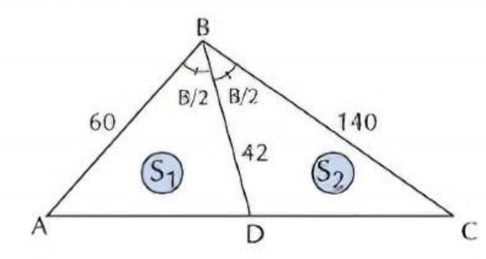
5 En la figura mostrada. Calcula la medida del ángulo "B", siendo BD bisectriz.



A) 30° B) 45° C) 60° D) 120° E) 150°

Resolución:

Analizando la figura:



$$S \, \Delta ABC = S_1 + S_2$$

$$\frac{60 \cdot 140}{2} \text{sen } B = \frac{60 \cdot 42}{2} \text{ sen } \frac{B}{2} + \frac{42 \cdot 140}{2} \text{ sen } \frac{B}{2}$$

$$4200 \text{ sen } B = 1260 \text{ sen } \frac{B}{2} + 2940 \text{ sen } \frac{B}{2}$$

$$4200 \text{ sen } B = 4200 \text{ sen } \frac{B}{2}$$

$$\underbrace{\text{sen } B} = \text{sen } \frac{B}{2}$$

$$2 \text{ sen } \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \text{sen } \frac{B}{2}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{B}{2} = 60°$$

$$\therefore \boxed{B = 120°} \quad \textbf{Rpta. D}$$

Amplía tus conocimientos



Laboratorios Incas



Buscando elementos peruanos para trabajar en clases de Matemática y Física, encontré esta belleza que puede ser fuente motivadora para la construcción de diferentes temas:

Moray está ubicada sobre una meseta, en el Valle Sagrado de los Incas, aproximadamente a 53 km de la ciudad del Cusco y a 7 km del poblado de Maras, a unos 3,500 m s.n.m. Es un sitio arqueológico único con grandes terrazas circulares construidas sobre las depresiones naturales del terreno. Fue reconocido en 1932 por la expedición Shippee-Johnson.

Los Inkas aparentemente las utilizaron como un laboratorio agrícola, muy avanzado para su época.

La palabra Moray se relaciona con la cosecha del maíz llamada Aymora, con el mes de mayo que responde al mismo nombre, y con la papa deshidratada llamada moraya o moray.

Lo interesante de Moray son sus andenes circulares construidos de arriba hacia abajo.

Se cree que Moray pudo haber sido un centro de investigación agrícola, donde se recrearon aproximadamente 20 tipos de climas favorecidos por la ubicación de sus andenes; las terrazas que se encuentran en la parte más baja presentaban temperaturas más altas a las que están en la parte superior, donde hace más frío.

Edward Ranney cree que los incas utilizaron estas terrazas para el sembrío de sus plantas preciadas. Mientras que, John Earls supone que ciertas piedras de forma vertical, serían indicadores de los límites de las sombras del atardecer durante equinoccios y solsticios.

Otras hipótesis indican que este complejo arquitectónico pudo servir para el cálculo de la producción anual en las diferentes partes del Tahuantinsuyo, o a la gran necesidad de los campesinos por obtener mayor cantidad de maíz.

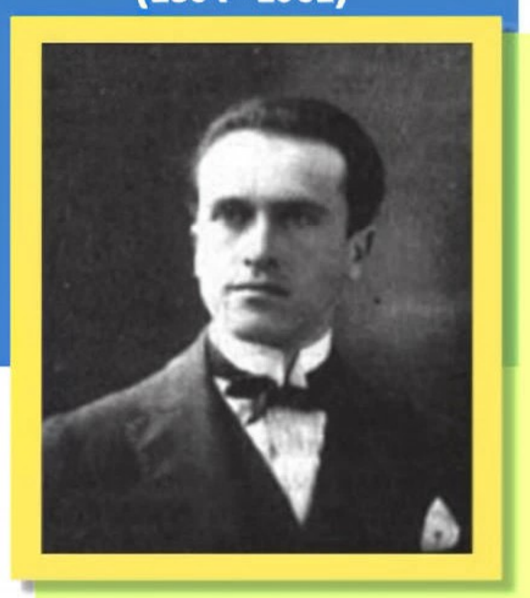


laboratoriomatematica.blogspot.com

Cristóbal de Losada y Puga

(1894 - 1961)

Personaje de la Matemática



La niñez y adolescencia de Cristóbal de Losada y Puga (1894 - 1961) transcurrió en uno de los departamentos históricos del ande peruano como lo es Cajamarca, paraje donde, seguramente, inició su romance con las ciencias matemáticas.

En 1923 obtuvo el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos con la tesis *Sobre las curvas de Rodadura*. También estudió en la Escuela de Ingenieros, donde obtuvo el título de Ingeniero de Minas.

Se desempeñó como docente en la Escuela Militar de Chorrillos, donde enseñó Aritmética y Mecánica Elemental. Su fructífera labor como profesor lo llevó luego a importantes instituciones educativas del país, como la Universidad de San Marcos, la Escuela Nacional de Ingenieros y la Pontificia Universidad Católica. En dichas universidades enseñó, entre otros cursos, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo de Probabilidad y Física Matemática, Mecánica Racional, Resistencia de Materiales y Cálculo Infinitesimal.

FECUNDA LABOR

Eran principios de 1931. El país atravesaba una crisis política y social. Augusto B. Leguía ponía fin a su gobierno que duró 11 años. Cristóbal de Losada y Puga asumió en ese entonces la dirección de uno de los gremios industriales más importantes del país: la Sociedad Nacional de Industrias.

Luego, durante el gobierno de José Luis Bustamante y Rivero fue nombrado ministro de Educación. En dicho cargo permaneció 10 meses, tiempo en el cual se impulsó el desarrollo educacional del país, especialmente en los niveles primarios y secundarios que se encontraban muy desarticulados.

Asimismo, fue director de la Biblioteca Nacional; en dicha institución pública le guardan el mejor de los recuerdos, debido a la constante preocupación que el destacado matemático Cristóbal de Losada y Puga mostró por la situación laboral de los trabajadores. En 1938 fue Decano de la Universidad Católica, donde dirigió la revista de la citada casa de estudios. Otra faceta poco difundida es la de periodista. Losada y Puga dirigió la *revista Fénix*, de la Biblioteca Nacional, y además participó en la fundación de la revista *Mercurio Peruano*.

La labor profesional de Cristóbal de Losada y Puga no se centra sólo en el país. Su obra ha sido también apreciada en el extranjero donde dictó muchas conferencias magistrales.

No debe de extrañar, entonces, su incorporación en la Real Academia de Ciencia Físicas y Naturales de Madrid y la Sociedad Francesa de Física; asimismo fue miembro de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, la Asociación Peruana para el Progreso de la Ciencia, la Academia Peruana de la Lengua, entre otras instituciones.

PRODUCCIÓN BIBLIOGRÁFICA

Su contribución bibliográfica más importante se titula *Curso de Análisis Matemático*, un ejemplo de tratado de su especialidad. Figuran además Las anomalías de la gravedad; su interpretación geológica, sus aplicaciones mineras, Contribución a la teoría matemática de las clepsidras y de los filtros, Galileo, Copérnico, entre otras publicaciones.

Entre los principales reconocimientos a su trayectoria profesional destaca la Gran Cruz de la Orden de Alfonso X el sabio, otorgado nada menos que por el gobierno español en 1949. Una distinción justa y merecida para uno de los matemáticos peruanos más representativos del siglo XX.

sisbib.unmsm.edu.pe

Investiga:



1. ¿Cuál es tu opinión sobre este matemático peruano?
2. ¿Conoces alguna persona que también ha destacado en las matemáticas?



Geometría del espacio y geometría analítica



Corita, si se funden 8 esferas de plomo sólido, cada una de 5 cm de radio y se forma una esfera de plomo de mayor tamaño, ¿cuál es el radio de la esfera formada?

Memo, cada esfera pequeña tiene un volumen de $\frac{4}{3}\pi\ (5\ cm)^3$, como son 8 el volumen total es $8 . \frac{4}{3}\pi\ (5\ cm)^3$. Si el radio de la esfera mayor es x, su volumen es $\frac{4}{3}\pi . x^3$, entonces $\frac{4}{3}\pi . x^3 = 8 . \frac{4}{3}\pi\ (5\ cm)^3$, de donde $x = 10\ cm$.

¿Cómo se resuelve la ecuación $\frac{4}{3}\pi . x^3 = 8 . \frac{4}{3}\pi (5\ cm)^3$?









Competencia	Temas
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Poliedros o sólidos geométricos. Teorema de Euler. Poliedros regulares. Prisma: prisma oblicuo, prisma recto, prisma regular. Área lateral, total y volumen del prisma. Paralelepípedo rectangular . Pirámide. Área lateral, total y volumen de una pirámide regular. Cilindro de revolución: área lateral, total, volumen. Cono de revolución: área lateral, total, volumen. Esfera: área de la superficie esférica y volumen de la esfera.
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Ecuaciones de la circunferencia. Ecuaciones de la parábola. Longitud del lado recto de la parábola. Ecuaciones de la elipse. Longitud del lado recto. Ecuaciones de la hipérbola. Hipérbolas conjugadas. Hipérbola equilátera.

ENFOQUE ORIENTACIÓN AL BIEN COMÚN

Valor	Actitudes que suponen
Empatía	Identificación afectiva con los sentimientos del otro, disposición para apoyar y comprender sus circunstancias.

Recupera saberes previos

Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:



1 En su cumpleaños Ricardo recibió un regalo, dentro de una caja que tenía la forma de un cubo y cada arista medía 24 cm .



a. ¿Cuál es el perímetro de cada cara?

b. ¿Cuál es el área de cada cara?

2 Un perfume se encuentra dentro de la caja que se muestra.



La tapa superior es una región cuadrada y su lado mide 12 cm , las caras laterales son regiones rectangulares y la altura de la caja mide 22 cm .

a. ¿Cuál es el área de la tapa?

b. ¿Cuál es el área de cada cara lateral?

3 Un tarro de leche tiene las siguientes medidas: diámetro de la tapa = 7, 5 cm
altura del tarro = 10, 3 cm



a. ¿Cuál es el área de la tapa?

b. Si se retira la envoltura que rodea el tarro, ¿cuál es su área?

4 La caja que se muestra tiene las siguientes características:

a. La base tiene la forma de un triángulo equilátero y su lado mide 10 cm .

b. Sus caras laterales son regiones rectangulares y la altura de la caja es 26 cm .

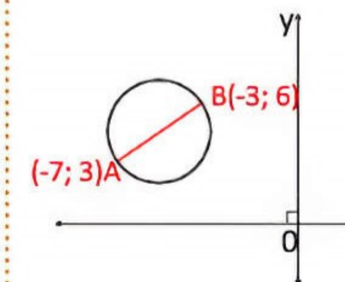


I. ¿Cuál es el área de la base?

II. ¿Cuál es el perímetro de una cara lateral?

III. ¿Cuál es el área de una cara lateral?

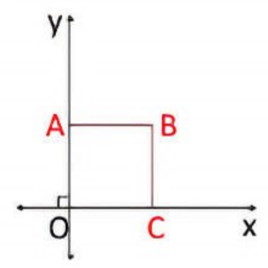
5 El segmento AB es diámetro de la circunferencia.



a. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

b. ¿Cuál es el área del círculo?

6 El cuadrilátero OABC es un cuadrado cuyo lado mide 6 cm .

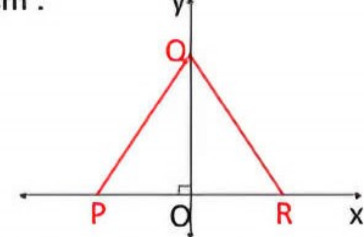


a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A?

b. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

c. ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y C?

7 El triángulo PQR es equilátero y su lado mide 9 cm .



a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P?

b. ¿Cuáles son las coordenadas del punto Q?

c. ¿Cuánto mide el segmento OQ?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Emplea las fórmulas del área de regiones rectangulares y cuadradas para calcular el área lateral y total de paralelepípedos rectangulares, también su volumen.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.	Afirma que en una pirámide regular sus caras laterales son triángulos isósceles; lo demuestra considerando que todas las aristas laterales son hipotenusas de triángulos rectángulos que tienen como catetos a la altura de la pirámide y el radio de la base.

Geometría del Espacio

Poliedros o sólidos geométricos

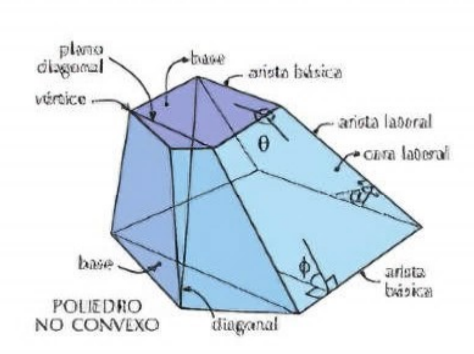
Poliedro

Es la porción de espacio limitado por 4 o más polígonos planos no coplanares llamados caras.

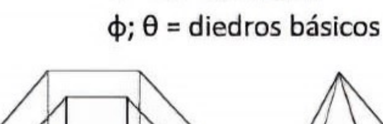
Un poliedro puede ser convexo o no convexo.

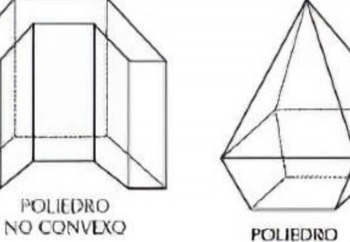
α = diedro lateral

$\phi; \theta$ = diedros básicos



POLIEDRO NO CONVEXO




POLIEDRO NO CONVEXO

POLIEDRO CONVEXO


POLIEDRO NO CONVEXO

Teorema de Euler

En un poliedro se cumple que: el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos.

$$C+V = A+2$$

Donde: C = # de caras ; V = # de vértices ; A = # de aristas

Propiedad

Si un poliedro se encuentra formado por polígonos de diferente número de lados, el número de artistas se calcula de la siguiente manera:

$$A=\frac{n_1 \cdot P_1 + n_2 \cdot P_2 + n_3 \cdot P_3 + \dots}{2}$$

Donde: n_1, n_2, n_3, ... es el número de lados de cada polígono.

P_1, P_2, P_3, ... es el número de polígonos que nos dan.

Ejemplo 1 Calcula el número de aristas de un poliedro que está formado por 8 triángulos, 5 cuadriláteros y 6 pentágonos.

Resolución:

8 triángulos $\begin{cases} n_1 = 3 \\ P_1 = 8 \end{cases}$ $\qquad A = \dfrac{n_1 \cdot P_1 + n_2 \cdot P_2 + n_3 \cdot P_3}{2}$

5 cuadriláteros $\begin{cases} n_2 = 4 \\ P_2 = 5 \end{cases}$ $\qquad A = \dfrac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{2}$

6 pentágonos $\begin{cases} n_3 = 5 \\ P_3 = 6 \end{cases}$ $\qquad \therefore \; A = 37$

Ejemplo 2 Determina el número de caras, vértices y aristas de un poliedro que se encuentra formado por 6 triángulos, 4 pentágonos y 8 hexágonos convexos.

Resolución:

Cálculo del número de caras (C)

Este poliedro está formado por $6\Delta_s$, $4⬠_s$, $8⬡_s$

Entonces posee: 6 caras que son triángulos
4 caras que son pentágonos
8 caras que son hexágonos

Por lo tanto: $C = 6 + 4 + 8 \rightarrow \therefore \ C = 18$

Cálculo del número de vértices (A)

$6\Delta_s \begin{cases} n_1 = 3 \\ P_1 = 6 \end{cases}$ $\quad 4⬠_s \begin{cases} n_2 = 5 \\ P_2 = 4 \end{cases}$ $\quad 8⬡_s \begin{cases} n_3 = 6 \\ P_3 = 8 \end{cases}$

$$A = \frac{n_1 \cdot P_1 + n_2 \cdot P_2 + n_3 \cdot P_3}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 8}{2} \rightarrow \boxed{A = 43}$$

Cálculo del número de vértices (V)

Usando el teorema de Euler: $C + V = A + 2$

$$18 + V = 43 + 2$$

$$\therefore \ V = 27$$

Por lo tanto:
El poliedro tendrá: 18 caras, 43 aristas y 27 vértices.

Poliedros regulares

Un poliedro es regular cuando sus caras son polígonos regulares de igual número de lados, sólo existen cinco poliedros regulares que son: el **tetraedro**, el **hexaedro**, el **octaedro**, el **dodecaedro**, el **icosaedro**.

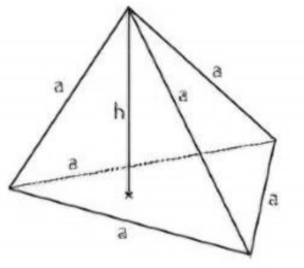
Dos poliedros son **conjugados**, cuando el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro.

Nombre	C	V	A	Forma de las caras
Tetraedro regular	4	4	6	
Hexaedro regular o cubo	6	8	12	
Octaedro regular	8	6	12	
Dodecaedro regular	12	20	30	
Icosaedro regular	20	12	30	

C = N° de caras, V = N° de vértices, A = N° de aristas

Tetraedro regular

a = longitud de la arista.
h = longitud de la altura.

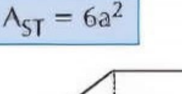


Área de la superficie total: $A_{ST} = a^2\sqrt{3}$

Volumen: $V = \dfrac{a^3}{12}\sqrt{2}$

Altura: $h = \dfrac{a}{3}\sqrt{6}$

Hexaedro regular



$A_{ST} = 6a^2$

a = longitud de la arista
D = longitud de la diagonal

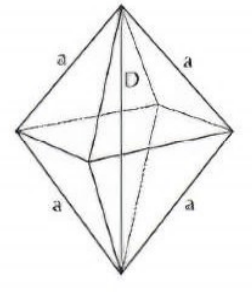
Área de la superficie total:

Volumen: $V = a^3$

Diagonal: $D = a\sqrt{3}$

Octaedro regular

a = longitud de la arista
D = longitud de la diagonal



Área de la superficie total: $A_{ST} = 2a^2\sqrt{3}$

Volumen: $V = \frac{a^3}{3}\cdot\sqrt{2}$

Diagonal: $D = a\sqrt{2}$

Dodecaedro regular



Icosaedro regular

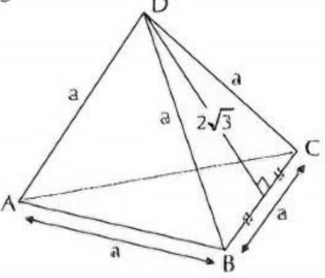


Problemas resueltos — SOBRE POLIEDROS

1 La altura de una de las caras de un tetraedro regular mide $2\sqrt{3}$. Determina el área de la superficie total.

A) $15\sqrt{3}$ B) $14\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$
D) $16\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

Resolución:



En el ΔBDC equilátero:

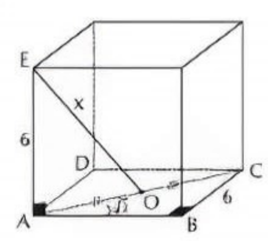
$$2\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \rightarrow a = 4$$

Luego: $A_T = a^2\sqrt{3} = 4^2\sqrt{3}$ ∴ $A_T = 16\sqrt{3}$ **Rpta. D**

2 En un cubo de 6 cm de arista, calcula la distancia de uno de sus vértices al centro de una de sus caras opuestas.

A) $3\sqrt{6}$ cm B) $2\sqrt{6}$ cm C) $4\sqrt{6}$ cm
D) $\sqrt{6}$ cm E) $2\sqrt{3}$ cm

Resolución:



En el ABC: $AC = 6\sqrt{2}$ → $AO = OC = 3\sqrt{2}$

En el EAO usando el teorema de Pitágoras:

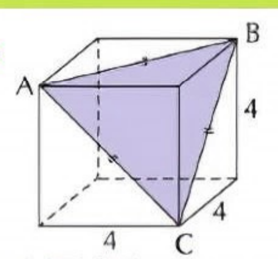
$$x^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2 \rightarrow x^2 = 54$$

∴ $x = 3\sqrt{6}$ **Rpta. A**

3 En un cubo cuya arista mide 4 cm, encontrar el área de la región triangular que se forma al unir tres vértices del cubo. (Que no pertenecen a una misma cara)

A) $8\sqrt{2}$ cm B) $8\sqrt{3}$ cm C) $4\sqrt{3}$ cm
D) $16\sqrt{2}$ cm E) $16\sqrt{3}$ cm

Resolución:



Vemos que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ son las diagonales de tres caras del cubo.

$AB = BC = AC = 4\sqrt{2}$

El ΔABC es equilátero:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{3}$$

∴ $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$ **Rpta. B**

4 Determina el número de vértices de un poliedro que se encuentra limitado por 5 triángulos, 4 cuadriláteros y 5 pentágonos.

A) 16 B) 15 C) 24 D) 14 E) 12

Resolución:

$5\Delta_s$ $4\square_s$ $5⬠_s$

Cálculo del número de **caras**:

$C = 5 + 4 + 5 \rightarrow$ ∴ $C = 14$

Cálculo del número de **aristas**:

$$A = \frac{5\cdot3 + 4\cdot4 + 5\cdot5}{2} \rightarrow \therefore A = 28$$

Cálculo del número de **vértices**:

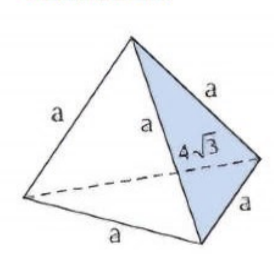
Por el teorema de Euler: $C + V = A + 2$

$14 + V = 28 + 2$ ∴ $V = 16$ **Rpta. A**

5 Halla el volumen de un tetraedro regular, si el área de la región de una de sus caras es $4\sqrt{3}$

A) $16\sqrt{2}$ B) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{16}{5}\sqrt{3}$ E) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Resolución:



$$4\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \rightarrow a = 4$$

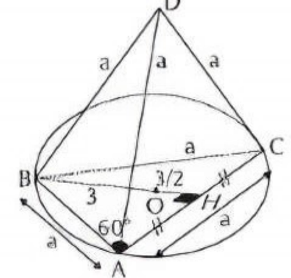
$$\text{Volumen} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2} = \frac{4^3}{12}\sqrt{2}$$

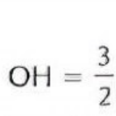
$$\therefore \boxed{\text{Volumen} = \frac{16\sqrt{2}}{3}}$$ **Rpta. C**

6 Calcula el área de la superficie total de un tetraedro regular, una de sus caras se encuentra inscrita en una circunferencia de 3 cm de radio.

A) $18\sqrt{3}$ cm² B) $9\sqrt{3}$ cm² C) $24\sqrt{3}$ cm² D) $27\sqrt{3}$ cm² E) $30\sqrt{3}$ cm²

Resolución:





$$OH = \frac{3}{2}$$

En el $\triangle$ AHB:

$$BH = \frac{a}{2}\sqrt{3} \rightarrow 3 + \frac{3}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

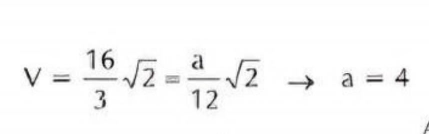
Luego: $A_T = a^2\sqrt{3} = (3\sqrt{3})^2\sqrt{3}$

$$\therefore \boxed{A_T = 27\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$$ **Rpta. D**

7 El volumen de un tetraedro regular es $\frac{16}{3}\sqrt{2}$, calcula el área de la región triangular que se forma al unir los puntos medios de tres aristas.

A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ B) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

Resolución:

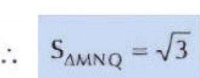


$$V = \frac{16}{3}\sqrt{2} = \frac{a}{12}\sqrt{2} \rightarrow a = 4$$

ΔADB: $MN = \frac{4}{2} = 2$



$$S_{\Delta MNQ} = \frac{2^2}{4}\sqrt{3}$$

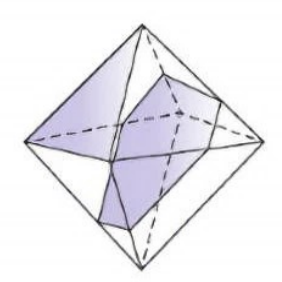


$$\therefore \boxed{S_{\Delta MNQ} = \sqrt{3}}$$ **Rpta. E**

8 Al cortar un octaedro regular por un plano paralelo a una de sus caras se obtiene un polígono de:

A) 7 lados B) 6 lados C) 8 lados
D) 5 lados E) 4 lados

Resolución:

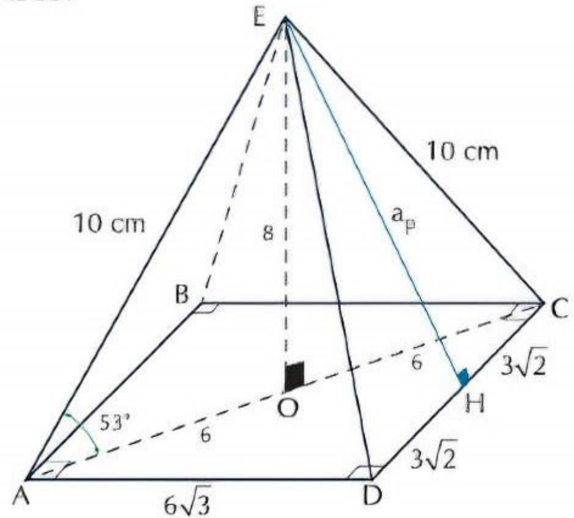


$\therefore$ **Se obtiene un polígono de 6 lados.** **Rpta. B**

9 Determina el área de la superficie total de una pirámide de base cuadrada cuyas aristas laterales miden 10 cm y forman con el plano de la base ángulos que miden 53°.

Resolución:

Con los datos del enunciado dibujamos la pirámide E-ABCD.



- En la figura, observamos que $\triangle$ OAE es notable (53° y 37°).

$$\Rightarrow OE = 8 \text{ cm} \quad y \quad OA = 6 \text{ cm} = OC.$$

- Calculamos la apotema en el $\triangle$EHC usando el teorema de Pitágoras.

$$a_p^2 = 10^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a_p = \sqrt{82}\ \text{cm}$$

- Finalmente calculamos la superficie total.

$$a_p^2 = 10^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a_p = \sqrt{82}\ \text{cm}$$

$$A_{ST} = \frac{P_{Base} \times a_p}{2} + B$$

$$A_{ST} = \frac{4 \times 6\sqrt{2} \times \sqrt{82}}{2} + \left(6\sqrt{2}\right)^2$$

$$\boxed{A_{ST} = 24\left(\sqrt{41} + 3\right)\ \text{cm}^2}$$

Prisma

Es el sólido que se encuentra limitado por dos polígonos planos congruentes y paralelos entre sí llamados bases y por tres o más paralelogramos llamados caras laterales; esta sección se obtiene al trazar sobre un plano perpendicular las aristas laterales.

Nombre de los prismas

Se les nombra de acuerdo al número de lados que tienen las bases. Si las bases tienen 3 lados se llama prisma-triangular, si tiene 4 lados se llama prisma cuadrangular, si tiene 5 lados se llama prisma pentagonal, con 6 lados se llama prisma hexagonal, etc.

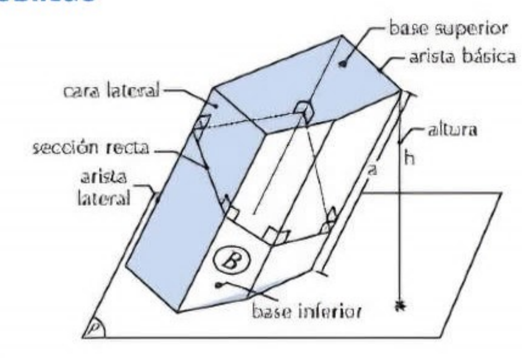
Clasificación

1.-Prisma oblicuo.- Las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

2.-Prisma recto.- Las aristas laterales son perpendiculares a las bases.

3.-Prisma regular.- Este prisma debe ser recto y sus bases deben ser polígonos regulares.

Prisma oblicuo



Fórmulas:

Área de la superficie lateral:

A_{SL} = suma de las áreas de todas las caras laterales

$$A_{SL} = P_{SR} \cdot a$$

Área de la superficie total:

A_{ST} = suma de las áreas de todas las caras

$$A_{ST} = A_{SL} + 2B$$

Volumen:

$$V = A_{SR} \cdot a$$
$$V = B \cdot h$$

Donde:

P_{SR} = perímetro de la sección recta

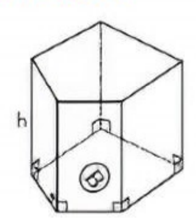
a = arista lateral

B = área de cada base

A_{SR} = área de la sección recta

h = altura

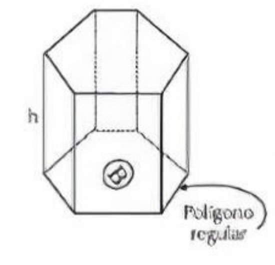
Prisma recto



$$A_{SL} = P_B \cdot h$$
$$A_{ST} = A_{SL} + 2B$$
$$V = B \cdot h$$

P_B = Perímetro de la base

Prisma regular



$$A_{SL} = P_B \cdot h$$
$$A_{ST} = A_{SL} + 2B$$
$$V = B \cdot h$$

Paralelepípedo

Se llama paralelepípedo al prisma que tiene seis caras que son paralelogramos.

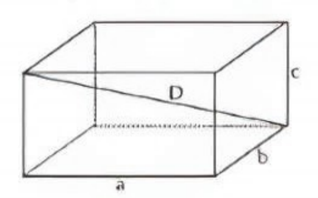
Se clasifica:

1.-Paralelepípedo recto.- Las bases son paralelogramos y las caras laterales son rectángulos.

2.-Paralelepípedo rectangular, rectoedro, ortoedro.- Las seis caras son rectángulos.

3.-Cubo o hexaedro regular.- Las seis caras son cuadrados.

4.-Romboedro.- Las seis caras son rombos.



Fórmulas:

$A_{SL} = 2a \cdot c + 2b \cdot c$

$A_{ST} = 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$

$V = a \cdot b \cdot c$

Diagonal:

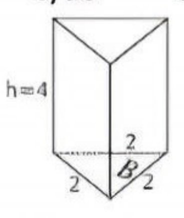
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Problemas resueltos — SOBRE PRISMAS

1 Calcula el área de la superficie lateral de un prisma triangular regular, su arista lateral mide 4 y su arista básica mide 2.

A) 12 B) 10 C) 18 D) 24 E) 30

Resolución:



Como el prisma es triangular regular, la base es un triángulo equilátero.

$A_{SL} = P_{B} \cdot h$

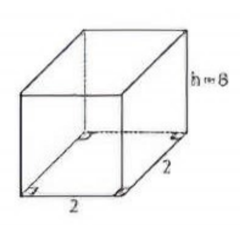
$\downarrow \quad \downarrow$

$A_{SL} = 6 \cdot 4 \quad \therefore \quad A_{SL} = 24$ **Rpta. D**

2 La base de un paralelepípedo recto es un cuadrado de 2 cm de lado, su altura es igual al perímetro de la base. Halla su volumen.

A) 16 cm³ B) 9 cm³ C) 30 cm³
D) 32 cm³ E) 18 cm³

Resolución:



Del dato: $h = P_B = 2 + 2 + 2 + 2 \quad \therefore \quad h = 8$

Ahora: $V = B \cdot h$

$\downarrow \quad \downarrow$

$V = 2^2 \cdot 8 \quad \therefore \quad V = 32\ cm^3$ **Rpta. D**

3 Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular, su altura es igual al radio "R" de la circunferencia circunscrita a la base.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}R^3$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^3$ C) $\sqrt{3}R^3$

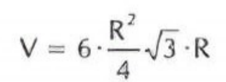
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}R^3$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$

Resolución:

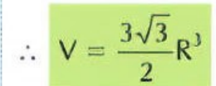
$V = B \cdot h$

$\downarrow$

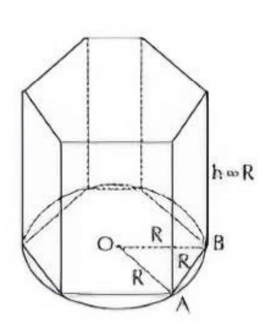
$V = 6 \cdot S_{\Delta AOB} \cdot h$



$V = 6 \cdot \frac{R^2}{4}\sqrt{3} \cdot R$



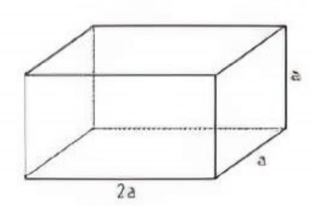
$\therefore \quad V = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^3$ **Rpta. B**



4 El volumen de un paralelepípedo rectangular es 128, el mayor lado de la base es igual al doble del otro lado, además la altura es igual al menor lado de la base. Halla el área de la superficie total del paralelepípedo.

A) 128 B) 180 C) 140 D) 150 E) 160

Resolución:



$V = 2a \cdot a \cdot a = 128 \rightarrow a = 4$

Calculamos el área total:

$A_{ST} = 2 \cdot 2a \cdot a + 2 \cdot 2a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a$

$A_{ST} = 10a^2$

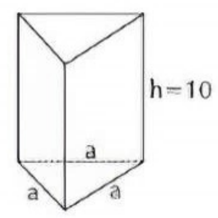
Reemplazando: $a = 4$

$A_{ST} = 10 \cdot 4^2 \quad \therefore \quad A_{ST} = 160$ **Rpta. E**

5 El volumen de un prisma triangular regular es $90\sqrt{3}$, su altura mide 10. Calcula el lado de su base.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Resolución:



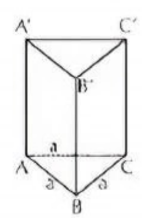
$$V = B \cdot h \quad \rightarrow \quad 90\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot 10$$

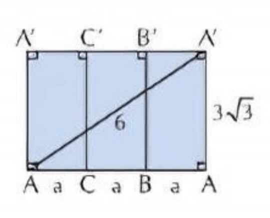
$\therefore$ $a = 6$ **Rpta. B**

6 La altura de un prisma triangular regular mide $3\sqrt{3}$, el desarrollo de su superficie lateral es un rectángulo cuya diagonal mide 6. Halla su volumen.

A) $\frac{81}{4}$ B) $\frac{80}{3}$ C) 20 D) $\frac{82}{5}$ E) $\frac{83}{4}$

Resolución:





Aplicando el teorema de Pitágoras

$$6^2 = (3a)^2 + (3\sqrt{3})^2 \rightarrow a = 3$$

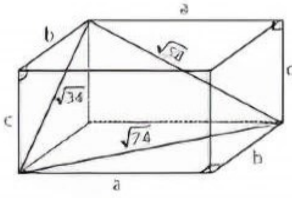
$$V = B \cdot h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h$$

$$V = \frac{3^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \qquad \therefore \ V = \frac{81}{4}$$ **Rpta. A**

7 Calcula el volumen de un paralelepípedo rectangular, las diagonales de sus caras miden $\sqrt{34}$, $\sqrt{58}$ y $\sqrt{74}$

A) 75 B) 85 C) 95 D) 100 E) 105

Resolución:



$(\sqrt{74})^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$ **1**

$(\sqrt{58})^2 = a^2 + c^2 \rightarrow$ **2**

$(\sqrt{34})^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$ **3**

Sumando **1** y **2**: $74 + 58 = 2a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow$ **4**

Reemplazando **3** en **4**:

$132 = 2a^2 + 34 \rightarrow a = 7$

En **1**: $74 = 7^2 + b^2 \rightarrow b = 5$

En **2**: $58 = 7^2 + c^2 \rightarrow c = 3$

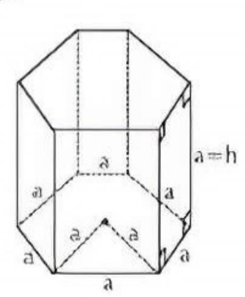
Entonces: $V = a \cdot b \cdot c$

$V = 7 \cdot 5 \cdot 3 \quad \therefore$ $V = 105$ **Rpta. E**

8 El área de la superficie lateral de un prisma hexagonal regular es 864, sus caras laterales son cuadrados. Halla el volumen del prisma.

A) 2 592 B) 2 590 C) 3 024
D) $2\,592\sqrt{3}$ E) $2\,488\sqrt{3}$

Resolución:



$A_L = P_B \cdot h$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$864 = 6a \cdot a \rightarrow a = 12$

$V = B \cdot h$

$$V = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot a = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot a^3$$

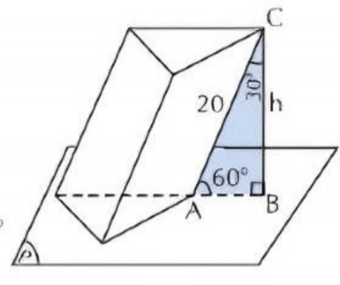
$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (12)^3$$

$\therefore$ $V = 2\,592\sqrt{3}$ **Rpta. D**

9 Las aristas laterales de un prisma oblicuo miden 20 y con el plano de la base forman un ángulo que mide 60°. ¿Cuánto mide la altura del prisma?

A) $10\sqrt{2}$ B) $10\sqrt{3}$ C) 5 D) 10 E) 15

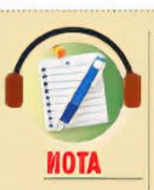
Resolución:



El $\triangle$ABC es de 30° y 60°

$$h = \frac{20}{2}\sqrt{3}$$

$\therefore$ $h = 10\sqrt{3}$ **Rpta. B**

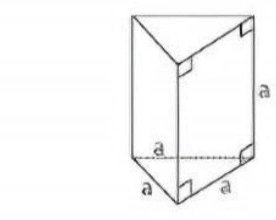


Cuando no nos dan el número de lados que tiene la base del prisma, quiere decir que se trata de cualquier prisma.

10 Las caras laterales de un prisma triangular regular son cuadrados, si su área de la superficie lateral es 108. Calcula el volumen del prisma.

A) $18\sqrt{3}$ B) $32\sqrt{3}$ C) $36\sqrt{3}$
D) $54\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

Resolución:



$A_{SL} = 108 = a^2 \cdot 3 \rightarrow a = 6$

Calculamos el volumen:

$$V = B \cdot h$$

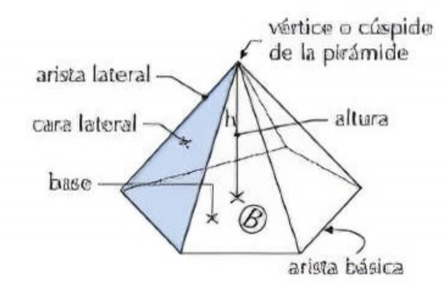
$$V = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot a = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} \cdot 6$$

$\therefore$ $V = 54\sqrt{3}$ **Rpta. D**

Pirámide

Se llama pirámide al sólido que se encuentra limitado por un polígono plano llamado base y por tres o más triángulos que tienen un vértice común llamados caras laterales.

Se llama altura de la pirámide a la perpendicular que se traza por su vértice al plano de la base.



Fórmulas:

Área lateral

$A_{SL} = \sum$ de las áreas de todas las caras laterales

Área total

$A_{ST} = \sum$ de las áreas de todas las caras

$\therefore$ $A_{ST} = A_{SL} + B$

Volumen

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

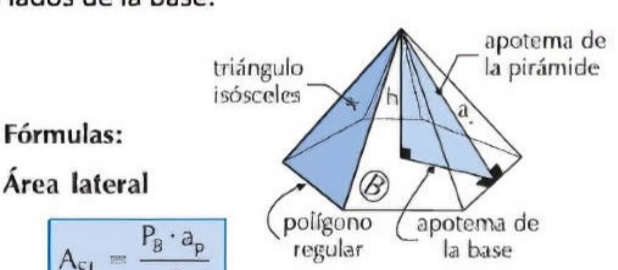
Donde: B = área de la región de la base
h = altura

Una pirámide recibe el nombre de acuerdo al número de lados de su base, si la base tiene 3 lados se llama pirámide triangular, si tiene 4 lados se llama pirámide cuadrangular, si tiene 5 lados se llama pirámide pentagonal, etc.

Pirámide regular

Una pirámide es regular cuando su base es un polígono regular, sus caras laterales son triángulos isósceles y su altura cae en el centro de la base.

Se llama apotema de la pirámide a la perpendicular que se traza desde el vértice de la pirámide a uno de los lados de la base.



Fórmulas:

Área lateral

$$A_{SL} = \frac{P_B \cdot a_p}{2}$$

Área total

$$A_{ST} = A_{SL} + B$$

Volumen

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

P_B = Perímetro de la base

Propiedad

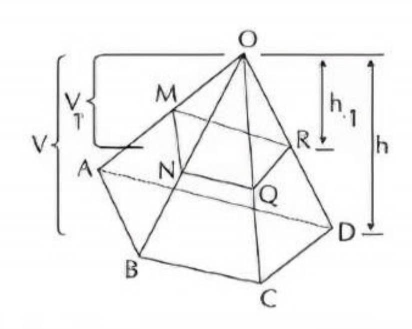
Cuando a una pirámide se le corta por un plano paralelo a su base, se cumple:

1.- Las aristas laterales y la altura de la pirámide quedan divididos en segmentos proporcionales.

2.- La sección que se determina y el polígono de la base son semejantes.

3.- El área de la sección que se determina y el área de la base son entre sí como el cuadrado de sus distancias al vértice de la pirámide.

4.- El volumen de la pirámide parcial que se determina y el volumen total son entre sí como el cubo de sus alturas.



Si $\square$ MNQR // $\square$ ABCD

1: $\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{ON}{OB}=\dfrac{OQ}{OC}=\dfrac{OR}{OD}=\dfrac{h_1}{h}$

2: $\square MNQR \sim \square ABCD$

3: $\dfrac{S_{MNQR}}{S_{ABCD}}=\dfrac{h_1^2}{h^2}$

4: $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{h_1^3}{h^3}$

Problemas resueltos SOBRE PIRÁMIDES

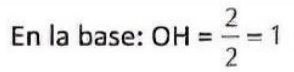
1 La arista básica de una pirámide cuadrangular regular mide 2, las caras laterales son triángulos equiláteros. Halla el volumen de la pirámide.

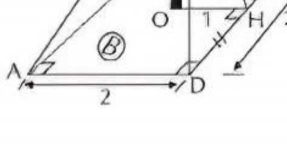
A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Resolución:

En el ΔDFC: $FH=\dfrac{2}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}$


En la base: $OH=\dfrac{2}{2}=1$



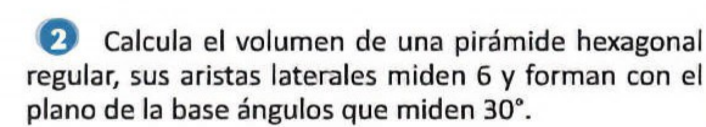
En el ΔFOH aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$h^2=FH^2-OH^2=(\sqrt{3})^2-1^2 \quad \therefore \quad h=\sqrt{2}$$

Encontramos el volumen:

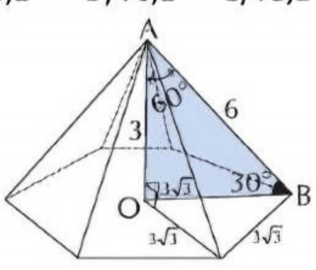
$$V=\frac{1}{3}B\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}$$

$\therefore$ $V=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ **Rpta. C**


2 Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular, sus aristas laterales miden 6 y forman con el plano de la base ángulos que miden 30°.

A) 35,1 B) 40,1 C) 55,1 D) 70,1 E) 75,1

Resolución:



El ⊿ AOB es de 30° y 60°.

$$AO=\frac{6}{2}=3 \rightarrow \quad OB=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

Encontramos el volumen

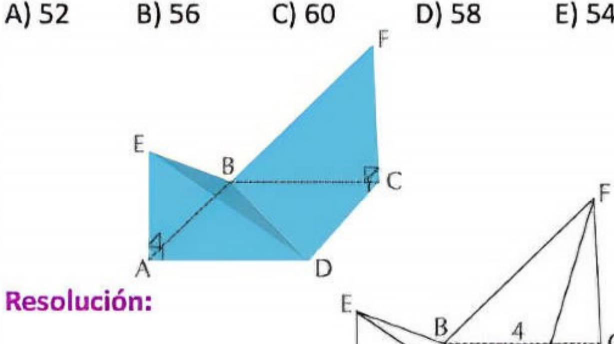
$$V=\frac{1}{3}B\cdot h$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(6\cdot\frac{(3\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3}\right)\cdot 3$$

$\therefore$ $V=70{,}1$ **Rpta. D**

3 Calcula el volumen del sólido mostrado, ABCD es un cuadrado, AD = 4, AE + CF = 21

A) 52 B) 56 C) 60 D) 58 E) 54



Resolución:

$$V=V_{E\text{-}ABD}+V_{F\text{-}CBD}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 4}{2}\cdot AE+\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 4}{2}\cdot CF$$

$$V=\frac{8}{3}(AE+CF)=\frac{8}{3}\cdot 21 \quad \therefore$$

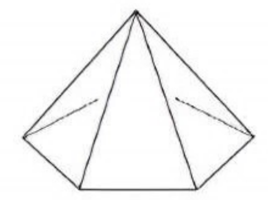
$V=56$ **Rpta. B**

4 Una pirámide tiene 242 aristas. ¿Cuántos vértices y caras tiene?

A) 120; 120 B) 124; 121 C) 122; 122

D) 118; 126 E) 126; 118

Resolución:



Supongamos que la base es un polígono de "n" lados.

N° aristas básicas = n

N° aristas laterales = n

N° aristas totales = N° aristas básicas + N° aristas laterales

$$A = n + n \rightarrow \therefore \boxed{n = \frac{A}{2}}$$

$$n = \frac{242}{2} \rightarrow n = 121$$

N° vértices = N° vértices básicos + 1

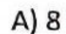
N° vértices = 121 + 1

$\therefore$ $\boxed{\text{N° vértices} = 122}$

N° caras = N° caras laterales+1

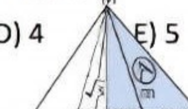
N° caras = 121 + 1

$\therefore$ $\boxed{\text{N° caras} = 122}$ **Rpta. C**



5 Calcula el área de la superficie total de una pirámide cuadrangular regular, la altura mide $\sqrt{3}$ y el área de una de las caras laterales es igual al área de la base.

A) 8 B) 6 C) 9 D) 4 E) 5



Resolución:

Del dato: A = B

$$\frac{a \cdot m}{2} = a^2 \rightarrow m = 2a$$

En el ⊿ MON aplicando el teorema de Pitágoras

$$m^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(2a)^2 = 3 + \frac{a^2}{4} \rightarrow a^2 = \frac{4}{5} \text{ .... } ❶$$

Cálculo del área de la superficie total:

$$A_{ST} = B + 4 \cdot A$$

$$A_{ST} = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot 2a}{2}$$

$$A_{ST} = 5a^2 \text{ .... } ❷$$

Reemplazando ❶ en ❷:

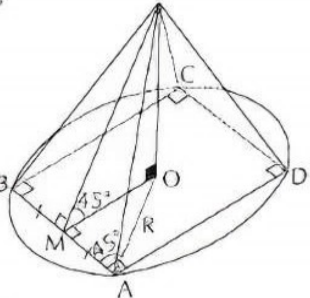
$$A_{ST} = 5 \cdot \frac{4}{5}$$

$\therefore$ $\boxed{A_{ST} = 4}$ **Rpta. D**

6 Las caras laterales de una pirámide cuadrangular regular tienen una inclinación de 45° con respecto al plano de su base, la base se encuentra inscrita en una circunferencia de radio"R". Calcula el volumen de la pirámide.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}R^3$ B) $\frac{R^3}{3}$ C) $\frac{2}{3}R^3$

D) $\frac{\sqrt{2}}{3}R^3$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}R^3$



Resolución:

El ⊿ AMO es de 45°

$$OM = AM = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

Ahora: $AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot \frac{R}{2}\sqrt{2}$

$$AB = R\sqrt{2}$$

El ⊿ MOE es de 45°

$$EO = OM = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

Encontramos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot EO = \frac{1}{3}AB^2 \cdot EO$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

$\therefore$ $\boxed{V = \frac{\sqrt{2}}{3}R^3}$ **Rpta. D**

7 Halla el volumen del tetraedro de la figura, las áreas de las regiones triangulares DAB, DAC y ABC son 3; 6 y 8, además

$$m\angle DAB = m\angle BAC = m\angle CAD = 90°$$

A) $4\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 12

D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

Resolución:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABAC} \cdot DA$$

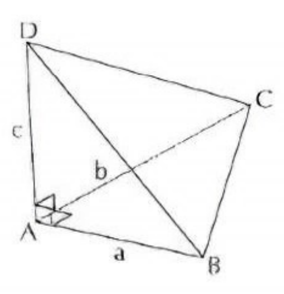
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot c = \frac{1}{6}a \cdot b \cdot c \text{ .... } ❶$$

Aplicando áreas:

$$S_{DAB} = 3 = \frac{a \cdot c}{2} \text{ .... } ❷$$

$$S_{DAC} = 6 = \frac{b \cdot c}{2} \text{ .... } ❸$$

$$S_{BAC} = 8 = \frac{a \cdot b}{2} \text{ .... } ❹$$



Multiplicando ❷, ❸ y ❹ logramos:

$$6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 = (a \cdot b \cdot c)^2$$

$$24\sqrt{2} = a \cdot b \cdot c \; .... \; ❺$$

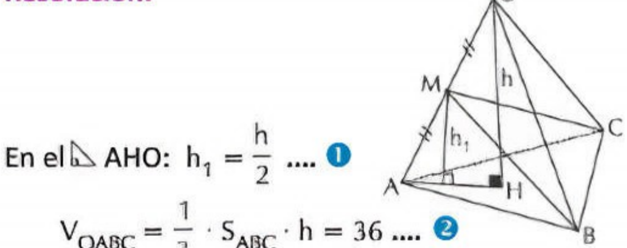
De ❶ y ❺:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 24\sqrt{2} \qquad \therefore \quad V = 4\sqrt{2}$$ **Rpta. D**

8 El volumen de una pirámide es 36, su vértice es "O" y su base es el triángulo ABC, sobre la arista $\overline{OA}$ se toma su punto medio M. Halla el volumen de la pirámide de vértice M y base el triángulo ABC.

A) 9 B) 27 C) 18 D) 12 E) 20

Resolución:



En el ⊿ AHO: $h_1 = \frac{h}{2}$ .... ❶

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h = 36 \; .... \; ❷$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h_1 \; .... \; ❸$$

Reemplazando ❶ en ❸:

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h \; .... \; ❹$$

Reemplazando ❷ en ❹:

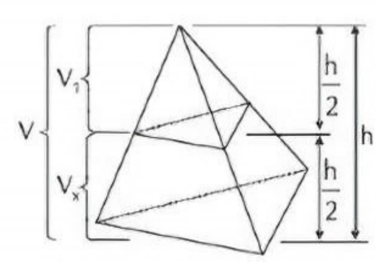
$$V_{MABC} = \frac{1}{2} \cdot 36$$

$$\therefore \quad V_{MABC} = 18$$ **Rpta. C**

9 Una pirámide cuyo volumen es 48, es dividida en dos partes por un plano paralelo a su base y que pasa por el punto medio de su altura. Halla el volumen de la parte mayor.

A) 32 B) 34 B) 40 D) 36 E) 42

Resolución:



V = Volumen total (V = 48)

V_1 = Volumen parcial

V_x = Volumen pedido

De acuerdo a la propiedad:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{h^3} = \frac{h^3}{8h^3} \Rightarrow V_1 = \frac{V}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

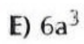
Ahora: $V_x = V - V_1 \Rightarrow V_x = 48 - 6$

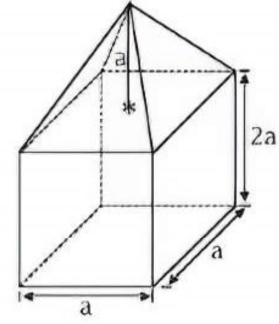
$$\therefore \quad V_x = 42$$ **Rpta. E**

10 El sólido de la figura está formado por un rectoedro y una pirámide. Halla el volumen del sólido.

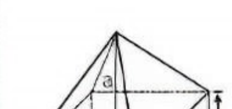
A) $\frac{5a^3}{3}$ B) $\frac{7a^3}{3}$

C) $\frac{5a^3}{2}$ D) $4a^3$


E) $6a^3$

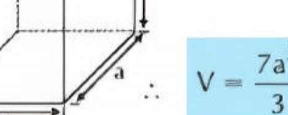


Resolución:



$$V = V_{rectoedro} + V_{pirámide}$$

$$V = a^2 \cdot 2a + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a = 2a^3 + \frac{a^3}{3}$$



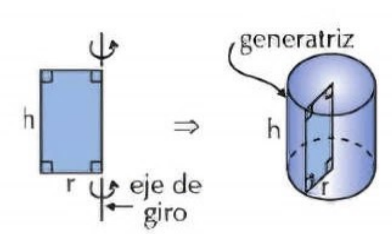
$$\therefore \quad V = \frac{7a^3}{3}$$ **Rpta. B**

Cilindro de revolución

Se llama cilindro de revolución al sólido engendrado por un rectángulo cuando gira una vuelta completa alrededor de uno de sus lados.

Cilindro equilátero

Un cilindro se llama equilátero cuando su altura es igual al diámetro de su base.



Fórmulas:

Área lateral: $A_{SL} = 2\pi \cdot r \cdot h$

Área total: $A_{ST} = 2\pi r(h+r)$

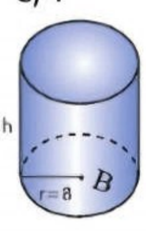
Volumen: $V = \pi r^2 h$

Problemas resueltos SOBRE CILINDRO DE REVOLUCIÓN

1 El radio de la base de un cilindro de revolución mide 8, el área de la superficie lateral es igual al área de su base. Halla la altura del cilindro.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 12 E) 16

Resolución:



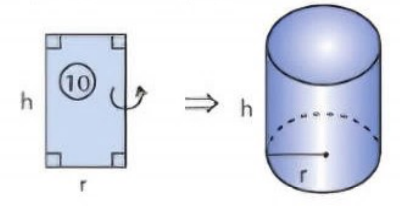
$$A_{SL} = B \rightarrow 2\pi rh = \pi r^2 \rightarrow h = \frac{r}{2}$$

$$h = \frac{8}{2} \quad \therefore \quad h = 4$$ **Rpta. C**

2 Un cilindro de revolución es generado por un rectángulo cuya área de su región es 10. Halla el área de la superficie lateral del cilindro.

A) 20 B) 10 C) 10π D) 20π E) 15π

Resolución:



$10 = rh$ .... (I)

$A_{SL} = 2\pi rh$ .... (II)

Reemplazando (I) en (II):

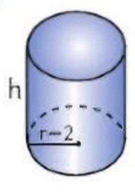
$$A_{SL} = 2\pi \cdot 10 \quad \therefore \quad A_{SL} = 20\pi$$ **Rpta. D**

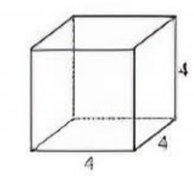
3 El área total de un cilindro de revolución es igual al área de la superficie total de un cubo, el radio de la base del cilindro mide 2 cm y la arista del cubo mide 4 cm. Halla la altura del cilindro.

A) $\left(\frac{48}{\pi}-1\right)$cm B) $\left(\frac{48}{\pi}-4\right)$cm C) $\left(\frac{48}{\pi}-2\right)$cm

D) $\left(\frac{24}{\pi}-1\right)$cm E) $\left(\frac{24}{\pi}-2\right)$cm

Resolución:





$$A_{ST\ cilindro} = A_{ST\ cubo}$$

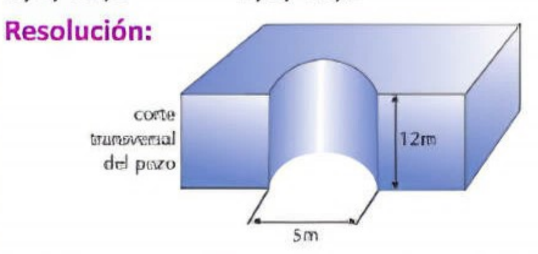
$$2\pi \cdot 2(h+2) = 6 \cdot 4^2 \quad \therefore \quad h = \left(\frac{24}{\pi} - 2\right) \text{cm}$$ **Rpta. E**

4 ¿Cuánto pagará Manuel para que le caven un pozo cilíndrico de 12 m de profundidad y 5 m de diámetro en su chacra de Piura, si le cobran S/ 0,40 por m^3? (Usar $\pi = 3,14$).

A) S/ 94,2 B) S/ 94,5 C) S/ 90,5

D) S/ 92,5 E) S/ 93,5

Resolución:



Debemos encontrar cuántos metros cúbicos se extraerán del pozo, para lo cual calculamos el volumen del pozo cilíndrico.

$$V = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 12 = 3,14 \cdot \frac{25}{4} \cdot 12$$

$$V = 235,5\ m^3$$

Ahora: $1\ m^3 \rightarrow$ S/ 0,40

$235,5\ m^3 \rightarrow x$

$$x = \frac{235,5\ m^3 \cdot S/\ 0,40}{1\ m^3} \rightarrow x = S/\ 94,2$$

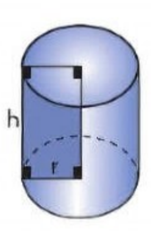
∴ Le cobrarán S/ 94,2 **Rpta. A**

5 El perímetro de la base de un cilindro de revolución es A y el área de la región del rectángulo generador es B. Halla su volumen.

A) $\frac{A \cdot B}{2}$ B) $\frac{AB}{3}$ C) $A \cdot B$

D) $\frac{A \cdot B}{4}$ E) $\frac{A \cdot B}{5}$

Resolución:



Perímetro de la base = $2\pi r = A$ .... ❶

Área ▭ = $r \cdot h = B$ .... ❷

Multiplicando ❶ y ❷:

$2\pi r \cdot rh = A \cdot B$

$\pi r^2 h = \dfrac{A \cdot B}{2}$ .... ❸

$V = \pi r^2 h$ .... ❹

De ❸ y ❹:

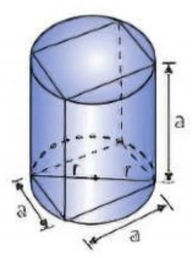
$\therefore\ V = \dfrac{A \cdot B}{2}$ **Rpta. A**

6 Encuentra el volumen de un cilindro de revolución circunscrito a un cubo de 8 cm^3 de volumen.

A) $2\pi\ cm^3$ **B)** $6\pi\ cm^3$ **C)** $8\pi\ cm^3$

D) $10\pi\ cm^3$ **E)** $4\pi\ cm^3$

Resolución:



$V_{cubo} = a^3 = 8 \rightarrow a = 2$

En la base: $2r = a\sqrt{2}$

$2r = 2\sqrt{2} \rightarrow r = \sqrt{2}$

Ahora: $V_{cilindro} = \pi r^2 h$

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot a = \pi(\sqrt{2})^2 \cdot 2$

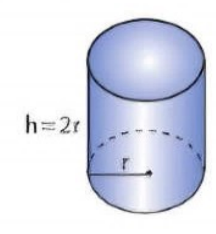
$\therefore\ V_{cilindro} = 4\pi\ cm^3$ **Rpta. E**

7 Calcula el volumen de un cilindro equilátero, el área de la superficie total es 12π.

A) $4\sqrt{2}\pi$ **B)** $2\sqrt{2}\pi$ **C)** $5\sqrt{2}\pi$

D) $5\sqrt{3}\pi$ **E)** $4\sqrt{3}\pi$

Resolución:



$A_T = 2\pi r(h + r)$

$12\pi = 2\pi r(2r + r)$

$6 = 3r^2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$

Reemplazando el valor de r:

$V = 2\pi(\sqrt{2})^3 = 2\pi \cdot 2\sqrt{2}$

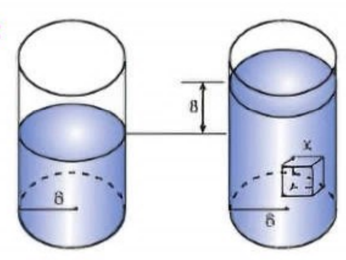
$\therefore\ V = 4\sqrt{2}\pi$ **Rpta. A**

8 Un cilindro de revolución de 8 cm de radio de la base contiene agua hasta su mitad, se introduce un pedazo metálico de forma cúbica y el nivel del agua sube 8cm. Halla la arista del pedazo metálico.

A) $7\sqrt[3]{\pi}$ cm **B)** $6\sqrt[3]{\pi}$ cm **C)** $9\sqrt[3]{\pi}$ cm

D) $8\sqrt[3]{\pi}$ cm **E)** $12\sqrt[3]{\pi}$ cm

Resolución:

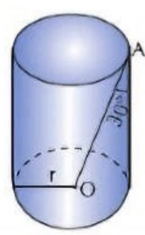


Usaremos el siguiente principio:

$V_{desalojado} = V_{introducido}$

$\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = x^3 \quad \therefore \quad x = 8\sqrt[3]{\pi}$ cm **Rpta. D**

9 Determina el volumen del cilindro de la figura, si OA = 6.



A) $8\sqrt{3}\pi$ **B)** $27\sqrt{3}\pi$ **C)** $28\sqrt{3}\pi$

D) $24\sqrt{3}\pi$ **E)** $36\sqrt{3}\pi$

Resolución:

El ⊿ OBA es de 30° y 60°.



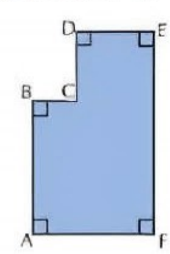
$r = \dfrac{6}{2} \rightarrow r = 3$

$h = \dfrac{6}{2}\sqrt{3} \rightarrow h = 3\sqrt{3}$

Ahora: $V = \pi r^2 h = \pi 3^2 \cdot 3\sqrt{3}$

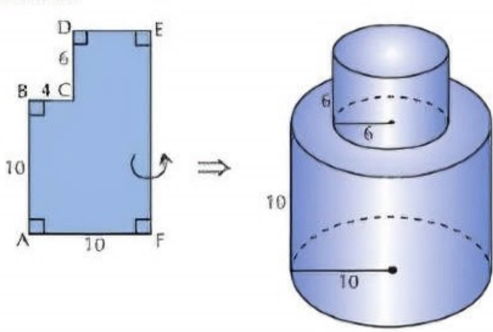
$\therefore\ V = 27\sqrt{3}\pi$ **Rpta. B**

10 La placa hexagonal de la figura gira una vuelta completa alrededor de $\overline{EF}$. Halla el volumen del sólido que se engendra, si AF = 10, AB = 10, CD = 6, BC = 4.



A) 1 212π
B) 1 216π
C) 1 220π
D) 1 215π
E) 1 217π

Resolución:



Se forman dos cilindros.

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 10 + \pi 6^2 \cdot 6$$

$\therefore$ $V = 1\,216\pi$ **Rpta. B**

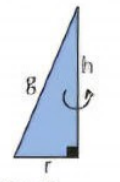
Cono de revolución

Se llama cono de revolución al sólido engendrado por un triángulo rectángulo cuando gira una vuelta completa alrededor de uno de sus catetos.

Cono equilátero

Un cono se llama equilátero cuando su generatriz es igual al diámetro de su base.

g: generatriz
h: altura
r: radio de la base



Área total: $A_{ST} = \pi r(g+r)$

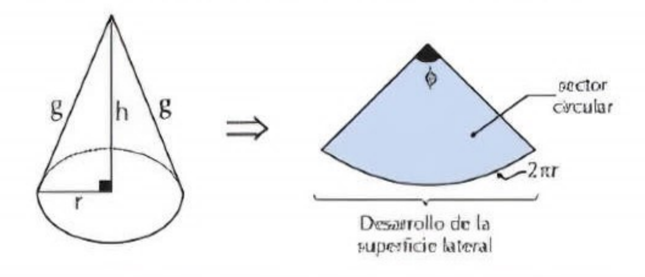
Volumen: $V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h$

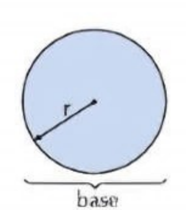
Fórmulas: **Área lateral:** $A_{SL} = \pi r \cdot g$

Teorema de Pitágoras: $g^2 = r^2 + h^2$

Desarrollo de la superficie lateral

El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular, cuyo radio es la generatriz y la longitud del arco es la longitud de la circunferencia de la base del cono.





$$\phi = 360° \cdot \left(\frac{r}{g}\right)$$

ϕ : ángulo central del desarrollo lateral

Problemas resueltos — SOBRE CONO DE REVOLUCIÓN

1 Determina el volumen de un cono de revolución, su generatriz mide 6 y forma un ángulo que mide 60° con el plano de su base.

A) $9\sqrt{3}\pi$ B) $6\sqrt{3}\pi$ C) $3\sqrt{3}\pi$
D) $2\sqrt{3}\pi$ E) $12\sqrt{3}\pi$

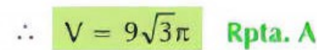
Resolución:

El ⊿ AOB es de 30° y 60°:

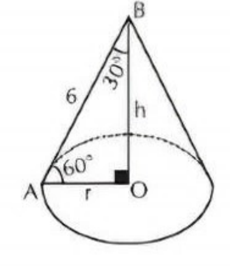
$$r = \frac{6}{2} \rightarrow r = 3$$

$$h = \frac{6}{2}\sqrt{3} \rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}(3^2) \cdot 3\sqrt{3}$$




$\therefore$ $V = 9\sqrt{3}\pi$ **Rpta. A**

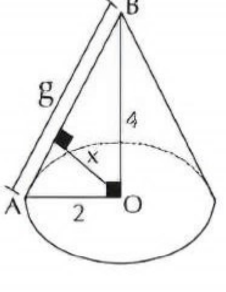


2 El radio de la base y la altura de un cono de revolución miden 2 y 4. Halla la distancia del centro de la base a una de las generatrices.

A) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ C) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{4\sqrt{7}}{5}$

Resolución:



Aplicando Pitágoras en el ⊿ AOB:

$g^2 = 2^2 + 4^2 \rightarrow g = 2\sqrt{5}$

Usando relaciones métricas en el ⊿ AOB:

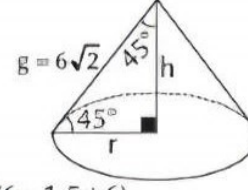
$2 \cdot 4 = g \cdot x \rightarrow 8 = 2\sqrt{5} \cdot x$

$\therefore$ $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ **Rpta. D**

3 La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide $6\sqrt{2}$. Determina el área de la superficie total del cono que se engendra cuando el triángulo rectángulo gira una vuelta completa alrededor de uno de sus catetos. (Asumir $\sqrt{2} = 1{,}5$)

A) 90π B) 85π C) 84π D) 95π E) 96π

Resolución:



En el ⊿ isósceles: $h = r = 6$

Encontramos el área total:

$A_{ST} = \pi r(g + r)$

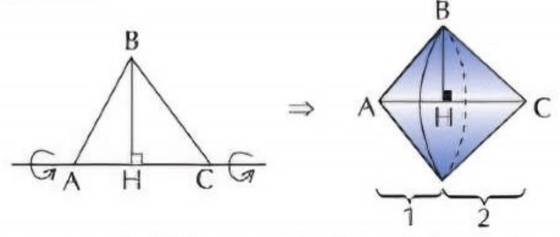
$A_{ST} = \pi \cdot 6 \cdot (6\sqrt{2} + 6) = \pi \cdot 6\ (6 \cdot 1{,}5 + 6)$

$\therefore$ $A_{ST} = 90\pi$ **Rpta. A**

4 La altura $\overline{BH}$ de un triángulo ABC mide 3 y su lado $\overline{AC}$ mide 8. Halla el volumen del sólido engendrado por dicho triángulo cuando gira una vuelta completa alrededor del lado $\overline{AC}$

A) 26π B) 18π C) 24π D) 36π E) 32π

Resolución:



Vemos que el sólido engendrado está formado por dos conos.

Volumen = Volumen 1 + Volumen 2

$V = \frac{\pi}{3}BH^2 \cdot AH + \frac{\pi}{3} \cdot BH^2 \cdot HC$

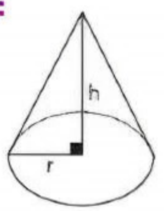
$V = \frac{\pi}{3}BH^2(AH + HC)$ $\therefore$ $V = \frac{\pi}{3}BH^2 \cdot AC$

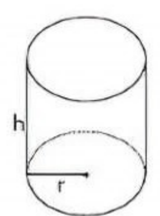
Luego: $V = \frac{\pi}{3} \cdot 3^2 \cdot 8$ $\therefore$ $V = 24\pi$ **Rpta. C**

5 Un cono y un cilindro de revolución tienen sus bases y sus alturas congruentes. Halla la relación de sus volúmenes.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

Resolución:





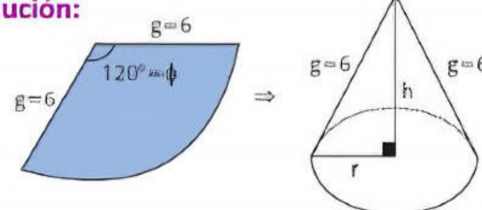
$\frac{V_{cono}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{\pi}{3}r^2h}{\pi r^2 h}$ $\therefore$ $\frac{V_{cono}}{V_{cilindro}} = \frac{1}{3}$ **Rpta. C**

6 Con un sector circular cuyo radio mide 6 y con un ángulo central que mide 120° se construye un cono de revolución. Determina el volumen del cono.

A) $18\sqrt{2}\pi$ B) $16\sqrt{3}\pi$ C) $\frac{13}{3}\sqrt{2}\pi$

D) $\frac{14}{3}\sqrt{2}\pi$ E) $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

Resolución:



$\phi = 360°\left(\frac{r}{g}\right) \rightarrow 120° = 360°\left(\frac{r}{6}\right) \rightarrow r = 2$

Usando Pitágoras:

$g^2 = r^2 + h^2 \rightarrow 6^2 = 2^2 + h^2 \rightarrow h = 4\sqrt{2}$

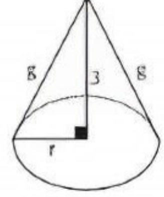
Ahora:

$V = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{2}$ $\therefore$ $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ **Rpta. E**

7 La altura de un cono de revolución mide 3, su generatriz y el radio de su base suman 9. Halla el área de la superficie lateral.

A) 15π B) 20π C) 18π D) 12π E) 21π

Resolución:



$g + r = 9 \rightarrow g = 9 - r$ .... ❶

Usando Pitágoras:

$g^2 = r^2 + 3^2$ .... ❷

Reemplazando ❶ en ❷:

$(9-r)^2 = r^2 + 9 \rightarrow 81 + r^2 - 18r = r^2 + 9 \rightarrow \quad r = 4$

En ❶: $g = 9 - 4 \rightarrow g = 5$

$A_{SL} = \pi rg = \pi \cdot 4 \cdot 5$

$\therefore$ $A_{SL} = 20\pi$ **Rpta. B**

8 El área lateral de un cono de revolución es el doble del área de su base. Determina la medida del ángulo que forma su generatriz con su altura.

A) 15° B) 37° C) 45° D) 30° E) 60°

Resolución:

$A_{SL} = 2 \cdot B$

$\pi rg = 2 \cdot \pi r^2 \rightarrow r = \frac{g}{2}$

El ⊿ AOB es de 30° y 60°

$\therefore$ $x = 30°$ **Rpta. D**

9 La generatriz de un cono circular recto es el doble del diámetro de su base, su área total es 45π. Encontrar su generatriz.

A) 4 B) 10 C) 12 D) 6 E) 8

Resolución:

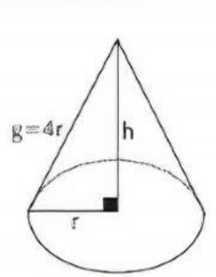
$A_{ST} = \pi r(g + r)$

$45\pi = \pi r(4r + r)$

$45\pi = 5\pi r^2 \rightarrow \quad r = 3$

Entonces: $g = 4 \cdot r = 4 \cdot 3$

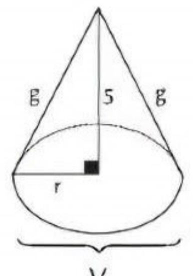
$\therefore$ $g = 12$ **Rpta. C**

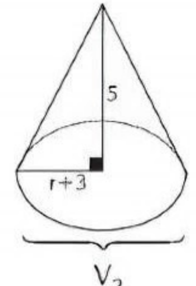


10 La altura de un cono mide 5, si el radio de la base aumenta en 3 mientras que la altura permanece constante, el volumen aumenta en 55π. Halla la generatriz del cono original.

A) $\sqrt{40}$ B) $\sqrt{42}$ C) $\sqrt{45}$
D) $\sqrt{41}$ E) $\sqrt{39}$

Resolución:





$V_2 = V_1 + 55\pi$

$\frac{\pi}{3}(r+3)^2 \cdot 5 = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot 5 + 55\pi \quad \therefore \quad r = 4$

Por Pitágoras: $g^2 = 5^2 + r^2$

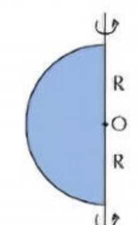
$g^2 = 25 + 4^2 \quad \therefore$ $g = \sqrt{41}$ **Rpta. D**

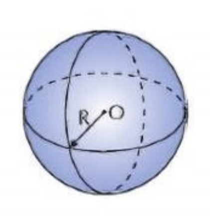
Esfera

Se llama esfera al sólido engendrado por un semicírculo cuando gira una vuelta completa alrededor de su diámetro.

Área: $A = 4\pi R^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$





Problemas resueltos — SOBRE ESFERA

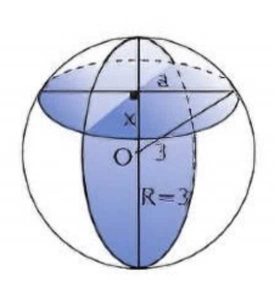
1 El radio de una esfera mide 3. ¿A qué distancia del centro debe trazarse un plano para que el área de la sección del círculo que se determine sea igual a $\frac{1}{3}$ del área de uno de los círculos máximos?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{8}$ E) $2\sqrt{3}$

Resolución:

$\pi a^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2$

$a^2 = \frac{3^2}{3} \rightarrow a^2 = 3$



Usando Pitágoras:

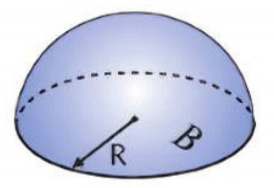
$$3^2 = x^2 + a^2 \rightarrow 9 = x^2 + 3 \rightarrow x^2 = 6$$

$\therefore$ $x = \sqrt{6}$ **Rpta. A**

2 Determina el área total de una semiesfera de radio "R".

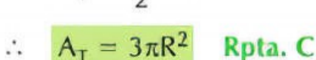
A) πR^2 B) $2\pi R^2$ C) $3\pi R^2$ D) $4\pi R^2$ E) $6\pi R^2$

Resolución:



$$A_T = A_{semiesfera} + B$$

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 + \pi R^2$$



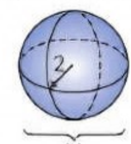

$\therefore$ $A_T = 3\pi R^2$ **Rpta. C**

3 Los radios de dos esferas miden 2 y 4. ¿En qué relación se encuentran sus volúmenes?

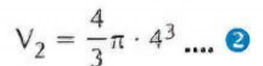
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{3}$

Resolución

Sean V_1 y V_2 los volúmenes de las dos esferas.

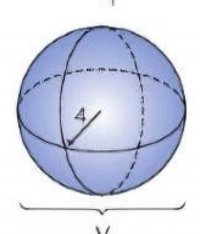


$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \text{ .... } ❶$$

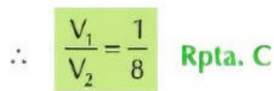


$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \text{ .... } ❷$$

Dividiendo ❶ y ❷:



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot 4^3}$$

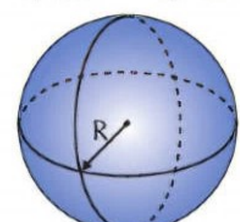


$\therefore$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$ **Rpta. C**

4 Determina el volumen de una esfera, si su área es 36π.

A) 18π B) 9π C) 36π B) 72π E) 48π

Resolución:



Del dato: $A = 4\pi R^2$

$$36\pi = 4\pi R^2 \rightarrow R^2 = 9$$

$\therefore$ $R = 3$

Encontramos el volumen:

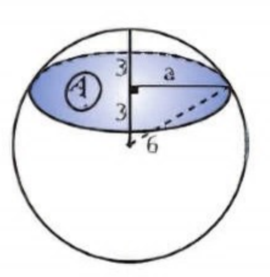
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi 3^3$$

$\therefore$ $V = 36\pi$ **Rpta. C**

5 El radio de una esfera mide 6, calcula el área de la sección que se determina sobre un plano perpendicular a un radio que pasa por la mitad de dicho radio.

A) 30π B) 27π C) 29π D) 25π E) 28π

Resolución:



Usando Pitágoras:

$$6^2 = 3^2 + a^2 \rightarrow a^2 = 27$$

Entonces:

$$A_x = \pi a^2$$

$$A_x = \pi \cdot 27$$

$\therefore$ $A_x = 27\pi$ **Rpta. B**

6 Determina el volumen de la esfera circunscrita a un cubo cuya arista mide $2\sqrt{3}$.

A) 32π B) 30π C) 48π D) 45π E) 36π

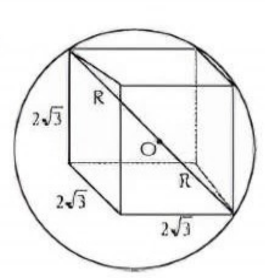
Resolución:

El diámetro de la esfera es la diagonal del cubo.

$$2R = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$R = 3$$

Calculamos el volumen de la esfera



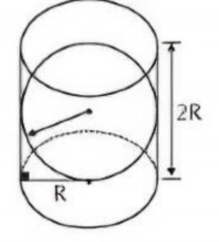
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3$$

$\therefore$ $V = 36\pi$ **Rpta. E**

7 Una esfera se encuentra inscrita en un cilindro de revolución, si el área de la esfera más el área de la superficie total del cilindro es 31,4. Halla el área de la esfera.

A) π B) 3π C) 2π D) 4π E) $\sqrt{3}\pi$

Resolución



$$A_{esfera} + A_{STcilindro} = 31{,}4$$

$$4\pi R^2 + 2\pi \cdot R(2R + R) = 10\pi$$

$$10R^2 = 10 \rightarrow R = 1$$

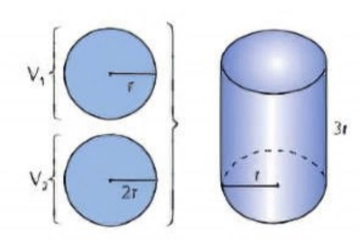
$A_{esfera} = 4\pi R^2 \rightarrow A_{esfera} = 4\pi 1^2$

$\therefore$ $A_{esfera} = 4\pi$ **Rpta. D**

8 Dos esferas sólidas de plomo de radios r y 2r se funden para construir un cilindro de revolución de altura igual a 3r. Halla el radio de la base del cilindro.

A) 3r B) r C) 4r D) 2r E) 5r

Resolución:



Como suponemos que no existe pérdida de plomo cuando fundimos las dos esferas, tenemos que la suma de los volúmenes de las dos esferas es igual al volumen del cilindro.

$$V_1 + V_2 = V_{cilindro}$$

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \pi \cdot R^2 \cdot 3r$$

$$\frac{36}{3}r^3 = R^2 \cdot 3r \quad \therefore \quad R = 2r$$ **Rpta. D**

9 El área total de un cono equilátero es 81. Halla el área de la esfera inscrita.

A) 27 B) 32 C) 28 D) 36 E) $18\sqrt{3}$

Resolución:

En el ⊿ de 30° y 60°: $3R = \frac{2r}{2}\sqrt{3} \rightarrow r = \sqrt{3}R$ .... ❶

Del dato:

$$A_T = 81 = \pi r(2r + r) \rightarrow r^2 = \frac{27}{\pi} \text{ .... ❷}$$

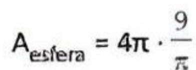
Reemplazando ❶ en ❷:

$$(\sqrt{3}\,R)^2 = \frac{27}{\pi}$$

$$R^2 = \frac{9}{\pi} \text{ .... ❸}$$

$$A_{esfera} = 4\pi R^2 \text{ .... ❹}$$


Reemplazando ❸ en ❹:



$$A_{esfera} = 4\pi \cdot \frac{9}{\pi}$$

$\therefore$ $A_{esfera} = 36$ **Rpta. D**

10 El área de la superficie lateral de una semiesfera es A_1 y el área de su base es A_2. Halla $\frac{A_1}{A_2}$.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

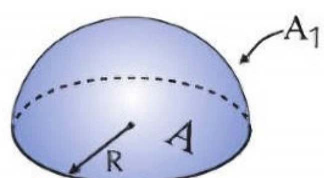
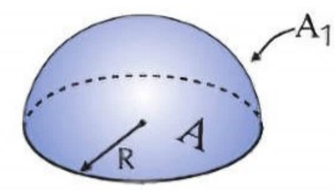
Resolución:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 \text{ .... ❶}$$

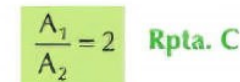
$$A_2 = \pi R^2 \text{ .... ❷}$$



Dividiendo ❶ y ❷

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2}{\pi R^2}$$



$\therefore$ $\frac{A_1}{A_2} = 2$ **Rpta. C**

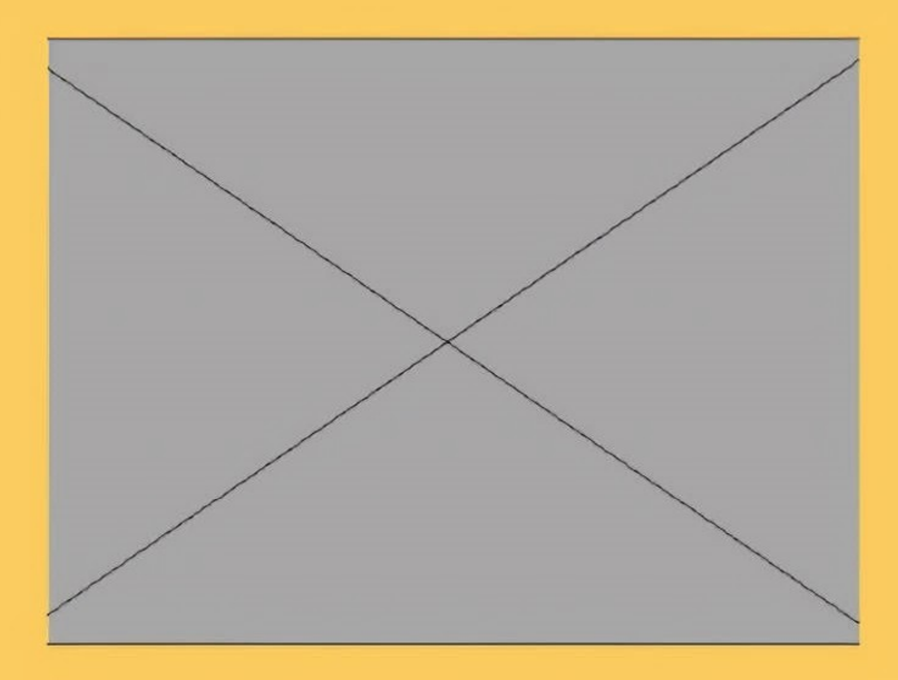
Amplía tus conocimientos

LAS PIRÁMIDES DE EGIPTO

Egipto tiene más de cien pirámides de distintas dimensiones y hay casi cincuenta más en el vecino Sudán. Sin embargo, las tres Grandes Pirámides de Giza han ganado su fama por ser las mayores de todas ellas. En las fotos más conocidas, la pirámide central, es decir la de Kafra (o Kefrén), parece más grande debido al ángulo de enfoque y a que fue construida sobre un terreno más elevado, pero la mayor de las tres pirámides es la Gran Pirámide de Keops, hoy en día también conocida como la Gran Pirámide.

La Pirámide de Keops sirvió como tumba para el faraón Jufu, conocido también por su nombre en griego, Keops, en la dinastía IV. Se estima que se terminó de construir entre el año 2550-2570 a.C. Es la única sobreviviente de las célebres Siete Maravillas del Mundo Antiguo, citada por Antípatro de Sidón en el año 125 a.C, las otras dos pirámides de la necrópolis (Kefrén y Miceriono) no están incluidas en estas maravillas antiguas. Heródoto que visitó el lugar en el 450 a.C mencionó que su construcción duró 20 años.

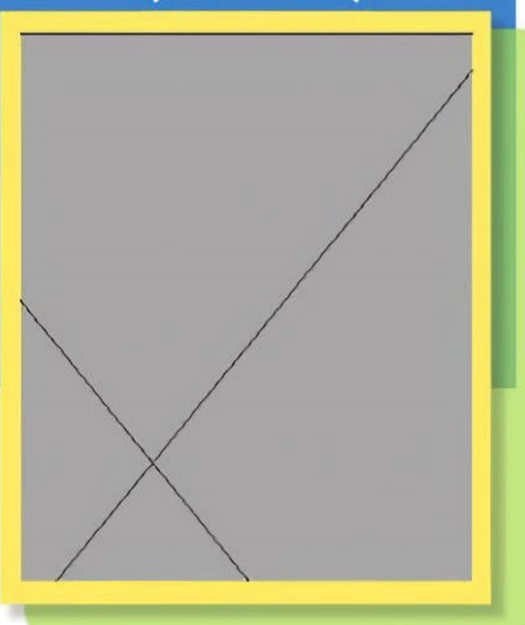
Para unos es la conclusión lógica del camino en la arquitectura funeraria, cuyo punto de partida se encuentra en la mastaba, hasta llegar a la pirámide más perfecta de todas. Para otros es una obra de ingeniería imposible aun hoy en día. Unos creen que en su geometría se halla escrita toda la historia de la Humanidad, otros que es como un gigantesco orbe de conocimientos. Unos ven en ella la tumba del más ególatra y tirano de los soberanos, otros un monumento legado por una civilización anterior a todas las conocidas. Algunos ven a miles de esclavos trabajando a golpe de látigo y otros creen ver mano de obra extraterrestre.



Jhon Napier o Nepier

(1550 - 1617)

Personaje de la Matemática



Nació en el castillo de Merchiston, cerca de Edimburgo, el año 1550. Su padre fue terrateniente, razón por la que tuvo una vida llena de comodidades. Hasta los 13 años de edad fue educado en su hogar y a cargo de los mejores maestros de Escocia. En el año 1563 ingresó a la Universidad de San Andrés, pero al poco tiempo murió su madre por lo que su alegría no fue duradera y optó por quedarse como internado en un monasterio cercano a la Universidad, fue en éste monasterio que encontró su verdadera vocación: el estudio de la Teología.

Después de unos años más viajó a Francia y Holanda para continuar sus estudios. En 1571 retornó a Escocia y viajó por todos sus estados para posteriormente publicar su trabajo (El Plaine Discovery of The Whole Revelation of st Jhon) considerado como el más importante.

Napier no sólo se dedicó a sus estudios de Teología sino también a diversos campos del conocimiento como las matemáticas aunque tomado como pasatiempo, pero fue en esta disciplina que pasó a la historia al inventar LOS LOGARITMOS. Fue él quien asignó la palabra Logaritmo (palabra griega compuesta por logos = relación y aritmos = números) con lo cual las multiplicaciones pueden sustituirse por sumas, las divisiones por restas, las potencias por productos y las raíces por divisiones.

En 1617 presentó su obra en la cual describe el ábaco Neperiano para realizar cálculos numéricos.

Napier también fue inventor e investigador, logró muchos avances en la agricultura que aplicó a sus propias tierras, pues inventando fertilizantes y sustancias ayudó a controlar las plagas en las cosechas.

Murió el 4 de abril de 1617, haciendo muchas aportaciones a la ciencia y brindando apoyo a cientos de hombres.



1. Sobre el ábaco Neperiano.
2. La formación que tuvo como teólogo y su relación con la matemética.

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Dibuja una circunferencia de centro (3; 5) y radio 8 en un plano cartesiano y para un punto (x ; y) de la circunferencia escribe $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=8$.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Emplea dos alfileres, lápiz e hilo y aplica el método del jardinero para dibujar la elipse en un papel, las ubicaciones de los alfileres son los focos de la elipse.

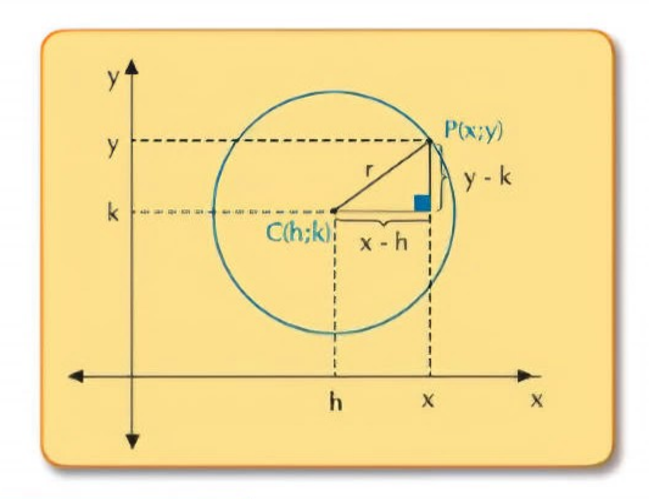
Geometría Analítica Plana

La circunferencia

Definición y elementos de la circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos P(x;y) del plano que se encuentran a una misma distancia r de un punto fijo dado C(h;k) llamado centro de la circunferencia.

Las coordenadas del centro se designan por C(h;k) y corresponden a un punto cualquiera del plano.



La distancia de C(h;k) al punto P(x;y) es: $d(C;P)=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$

El radio r es la distancia desde cualquier punto de la circunferencia a su centro.

Ecuación ordinaria de la circunferencia

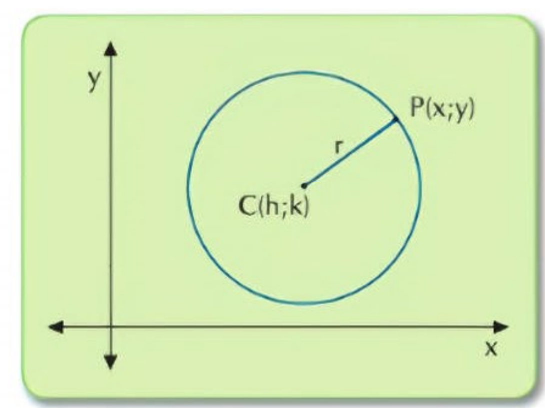
Sabemos que la distancia de un punto cualquiera P(x;y) de una circunferencia, a su centro C(h;k) es r, lo cual se expresa así:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Elevando ambos miembros al cuadro se obtiene:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

(Ecuación de la circunferencia)



Esta expresión es la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro (h;k) y radio r.

Ejemplos:

i) Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro (5;3) y radio 4.

Resolución:

C(5;3) → h = 5 ; k = 3

Además: r = 4

Reemplazando en la ecuación ordinaria.

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

ii) Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro (–3;7) y radio $\sqrt{10}$

Resolución:

h = –3 ; k = 7 ; r = $\sqrt{10}$

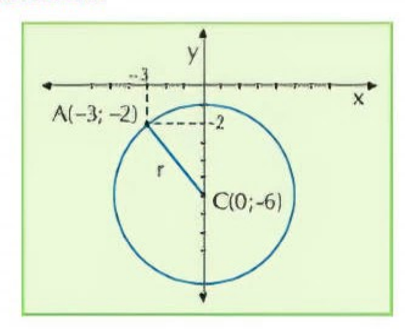
Reemplazando en la ecuación ordinaria

$$(x-(-3))^2 + (y-7)^2 = \sqrt{10}^{\,2}$$

$$\therefore\ (x+3)^2 + (y-7)^2 = 10$$

iii) Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro (0;–6) que pasa por el punto A(–3;–2).

Resolución:



→ Hallamos el radio r

$$r = d(A;C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2+6)^2} = 5$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es:

→ Como C(0;–6) ⇒ h = 0 ; k = –6

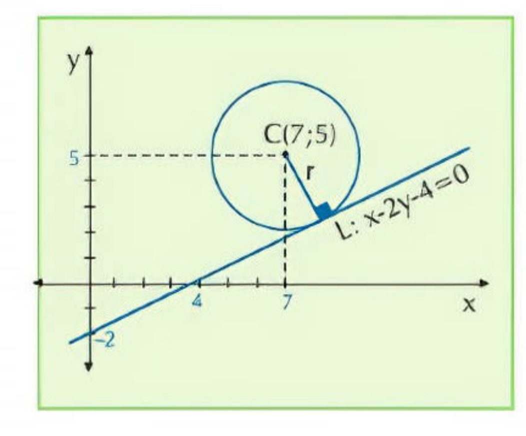
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y+6)^2 = 5^2$$

$$x^2 + (y+6)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + (y+6)^2 = 25$$

iv) Halla la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro (7; 5) y es tangente a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

Resolución:



→ El radio r es la distancia del centro (7;5) a la recta tangente: x - 2y - 4 = 0

$$r = d\,(C;L) = \frac{|1(7) - 2(5) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

→ (7;5) ⇒ h = 7 ; k = 5

Luego, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-7)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$(x-7)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{49}{5}\right)$$

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Si el centro de la circunferencia está en el origen del sistema cartesiano, sus coordenadas son:

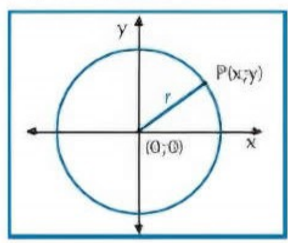
$$h = 0 \quad y \quad k = 0$$

Por lo tanto, la ecuación ordinaria:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

Se reduce a: $x^2 + y^2 = r^2$

llamada ecuación canónica de la circunferencia.



Ecuación general de la circunferencia

Consideremos la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Desarrollemos los cuadrados de los binomios $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

Ordenando la ecuación obtenida, resulta $\boxed{x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0}$

Si designamos $-2h=D$; $-2k=E$; $h^2+k^2-r^2=F$.

Obtenemos la expresión que corresponde a la ecuación general de la circunferencia:

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

Ejemplos:

i) Determina los coeficientes D, E y F de la ecuación general de la circunferencia de centro (–3;–5) y radio 7.

Resolución:

→ Según datos $h=-3$; $k=-5$; $r=7$

→ Hallamos la ecuación ordinaria de la circunferencia.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x+3)^2+(y+5)^2=49$$

Desarrollando los cuadrados de los binomios y ordenando, obtenemos la ecuación general de la circunferencia, veamos:

$$x^2+6x+9+y^2+10y+25=49$$
$$\boxed{x^2+y^2+6x+10y-15=0}$$

Comparamos esta ecuación con la ecuación general de la circunferencia:

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

de donde: $\boxed{D=6\ ;\ E=10 \text{ y } F=-15}$

ii) Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A(1;0), B(3;–2) y C(1;–4)

Resolución:

→ Consideremos la ecuación general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

→ Como los puntos A(1;0), B(3;–2) y C(1;–4) pertenecen a la circunferencia, deben satisfacer su ecuación. Reemplazamos y resolvemos el sistema de ecuaciones:

A(1;0) pertenece a la circunferencia.

$1^2+0^2+D\cdot 1+E\cdot 0+F=0$

$$D+F=-1 \quad ...❶$$

B(3;–2)pertenece a la circunferencia

$$3^2+(-2)^2+D\cdot 3+E\cdot(-2)+F=0$$
$$3D-2E+F=-13 \quad ...❷$$

C(1;–4)pertenece a la circunferencia

$$1^2+(-4)^2+D\cdot 1+E\cdot(-4)+F=0$$
$$D-4E+F=-17 \quad ...❸$$

→ Resolviendo ❶, ❷ y ❸ se obtiene:

$D=-2$; $E=4$ y $F=1$

Entonces la ecuación general es:

$$x^2+y^2-2x+4y+1=0$$

Transformación de la forma general a la forma ordinaria

En la ecuación general de la circunferencia

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

Recordemos que:

$D=-2h \rightarrow \boxed{h=-\dfrac{D}{2}}$

$E=-2k \rightarrow \boxed{k=-\dfrac{E}{2}}$

$F=h^2+k^2-r^2 \rightarrow r^2=h^2+k^2-F$

$$r^2=\left(\frac{-D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F$$

$$\boxed{r^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$$

Luego, reemplazando en la forma ordinaria:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Obtenemos: $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(D^2+E^2-4F\right)$

Entonces:

El centro **C(h;k)** de la circunferencia puede expresarse como:	El **radio** de la circunferencia puede encontrarse por medio de la expresión:
$C(h;k)=C\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$	$r^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$ $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

Ejemplo: Dada la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-4x+14y+37=0$. Calcular las coordenadas de su centro y su radio.

Resolución:

→ De la ecuación obtenemos: $D=-4$; $E=14$; $F=37$

→ **Centro:** $h=-\frac{D}{2}=-\frac{-4}{2}=2$

$k=-\frac{E}{2}=-\frac{14}{2}=-7$

$C(h;k)=C(2;-7)$

→ **Radio:** $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+14^2-4(37)}$

$\therefore$ $r=4$



La cantidad D^2+E^2-4F, es un número real que puede ser positivo, cero o negativo.

- Si $D^2+E^2-4F>0$, el radio de la circunferencia toma un valor real y la ecuación representa una circunferencia de centro $\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ y radio $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$
- Si $D^2+E^2-4F=0$, el radio toma valor cero ($r=0$) y la ecuación representa al punto centro $\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$
- Si $D^2+E^2-4F<0$, no existe un valor real del radio, y por consiguiente, no existe circunferencia real.

Ejemplos:

i) En la ecuación:

$$x^2+y^2-4x+8y+20=0$$

$D=-4$; $E=8$; $F=20$

$$D^2+E^2-4F=(-4)^2+8^2-4(20)$$
$$=16+64-80$$
$$=0$$

Por lo tanto dicha ecuación no corresponde a una circunferencia, sino al punto $\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)=(2;-4)$

ii) En la ecuación.

$$x^2+y^2+10x-2y+30=0$$

$D=10$; $E=-2$; $F=30$

$$D^2+E^2-4F=10^2+(-2)^2-4(30)$$
$$=100+4-120$$
$$=-16$$

Luego, no existe un valor real del radio, entonces la ecuación dada se puede interpretar como de una circunferencia imaginaria.

Otra forma de calcular el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia, es completando cuadrados en la ecuación general para darle la forma ordinaria.

Ejemplo: Consideremos la circunferencia de ecuación $4x^2 + 4y^2 + 20x - 8y + 9 = 0$. Calcula las coordenadas de su centro y su radio.

Resolución:

→ Multiplicamos la ecuación por $\frac{1}{4}$ con el objeto de que los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a 1, como lo establece la ecuación general de la circunferencia.

$$4x^2 + 4y^2 + 20x - 8y + 9 = 0$$

$$\text{por } \frac{1}{4} \quad \Rightarrow x^2 + y^2 + 5x - 2y + \frac{9}{4} = 0$$

→ Agrupamos los términos según las variables:

$$(x^2 + 5x) + (y^2 - 2y) = -\frac{9}{4}$$

→ Sumamos en ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad de los coeficientes de "x" e "y".

Así sumaremos:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \; ; \; \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$$

$$\underbrace{\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right)}_{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2} + \underbrace{\left(y^2 - 2y + 1\right)}_{(y-1)^2} = \underbrace{-\frac{9}{4} + \frac{25}{4} + 1}_{5}$$

Que es la ecuación ordinaria de la circunferencia dada.

Por lo tanto:

$$C\left(-\frac{5}{2}; 1\right) \quad y \quad r = \sqrt{5}$$ **Rpta.**

La parábola

Definición y elementos de la parábola

Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se llama foco y la recta fija se llama directriz.

Si $P(x; y)$ es un punto de la parábola, se cumple que:

d(P; foco) = d(P; directriz) = constante

Los elementos más importantes de la parábola son:

Foco: Es el punto fijo F

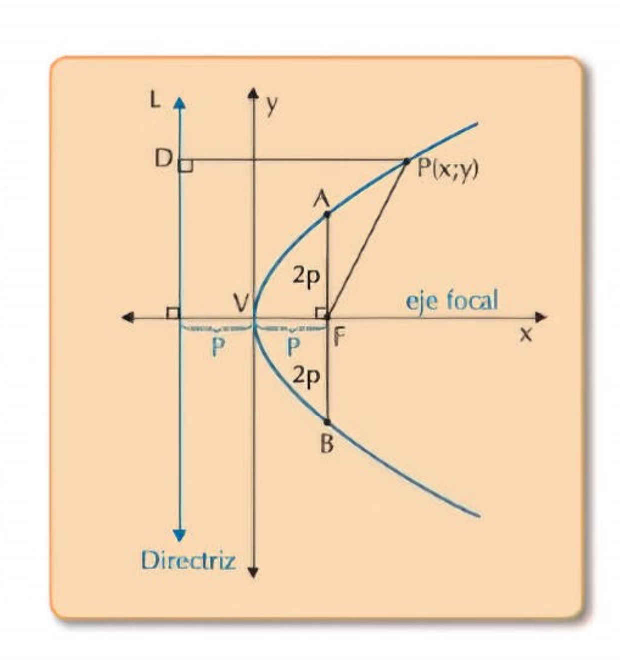
Directriz: Es la recta fija L

Parámetro: Es la distancia del foco a la directriz y se designa por 2p

Vértice (V): Es el punto de intersección de la parábola con su eje de simetría

Eje focal: Es la recta que contiene al foco y al vértice de la parábola.

Lado recto: Es la cuerda focal $\overline{AB}$ perpendicular al eje focal o eje de simetría de la parábola, cuya medida es $|4p|$



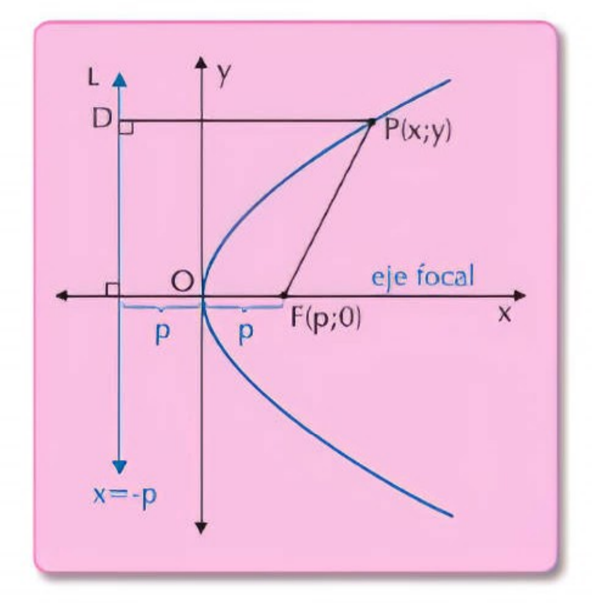
Ecuación de la parábola con vértice en el origen

A continuación hallamos en forma analítica la ecuación de la parábola.

Para ello supongamos que el eje focal de la parábola coincide con el eje x y que el vértice se encuentra en el origen del sistema.

De acuerdo a lo anterior, las coordenadas del foco son F(p;0) y, la directriz tiene como ecuación $x = -p$.

Si P(x;y) es un punto de la parábola se cumple que:



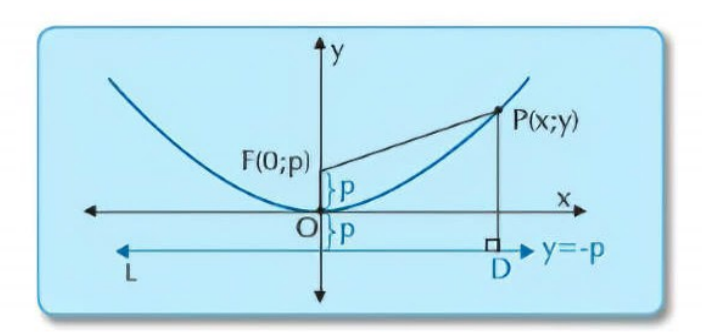
$$d(P;F) = d(P;D)$$
$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x + p$$
$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$
$$\cancel{x^2} - 2px + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2px + \cancel{p^2}$$

Reduciendo, resulta la ecuación canónica: $\boxed{y^2 = 4px}$

* Si $p > 0$, el foco de la parábola está en la parte positiva del eje x, por lo tanto, su concavidad se orienta hacia la derecha.
* Si $p < 0$, el foco de la parábola está en la parte negativa del eje x, por lo tanto, su concavidad se orienta hacia la izquierda

En forma análoga

Si el eje de simetría de la parábola coincide con el eje y, la parábola tiene por eje focal al mismo eje y.



En este caso:

Las coordenadas del foco son F(0;p) y la ecuación de la directriz es $y = -p$

Su ecuación canónica es ahora: $x^2 = 4py$

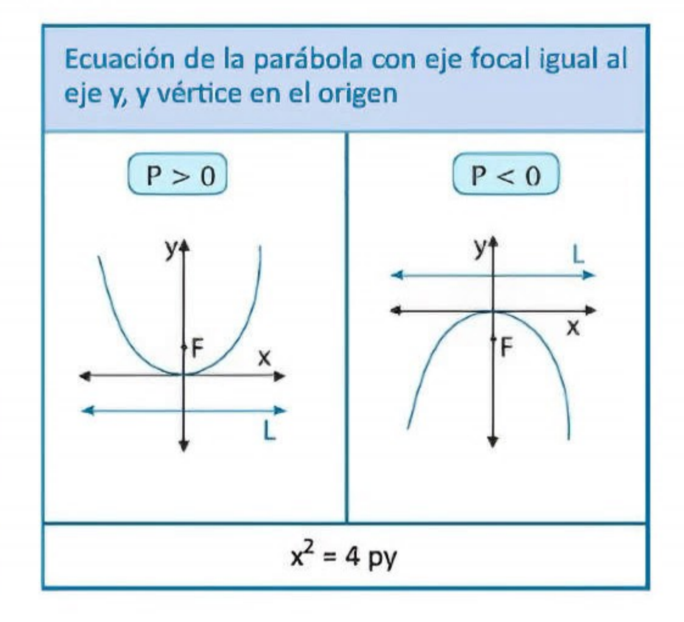
* Si $p > 0$, el foco de la parábola está en la parte positiva del eje y, por lo tanto, su concavidad se orienta hacia arriba.
* Si $p < 0$, el foco de la parábola está en la parte negativa del eje y, por lo tanto, su concavidad se orienta hacia abajo.

Podemos resumir todo lo anterior en el siguiente esquema:

Ecuación de la parábola con eje focal igual al eje x y vértice en el origen

$P > 0$	$P < 0$
L, y, F, x	y, L, x, F

$y^2 = 4\,px$



Longitud del lado recto de la parábola

Hemos visto que se denomina lado recto de la parábola (L.R.) a la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola.

Si la ecuación de la parábola es: $y^2 = 4px$

Como A(p;y) pertenece a esta curva, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación, es decir:

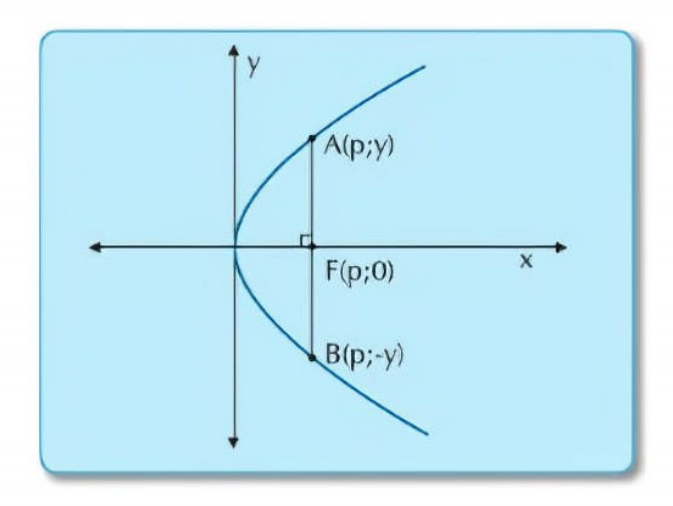
$$y^2 = 4p \cdot p = 4p^2$$

De donde: $y = 2p$

Entonces la medida del lado recto ($\overline{AB}$) es:

$$\text{L. R.} = \sqrt{(p-p)^2 + (y+y)^2} = \sqrt{(2y)^2} = |2y| = |4p|$$

Luego: **L.R. = |4p|**



Problemas resueltos — SOBRE PARÁBOLA

1 Para cada una de las parábolas cuyas ecuaciones se dan, determina las coordenadas del foco, una ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y dibujar la curva.

i) $y^2 = 8x$ ii) $y^2 + 6x = 0$ iii) $x^2 - y = 0$ iv) $2x^2 + 5y = 0$

Resolución:

i) $y^2 = 8x$

Esta ecuación es de la forma: $y^2 = 4px$
de donde $4p = 8 \rightarrow p = 2$

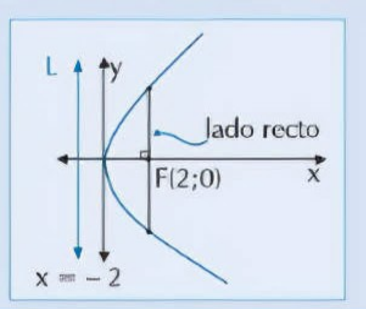
Foco: $F(p;0) \rightarrow F(2;0)$

Directriz:
$L: x = -p \rightarrow L: x = -2$

Longitud del lado recto:
$L.R. = |4p| = |4 \cdot 2| \rightarrow L.R. = 8$

Gráfica:

Como la ecuación es de la forma $y^2 = 4px$ con $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha.



ii) $y^2 + 6x = 0$

Esta ecuación se puede escribir así: $y^2 = -6x$, luego es de la forma $y^2 = 4px$ de donde $4p = -6 \rightarrow p = -3/2$

Foco: $F(p;0) \rightarrow F\left(-\frac{3}{2};0\right)$

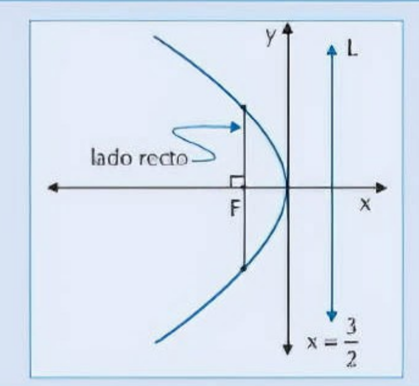
Directriz: $L: x = -p \rightarrow L: x = \frac{3}{2}$

Longitud del lado recto:

$L.R. = |4p| = \left|4\left(-\frac{3}{2}\right)\right| \rightarrow L.R. = 6$

Gráfica:

Como $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.



iii) $x^2 - y = 0$

Esta ecuación se puede escribir como: $x^2 = y$, luego es de la forma: $x^2 = 4py$ de donde:
$4p = 1 \rightarrow p = 1/4$

Foco: $F(0;p) \rightarrow F\left(0;\frac{1}{4}\right)$

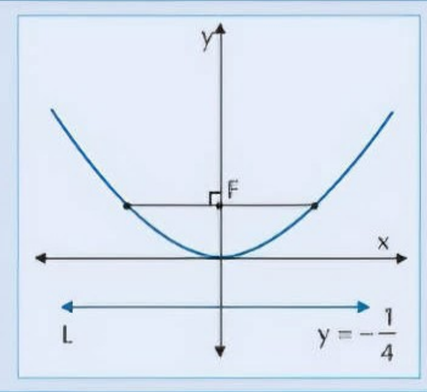
Directriz: $L: y = -p \rightarrow L: y = -\frac{1}{4}$

Longitud del lado recto:

$L.R. = |4p| = \left|4 \cdot \frac{1}{4}\right| \rightarrow L.R. = 1$

Gráfica:

Como la ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$ con $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba.



iv) $2x^2 + 5y = 0$

Esta ecuación se puede escribir como:

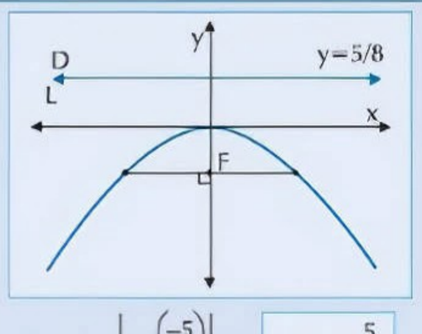
$x^2 = -\frac{5}{2}y$, luego es de la forma: $x^2 = 4py$ de donde: $4p = \frac{-5}{2} \Rightarrow \left(p = \frac{-5}{8}\right)$

Foco: $F(0;p) \rightarrow F\ 0;-\frac{5}{8}$

Directriz: $L: y = -p \rightarrow L: y = \frac{5}{8}$

Gráfica:

Como $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



Longitud del lado recto: $L.R. = |4p| = \left|4 \cdot \left(\frac{-5}{8}\right)\right| \rightarrow L.R. = \frac{5}{2}$

2 Encuentra la ecuación y la gráfica de la parábola con vértice en el origen que tenga las siguientes propiedades:

i) Foco (7;0)

ii) Foco (0;-4)

iii) Se abre hacia arriba, longitud del lado recto = 3

iv) Se abre hacia la izquierda; longitud del lado recto = 6

Resolución:

i) F(7;0)

Como el foco está en el eje x, entonces el eje focal coincide con el eje x

Comparando: $F(7;0) = F(p;0) \rightarrow$ $\boxed{p = 7}$

Ya que **$p > 0$**, la parábola se abre hacia la derecha y su ecuación es de la forma:

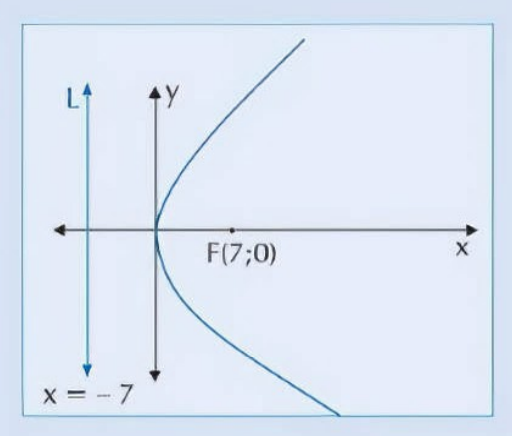
$$y^2 = 4px$$

Reemplazando el valor de $p = 7$, se obtiene:

$$y^2 = 28x$$

Directriz: $x = -p \rightarrow$ $\boxed{L: x = -7}$

Gráfica:



ii) F (0;-4)

Como el foco está en el eje y, entonces el eje focal coincide con el eje y.

Comparando: $F(0;-4) = F(0;p)$ $\boxed{p = -4}$

Ya que **$p < 0$**, la parábola se abre hacia abajo y su ecuación es de la forma;

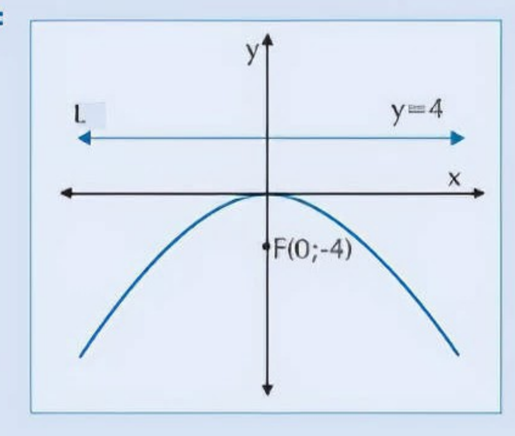
$$x^2 = 4py$$

Reemplazando el valor de $p = -4$ se obtiene:

$$x^2 = -16y$$

Directriz: $y = -p \rightarrow$ $\boxed{L: y = 4}$

Gráfica:



iii) Se abre hacia arriba; L.R. = 3

Si se abre hacia arriba, entonces **$p > 0$** y su eje focal coincide con el eje y.

Se sabe que $L.R. = |4p|$

$\rightarrow |4p| = 3$ de donde: $\boxed{p = \frac{3}{4}}$

Para una parábola con eje focal igual al eje y, su ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

Reemplazando el valor de $p = \frac{3}{4}$ se obtiene:

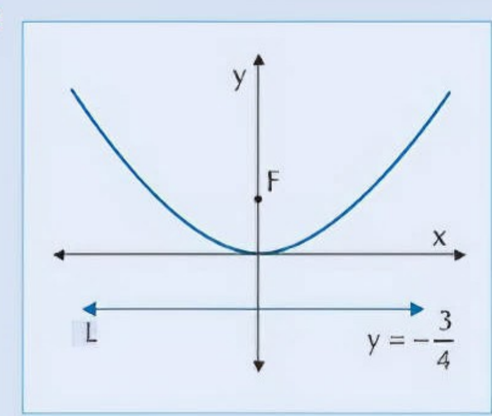
$$x^2 = 4 \cdot \frac{3}{4}y$$

$$\boxed{x^2 = 3y}$$

Directriz: $y = -p \rightarrow L: y = -\frac{3}{4}$

Foco: $(0;p) \rightarrow F\left(0;\frac{3}{4}\right)$

Gráfica:



iv) Se abre hacia la izquierda; L.R. = 6

Si se abre hacia la izquierda, entonces **$p < 0$** y su eje focal coincide con el eje x

Se sabe que L.R. = $|4p|$

$\rightarrow |4p| = 6 \quad \rightarrow \quad p = \frac{-3}{2}$

Para una parábola con eje focal igual al eje x, su ecuación es de la forma:

$$y^2 = 4px$$

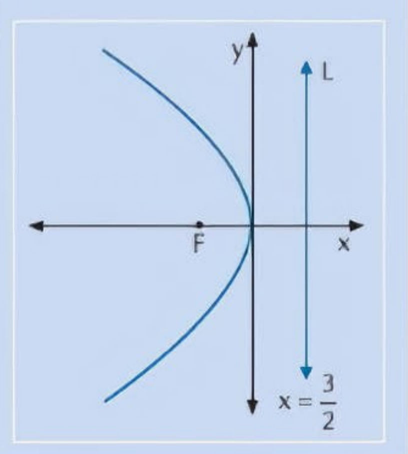
Reemplazando el valor de p = -3/2 se obtiene:

$$y^2 = 4\left(-\frac{3}{2}\right)x \rightarrow y^2 = -6x$$

Directriz: $x = -p \rightarrow L: x = \frac{3}{2}$

Foco: $(p;0) \rightarrow F\left(\frac{-3}{2}; 0\right)$

Gráfica:



Ecuación ordinaria y ecuación general de la parábola

Ecuación ordinaria de la parábola

Si consideramos una parábola con vértice V(0;0) y eje focal igual al eje x, su ecuación canónica es:

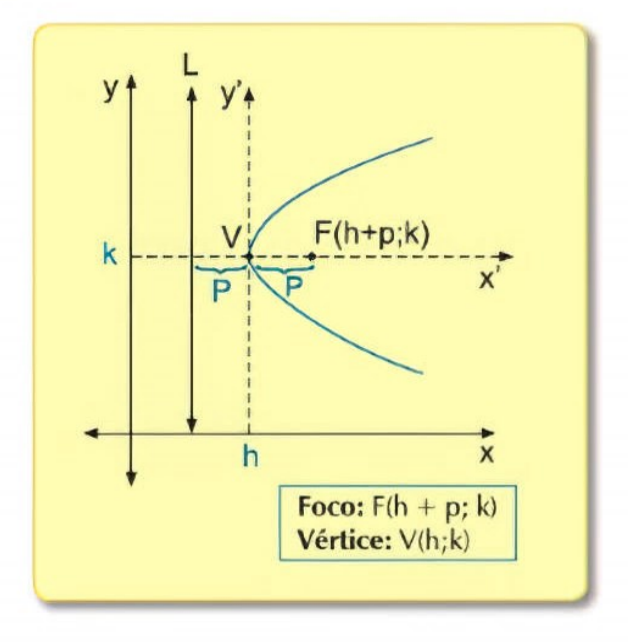
$$y^2 = 4px$$

Si le aplicamos una traslación T(h;k) al vértice, obtenemos la ecuación ordinaria de la parábola con vértice V(h;k).

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Por efecto de la traslación, el nuevo eje focal x' se mantiene paralelo al eje x. La ecuación ordinaria permite conocer de inmediato las coordenadas de su vértice, el valor de p y, por lo tanto, la longitud del lado recto.

La ecuación de la recta directriz es: L: $x = h - p$



Ecuación general de la parábola

Desarrollando los cuadrados de binomio y ordenando la ecuación ordinaria se obtiene:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

$$y^2 + (-4p)x + (-2k)y + (k^2 + 4ph) = 0$$

Si designamos: $-4p = D$; $-2k = E$; $k^2 + 4ph = F$

se obtiene la ecuación general de la parábola

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

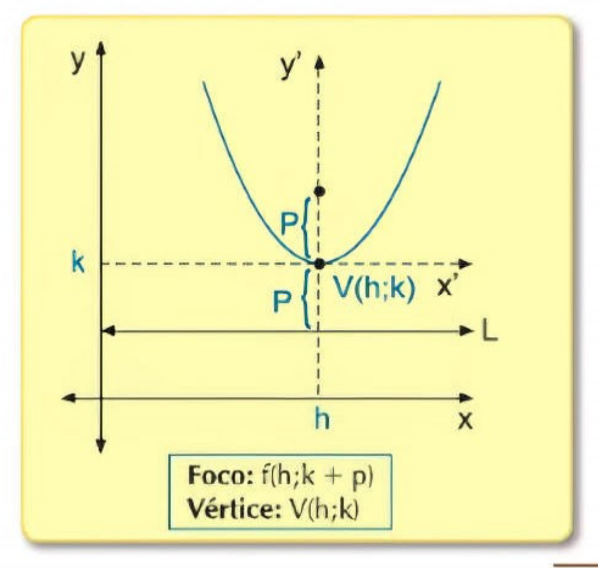
Ahora: Si el eje focal o eje de simetría es paralelo al eje y, la ecuación ordinaria es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

y la ecuación de la recta directriz es: L: $y = k - p$

La ecuación general en este caso es:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$



Problemas resueltos

1 Dada la ecuación general de la parábola, encontrar:

- Las coordenadas del vértice
- Las coordenadas del foco
- La ecuación de la directriz
- Trazar la gráfica

i) $y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$
ii) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

Resolución:

i) $y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$

Ordenamos la ecuación para completar cuadrados y llevarlo a la forma ordinaria: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

$$y^2 + 6y = 8x - 25$$
$$y^2 + 6y + 9 = 8x - 25 + 9$$
$$(y + 3)^2 = 8x - 16$$
$$(y - (-3))^2 = 8(x - 2)$$

$\rightarrow$ $k = -3$; $h = 2$; $4p = 8 \rightarrow$ $p = 2$

→ **Vértice:** $V(h;k) \rightarrow V(2;-3)$

→ **Foco:** como eje focal es paralelo al eje x

$F(p + h;k) \rightarrow F(2 + 2; -3)$


$\therefore$ $F(4;-3)$



Traslación de un punto en el plano
$F(p;0) \xrightarrow{T(h;\,k)} F(p + h; 0 + k)$

→ **Directriz:**

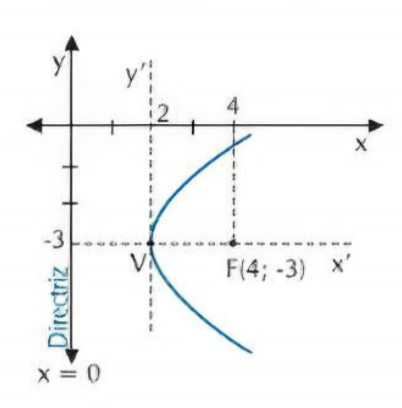
Como esta parábola ha sido trasladada h unidades sobre el eje "x", la directriz también se habrá trasladado h unidades sobre el eje "x".

Luego la ecuación: $x = -p$

se convierte en: $x = -p + h \rightarrow x = -2 + 2$

$\therefore$ $L: x = 0$ (La directriz es el eje y)

Gráfica:



ii) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

Ordenamos la ecuación para completar cuadrados y llevarlo a la forma ordinaria:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$
$$x^2 - 4x = 2y - 10$$
$$x^2 - 4x + 4 = 2y - 10 + 4$$
$$(x - 2)^2 = 2y - 6$$
$$(x - 2)^2 = 2(y - 3)$$

$\rightarrow$ $h = 2$; $k = 3$; $4p = 2 \rightarrow$ $p = 1/2$

→ **Vértice:** $V(h;k) \rightarrow V(2;3)$

→ **Foco:** $F(h; k + p) \rightarrow F(2; 7/2)$



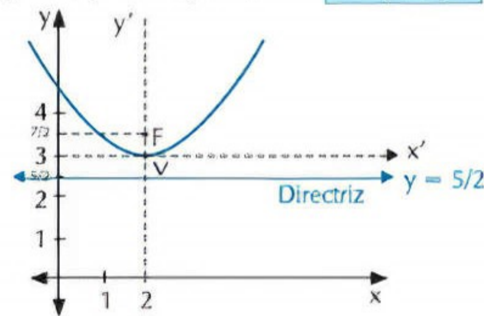
Foco cuando el vértice es V(0; 0): $F(0; p)$ $\xrightarrow{T(h;\,k)}$ Foco cuando el vértice es V(h; k): $F(h; k+p)$

→ **Directriz:**



Ec. de la directriz cuando el vértice es V(0; 0): $L: y = -p$ $\xrightarrow{T(h;\,k)}$ Ec. de la directriz cuando el vértice es V(h; k): $L: y = k - p$

Luego, $L: y = 3 - 1/2 \rightarrow$ $L: y = 5/2$



2 Determina la ecuación ordinaria, general y la gráfica de la parábola, de acuerdo a los siguientes datos:

i) Directriz: $y = 1$; Foco $(-3;7)$

ii) Foco $(1;3)$; vértice $(-2;3)$

Resolución:

i) $L: y = 1$; $F(-3;7)$

Ya que la directriz es paralela al eje x, el eje focal será paralelo al eje y, y por lo tanto la ecuación de la parábola tendrá la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$Ya que el vértice V está a la mitad entre la directriz y el foco, sus coordenadas serán:

$$V\left(-3;\frac{7+1}{2}\right) = V(-3;4) \rightarrow h=-3 \;;\; k=4$$

La distancia dirigida del vértice al foco es p, entonces:

$$p = d(V;F) = 7-4 = 3$$

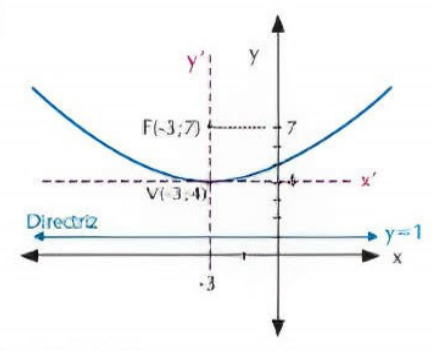
Por lo tanto, la ecuación ordinaria es:

$$(x+3)^2 = 12(y-4)$$

Elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos la ecuación general:

$$x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$$

Gráfica:



ii) $F(1;3)$; $V(-2;3)$

Como el eje focal pasa por el vértice V y por el foco F, deducimos que es paralelo al eje y, luego la ecuación de la parábola es de la forma:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$, donde $V(h,k) = V(-2;3)$

Además: $d(V;F) = p = 3$

Reemplazando.

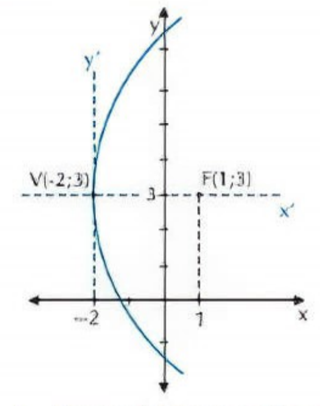
$(y-3)^2 = 12(x+2)$ (Ecuación ordinaria)

Desarrollando:

$y^2 - 6y + 9 = 12x + 24$

$y^2 - 12x - 6y - 15 = 0$ (Ecuación general)

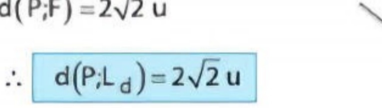
Gráfica:



3 El foco de una parábola es F(4 ; 0) y un punto sobre la parábola es P(2 ; 2). Halla la distancia del punto P a la recta directriz de la parábola.

Resolución:

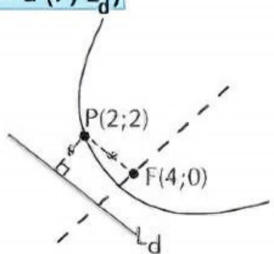
- Recordemos que: $d(P;F) = d(P;L_d)$
- Entonces:



$$d(P;F) = \sqrt{(4-2)^2 + (0-2)^2}$$

$$d(P;F) = 2\sqrt{2}\text{ u}$$

$$\therefore\; d(P;L_d) = 2\sqrt{2}\text{ u}$$



4 La distancia de un punto M al foco de una parábola de ecuación $x^2 - 16y - 64 = 0$ es de 5 u. Halla la distancia de M al vértice, sabiendo que M pertenece a dicha parábola.

Resolución:

Analizamos la ecuación de la parábola:

$$x^2 - 16y - 64 = 0$$
$$x^2 = 16(y+4)$$
$$4p = 16 \rightarrow p = 4$$
$$\begin{cases} V(0;-4) \\ F(0;0) \\ L_d : y = -8 \end{cases}$$

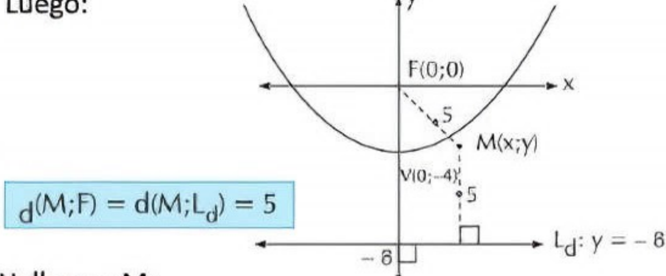
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Luego: $V = (h;k)$

$F = (h;k+p)$

$L_d : y = k - p$

Luego:



$d(M;F) = d(M;L_d) = 5$

Hallamos M:

i) $y = -8-(-5) = -3 \rightarrow M(x;-3)$

ii) $d(M;F) = 5 \rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (-3-0)^2} = 5$

$$x^2 + 9 = 25 \rightarrow x = \pm 4$$

$$\therefore M(4;-3) \text{ o } M(-4;-3)$$

Tomamos M(4 ; -3), entonces:

$$d(M;V) = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-(-4))^2} = \sqrt{17}\text{ u}$$

Si se toma M(–4 ; –3) obtendremos la misma respuesta,

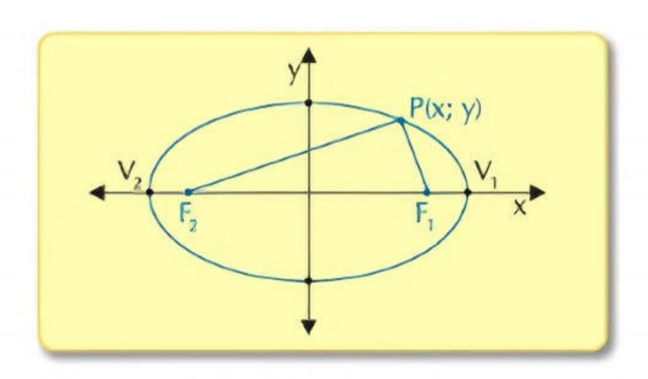
luego: $d(M;V) = \sqrt{17}\text{ u}$

La elipse

Definición y elementos de la elipse

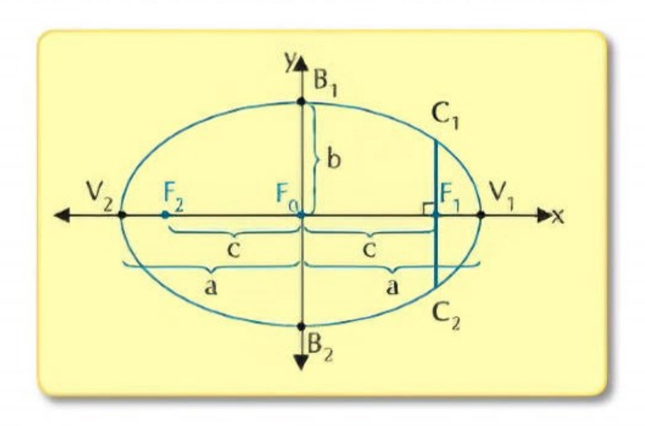
La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos P(x;y) cuya ubicación en el plano es tal, que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de él es constante.

Estos dos puntos fijos del plano, se llaman focos y se designan por F_1 y F_2



$$d(P; F_1) + d(P;F_2) = \text{constante}$$

Los elementos más importantes de la elipse son:



Focos: Son los puntos fijos F_1 y F_2

Recta focal o eje focal: Es la recta que pasa por los focos, tal como V_1V_2.

Recta secundaria: Es la recta perpendicular a la recta focal en el punto medio del segmento $F_1 F_2$.

Ejemplo: La recta B_1B_2.

Centro: Es el punto de intersección de la recta focal y secundaria, que equidista de los focos. Se designa por F_0.

Vértices y covértices: Los vértices son los puntos de intersección de la elipse con la recta focal, se designan por V_1 y V_2, a los puntos B_1 y B_2 se les llama covértices.

Eje mayor: Es el segmento V_1V_2 que se considera de longitud "2a", donde "a" es el valor del semieje mayor.

Eje menor: Es el segmento B_1B_2 de la recta secundaria interceptada por la elipse, se considera de longitud "2b", donde "b" es el valor del semieje menor.

Distancia focal: Es la distancia entre los focos, se considera de longitud "2c", es decir: $F_1F_2 = 2c$.

Lado recto: Es la cuerda focal $\overline{C_1C_2}$ perpendicular a la recta focal o eje de simetría.

El método del jardinero

Para dibujar una elipse se puede usar dos alfileres, lápiz e hilo.

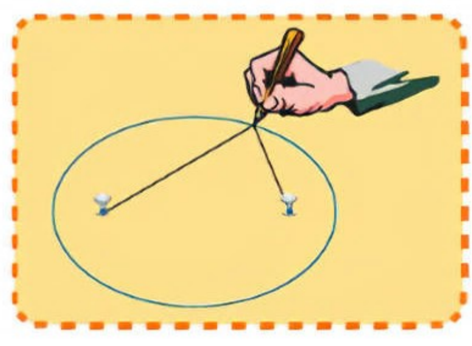
El procedimiento es el siguiente:

1.° Se clavan los dos alfileres en los puntos considerados como focos.

2.° Se unen ambos alfileres con cada extremo del hilo.

3.° Se tensa el hilo con el lápiz

4.° Deslizamos el lápiz en el papel, y la punta del lápiz dibujará la elipse.



Este método es conocido como el "método del jardinero", ya que los jardineros lo usan para trazar elipses en los prados.

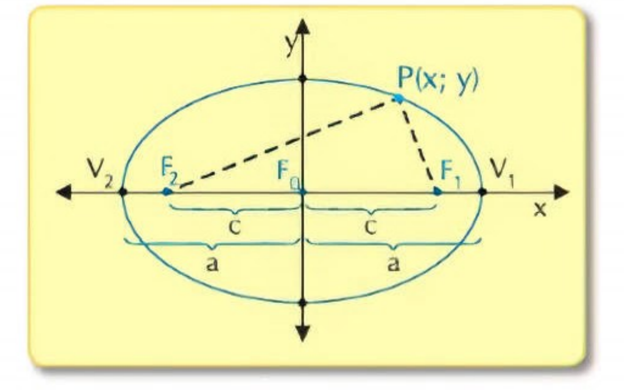
Valor de la constante

Supongamos que el eje focal de la elipse coincide con el eje x, y que el centro se encuentra en el origen de coordenadas ($F_0(0;0)$).

De acuerdo a lo anterior, las coordenadas de los focos son $F_1(c;0)$ y $F_2(-c;0)$.

Si P(x; y) es un punto de la elipse, se cumple que:

$$d(P;F_1) + d(P;F_2) = \text{constante}$$



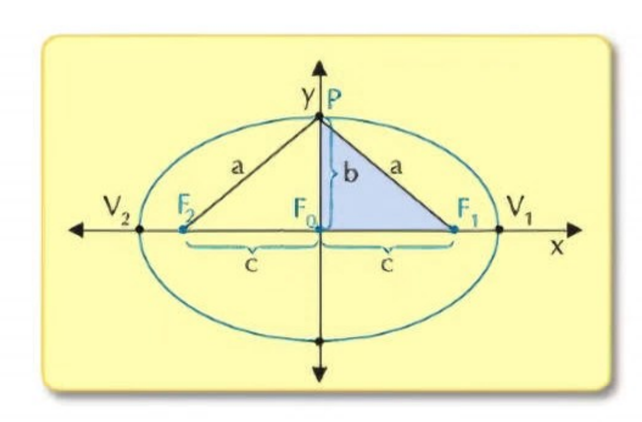
Determinemos ahora el valor de la constante. Si consideramos al punto P ubicado en el vértice V_1, la suma de sus distancias a los focos es constante.

$$d(V_1;F_1) = a - c$$
$$d(V_1;F_2) = a + c$$
$$\rightarrow \quad d(V_1;F_1) + d(V_1;F_2) = 2a$$

Luego

$d(P;F_1) + d(P;F_2) = 2a$ donde "2a" es la constante

Relación entre a, b y c



Para hallar una relación entre a, b y c, ubicamos el punto P(x; y) en la intersección de la elipse con la recta secundaria (eje y).

En este caso:

$d(P;F_1) = d(P;F_2) = a$

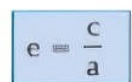
ya que $d(P;F_2) + d(P;F_2) = 2a$

En el $\triangle PF_0F_1$: $c < a$

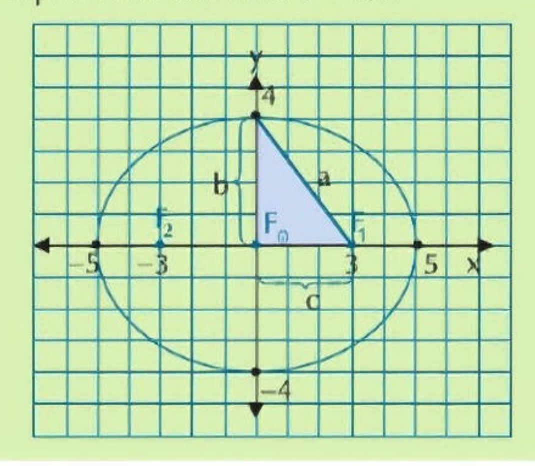
y por el T. de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$

Excentricidad de la elipse

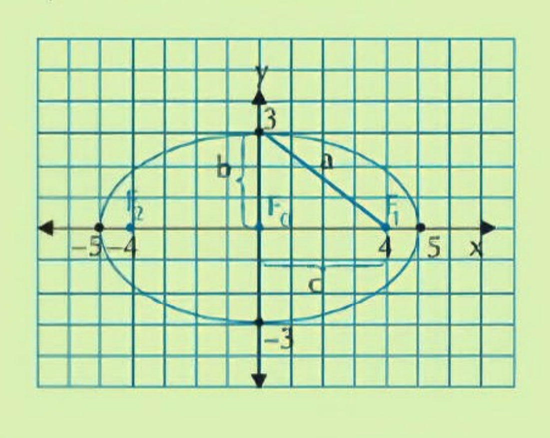
A toda elipse se le asocia un número real que llamamos excentricidad de la elipse, designado por la letra e, y cuyo valor es : →


$$e = \frac{c}{a}$$

i) Elipse de excentricidad e = 3/5



ii) Elipse de excentricidad e = 4/5



Dado que la excentricidad depende de las medidas de c y a, su valor está asociado con la forma de la respectiva elipse; es así que tenemos elipses más o menos achatadas.

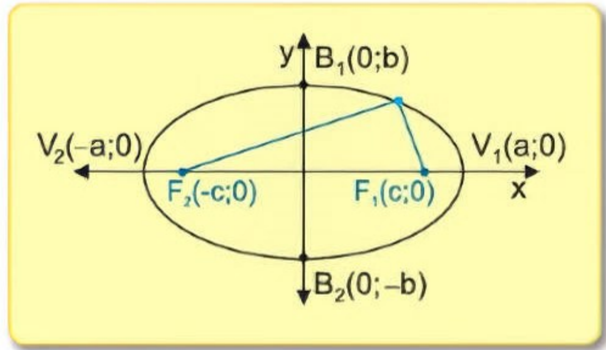
- El valor de 2a es constante, por lo tanto, el achatamiento de la elipse varía según la distancia entre los focos.
- Como sabemos que c es menor que a, es decir, la excentricidad de la elipse $\frac{c}{a}$ es un número menor que 1.
- Si c tiende a cero, entonces e también tiende a cero. En este caso, los focos se acercan entre si y la elipse tiende a convertirse en una circunferencia.
- Si c se acerca al valor a, entonces e se acerca a 1. Los puntos B_1 y B_2 se acercan hacia el centro y la elipse se "achata".

Ecuación de la elipse con centro en el origen

Para encontrar la ecuación analítica de la elipse, expresamos las distancias entre P(x;y), los focos $F_1(c;0)$ y $F_2(-c;0)$ en función de sus coordenadas.

$$d(P;F_1) + d(P;F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$



Aislamos una de las raíces y luego elevamos al cuadrado.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\cancel{4}a^2+\cancel{4}cx$$

Elevando al cuadrado: $\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=(a^2+cx)^2$

$$a^2x^2+a^2y^2-c^2x^2=a^4-a^2c^2$$

Factorizando:

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$, pero $a^2-c^2=b^2$

$\rightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

Dividiendo por a^2b^2 $\rightarrow$ $\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$



Dada la ecuación canónica de la elipse:

$\frac{x^2}{\boxed{a^2}}+\frac{y^2}{\boxed{b^2}}=1$ si el denominador de x^2 es mayor que el denominador de y^2, entonces el eje focal es el eje x.

En caso contrario el eje focal será el eje y.

Luego:

La ecuación canónica de la elipse cuando el eje focal coincide con el eje x, es:

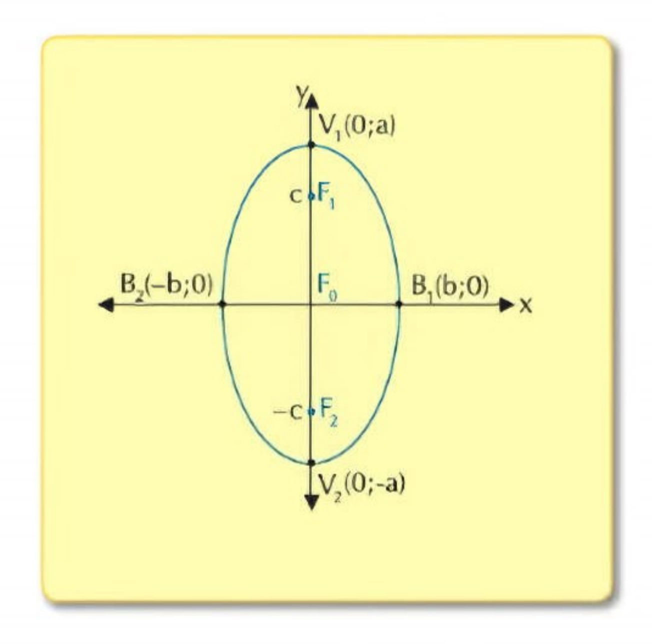
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}\ ;\ a>b>0$$

Los vértices son $V_1(a;0)$ y $V_2(-a;0)$

Análogamente, si el eje focal de la elipse coincide con el eje y, entonces sus focos son $F_1(0;c)$ y $F_2(0;-c)$, y su ecuación canónica es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}\ ;\ a>b>0$$

y en este caso los vértices son $V_1(0;a)$ y $V_2(0;-a)$



Longitud del lado recto

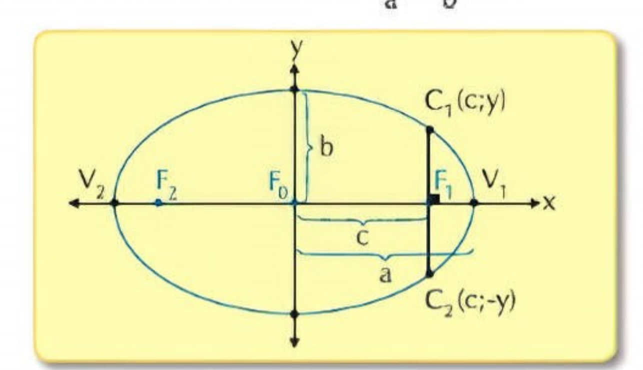
Recordemos que se denomina lado recto (L.R.) a la cuerda que pasa por el foco y que es perpendicular al eje de la elipse.

En la elipse de la figura, las coordenadas de los extremos del lado recto son $C_1(c;y)$ y $C_2(c;-y)$. Como $C_1(c;y)$ pertenece a esta curva, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Reemplazando: $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$

De donde: $y^2=b^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)=b^2\cdot\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y=\frac{b^2}{a}$

Luego: $\boxed{L.R.=d(C_1;C_2)=2y=\frac{2b^2}{a}}$



Problemas resueltos SOBRE ELIPSE

1 Para cada una de las siguientes elipses

i) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ ii) $25x^2+9y^2=225$

determina:

- Las coordenadas de sus focos
- La longitud del eje mayor
- La longitud del eje menor
- La longitud del lado recto
- Excentricidad
- Vértices y covértices

Resolución:

i) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$

Como la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $(a>b)$, entonces el eje focal coincide con el eje x.

Tenemos que: $a^2=36 \rightarrow \boxed{a=6}$

$b^2=25 \rightarrow \boxed{b=5}$

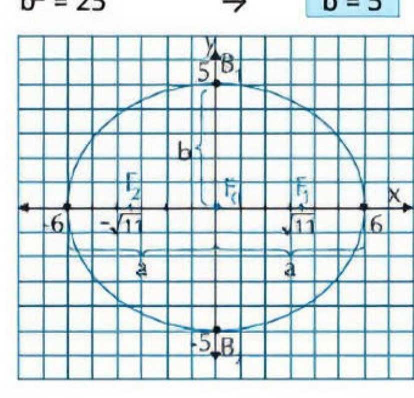
Además:

$b^2+c^2=a^2$

de donde:

$25+c^2=36$

$\boxed{c=\sqrt{11}}$



- Focos: $F_1(\sqrt{11};0)$ y $F_2(-\sqrt{11};0)$
- Longitud del eje mayor: $2a=2\cdot6=12$
- Longitud del eje menor: $2b=2\cdot5=10$
- Longitud del lado recto: $L.R.=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot5^2}{6}=\frac{25}{3}$
- Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{11}}{6}$
- Vértices: $V_1(6;0)$ y $V_2(-6;0)$;
- covértices: $B_1(0;5)$ y $B_2(0;-5)$

ii) $25x^2+9y^2=225$

Esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=\frac{225}{225} \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

Luego es de la forma: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$; $(a>b)$

entonces el eje focal coincide con el eje y

$a^2=25$

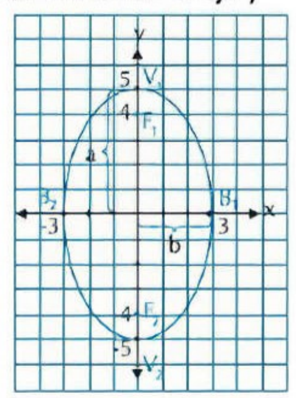
$\rightarrow \boxed{a=5}$

$b^2=9$

$\rightarrow \boxed{b=3}$

$b^2+c^2=a^2$

$\rightarrow \boxed{c=4}$



Por lo tanto:

- Focos: $F_1(0;4)$ y $F_2(0;-4)$
- Longitud del eje mayor: $2a = 2 \cdot 5 = 10$
- Longitud del eje menor: $2b = 2 \cdot 3 = 6$
- Longitud del lado recto: $L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 3^2}{5} = \frac{18}{5}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$
- Vértices: $V_1(0;5)$ y $V_2(0;-5)$;
- Covértices: $B_1(3;0)$ y $B_2(-3;0)$

2 Determina la ecuación de la elipse con focos $F_1(0;6)$ y $F_2(0;-6)$ y excentricidad $e = 0,6$

Resolución:

→ De las coordenadas de los focos deducimos que el eje focal coincide con el eje y, por lo tanto, la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

También observamos que: $F_1(0;c) = F_1(0;6) \rightarrow c = 6$

ya que $e = \frac{c}{a} \rightarrow 0,6 = \frac{6}{a}$

$\rightarrow a = 10$

Como:

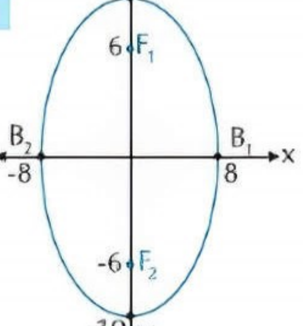
$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 10^2 = b^2 + 6^2$

$b = 8$

∴ La ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$



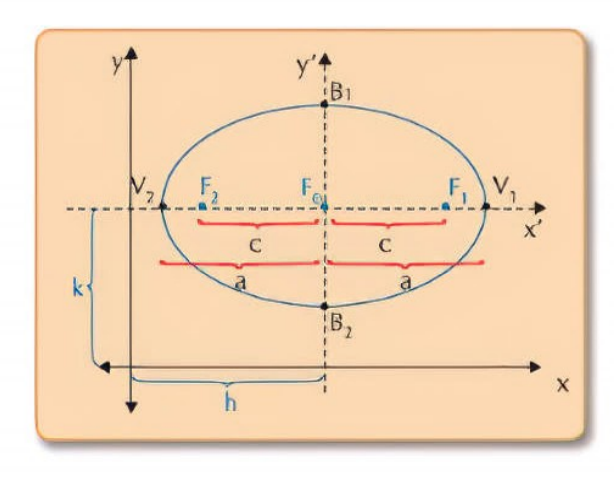
Ecuación ordinaria y general de la elipse

Consideremos la ecuación de la elipse con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si al punto centro le aplicamos una traslación $T(h;k)$; sus nuevas coordenadas son $(h;k)$ y el eje focal de la elipse se sigue manteniendo paralelo al eje x. Entonces:

La ecuación ordinaria de la elipse con centro en $F_0(h;k)$ y eje focal paralelo al eje x, es:



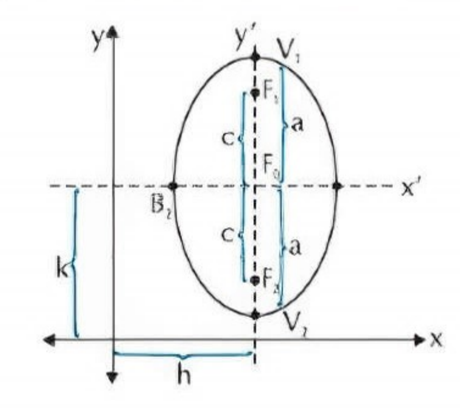
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Además:

Focos:	Vértices:
$F_1(h + c;k)$	$V_1(h + a;k)$
$F_2(h - c;k)$	$V_2(h - a;k)$

Desarrollando los cuadrados de los binomios, ordenando la ecuación e igualando a cero, encontramos la ecuación equivalente, llamada ecuación general de la elipse.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ; \quad A < C$$



Ahora:

Si el eje focal es paralelo al eje y, la ecuación ordinaria es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

o su equivalente

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ; \quad A > C$$

Además:

Focos:	Vértices:
$F_1(h;k + c)$	$V_1(h;k + a)$
$F_2(h;k - c)$	$V_2(h;k - a)$

Si la ecuación de la elipse se presenta en la forma general: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ transformándola completando cuadrados de binomios es posible expresarla en la forma ordinaria, que permite conocer de inmediato las coordenadas de su centro,y los valores de a, b y c.

Ejemplo 1 Determina los elementos (focos, vértices, eje mayor, eje menor, lado recto y excentricidad) de la elipse de ecuación:

$$16x^2 + 25y^2 - 192x - 200y + 576 = 0$$

Resolución:

Ordenamos la ecuación para completar cuadrados en x e y

$$16(x^2 - 12x) + 25(y^2 - 8y) = -576$$

$$16(x^2 - 12x + 36) + 25(y^2 - 8y + 16) = -576 + 576 + 400$$

$$16(x - 6)^2 + 25(y - 4)^2 = 400$$

Dividiendo ambos miembros entre 400, se obtiene:

$$\frac{16(x-6)^2}{400} + \frac{25(y-4)^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

Esta ecuación representa una elipse con centro en (h;k) = (6;4) y eje focal paralelo al eje x (porque el denominador del término $(x - 6)^2$ es mayor que el denominador del término $(y - 4)^2$

Identificando se tiene:

$a^2 = 25 \quad \rightarrow \quad a = 5$

$b^2 = 16 \quad \rightarrow \quad b = 4$

Como: $a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 25 = 16 + c^2 \quad \rightarrow \quad c = 3$

Como esta elipse ha sido trasladada con respecto a su posición canónica, su eje focal también se ha trasladado en h = 6 unidades, por lo tanto, las coordenadas de los focos son:

$$F_1(h + c; k) \text{ y } F_2(h - c; k)$$

Entonces:

Focos: $F_1(9;4)$ y $F_2(3;4)$

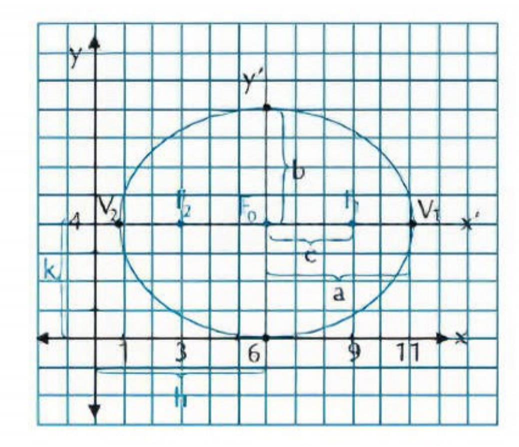
Vértices: $V_1(11;4)$ y $V_2(1;4)$

Eje mayor: $2a = 2 \cdot 5 = 10$

Eje menor: $2b = 2 \cdot 4 = 8$

Lado recto: $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \cdot 4^2}{5} = \dfrac{32}{5}$

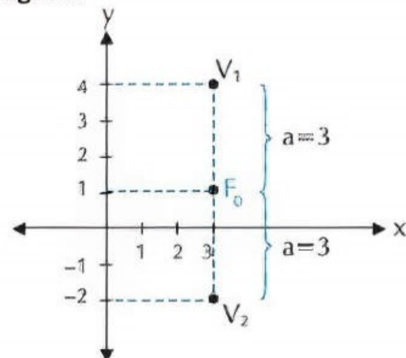
Excentricidad: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$



Ejemplo 2 Halla la ecuación ordinaria y general de una elipse con centro en $F_0(3;1)$, uno de sus vértices (3;–2) y excentricidad 1/3.

Resolución:

Para determinar la ecuación, ubicamos en un sistema de ejes cartesianos, el punto centro y el vértice, como se ve en la figura:



Como el eje focal es paralelo al eje y, la ecuación es de la forma:

$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$; siendo $h = 3$; $k = 1$

Del gráfico: $a = 3$

$e = \dfrac{1}{3} = \dfrac{c}{a} \quad \rightarrow \quad c = 1$

Por propiedad: $a^2 = b^2 + c^2$

$$\rightarrow 3^2 = b^2 + 1^2$$

$$b = 2\sqrt{2}$$

Luego:

La ecuación pedida en su forma ordinaria es:

$$\frac{(x-3)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

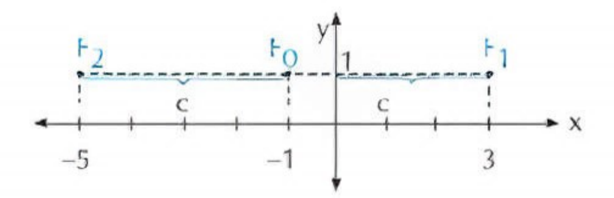
O su equivalente, en forma general:

$$9x^2+8y^2-54x-16y+17=0$$

Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos (x;y) del plano, cuya suma de distancias a los puntos fijos (3;1) y (–5;1) es 20.

Resolución:

Se sabe por definición, que el lugar geométrico será una elipse con focos en los puntos dados y que la constante es 20.



Entonces: $2a = 20 \rightarrow a = 10$; $F_1(3;1)$; $F_2(-5;1)$

Como el centro es el punto medio del segmento que une los focos, entonces:

$$h=\frac{3+(-5)}{2}=-1 \quad ; \quad k=\frac{1+1}{2}=1$$

Luego: $F_0(-1;1)$

Además $d(F_2;F_0) = d(F_1;F_0) = c = 4$

Y como $a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow \quad 10^2 = b^2 + 4^2$

$b^2 = 84$

Como el eje focal es paralelo al eje x, entonces la ecuación pedida, en su forma ordinaria, es:

$$\frac{(x+1)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{84}=1$$

Y en su forma general, resulta:

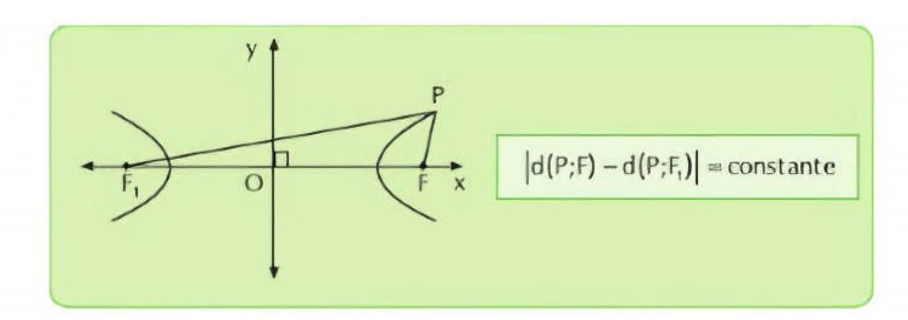
$$21x^2+25y^2+42x-50y-2\,054=0$$

Hipérbola

A. Definición

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos P(x;y) del plano, de manera que, el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

La hipérbola consta de dos ramas.



B. Elementos

Focos: Son los punto fijos F y F_1.

Centro: Es el punto medio del segmento cuyos extremos son los focos O.

Eje focal: Es la recta que pasa por los focos.

Vértices: Son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal. Se designan por V y V_1.

Eje transverso: Es el segmento que une los vértices, su longitud es $VV_1 = 2a$.

Eje conjugado: Es el segmento mediatriz del segmento VV_1, su longitud es $BB_1 = 2b$.

Distancia focal: Es la distancia entre los focos, su longitud es $FF_1 = 2c$.

Cuerda: Es el segmento que une dos puntos de la hipérbola $\overline{AA_1}$ o $\overline{DD_1}$

Cuerda focal: Es la cuerda que pasa por uno de los focos $\overline{EE_1}$

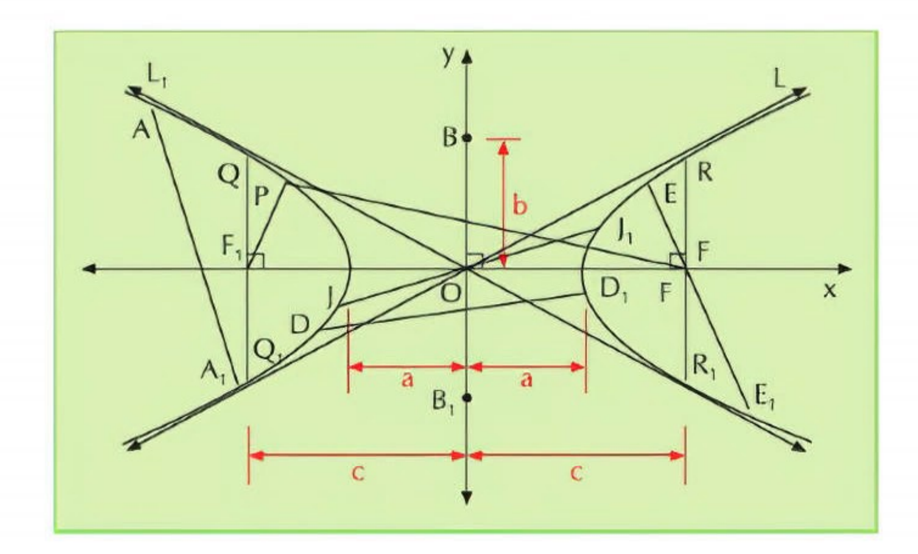
Diámetro: Es el segmento que une dos puntos de la hipérbola y que pasa por su centro JJ_1.

Lados rectos: Son las cuerdas focales perpendiculares al eje focal $\overline{QQ_1}$ y $\overline{RR_1}$, sus longitudes son $\frac{2b^2}{a}$.

Asíntotas: Son las rectas L y L_1 que limitan a la curva se acercan paulatinamente a la curva sin llegar a intersectarla.

Ejemplo

Radios vectores: Son los segmentos que unen los focos con un punto que se encuentra sobre una de las ramas PF y PF_1

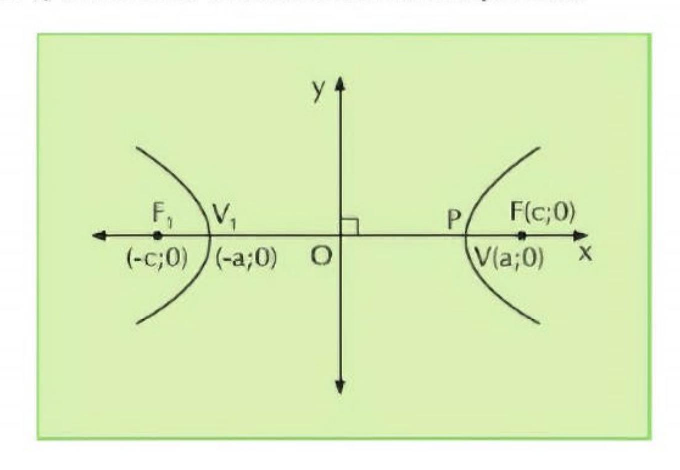


C. Valor constante

De acuerdo a las definiciones anteriores las coordenadas de los focos son $F_1(-c;0)$ y $F(c;0)$, de los vértices son $V(a;0)$ y $V_1(-a;0)$

Supongamos que el punto P coincide con el vértice V, de acuerdo a la definición de la hipérbola.

$$|d(P;F) - d(P;F_1)| = \text{constante}$$
$$\big||c-a| - |-c-a|\big| = \text{constante}$$
$$\big||c-a| - |-c+a|\big| = \text{constante}$$
$$|(c-a) - (c+a)| = \text{constante}$$
$$|\not{c} - a - \not{c} - a| = \text{constante}$$
$$|-2a| = \text{constante}$$
$$\therefore \boxed{\text{Constante} = 2a}$$



Entonces por definición: $|d(P;F) - d(P;F_1)| = 2a$

Se tiene:

$$\boxed{d(P;F) - d(P;F_1) = 2a} \qquad \boxed{d(P;F) - d(P;F_1) = -2a}$$

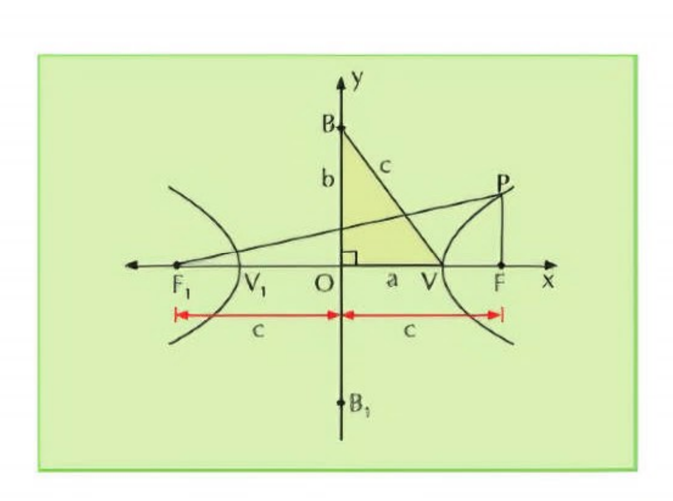
Relación entre a, b y c

En el ΔF_1PF aplicando el teorema de la desigualdad triangular:

$$|d(F_1;F)| > |d(P;F) - d(P;F_1)|$$
$$|2c| > |-2a| \Rightarrow 2c > 2a$$
$$\therefore \boxed{c > a}$$

En el ⊿ BOV por el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



D. Excentricidad de la hipérbola

La excentricidad (e) de la hipérbola es la relación de c y a. $e = \dfrac{c}{a}$

Entonces:

- Como 2a es constante, la abertura de las ramas de la hipérbola varía según la distancia entre los focos.
- Como c es mayor que a, la excentricidad de la hipérbola es mayor que 1.
- Si el valor de c se acerca al valor de a, entonces e se acerca a 1. Las dos ramas se cierran y se aproximan a las semirectas que pasan por el vértice y por el centro de la hipérbola.
- Si c tiende al infinito, entonces e tiende también al infinito. En este caso, las ramas se abren cada vez más.

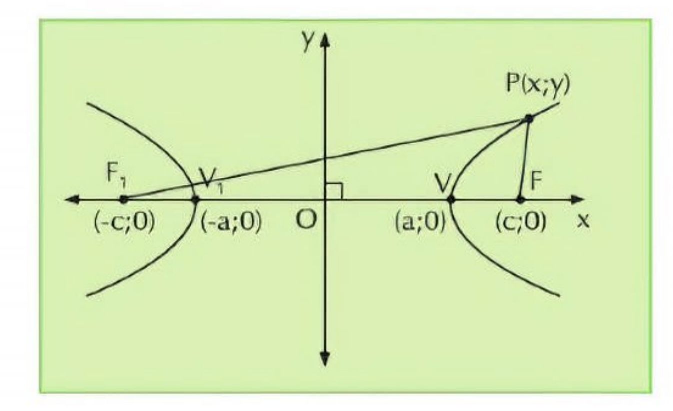
E. Ecuación de la hipérbola de centro el origen de coordenadas, eje focal los ejes coordenados.

Primer caso: Eje focal el eje x.

Por definición: $d(P;F) - d(P;F_1) = -2a$

$$\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2} - \sqrt{(-c-x)^2+(0-y)^2} = -2a$$

$$\sqrt{(-c-x)^2+(-y)^2} = 2a + \sqrt{(c-x)^2+(-y)^2}$$



Elevando al cuadrado a ambos miembros:

$$(-c-x)^2 + \cancel{(-y)^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2+(-y)^2} + (c-x)^2 + \cancel{(-y)^2}$$

$$\cancel{c^2} + 2cx + \cancel{x^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} + \cancel{c^2} - 2cx + \cancel{x^2}$$

$$\cancel{4}cx - \cancel{4}a^2 = \cancel{4}a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros:

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2\left[(c-x)^2+y^2\right]$$

$$c^2x^2 - \cancel{2cxa^2} + a^4 = a^2c^2 - \cancel{2cxa^2} + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \quad \ldots❶$$

Se sabe que:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$

Reemplazando en ❶: $x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Dividiendo ambos miembros por a^2b^2.

$$\frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} - \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

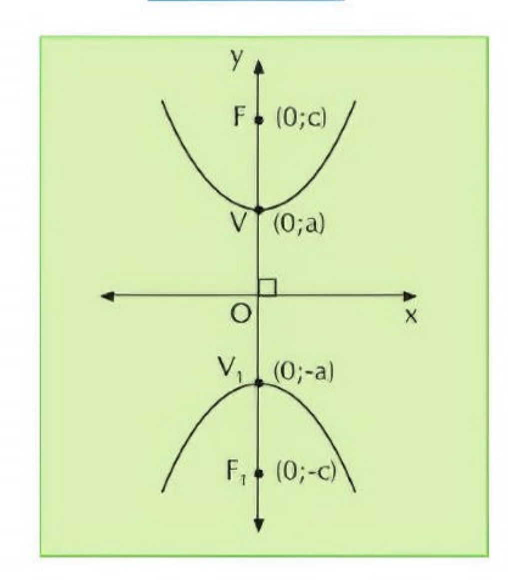
$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta ecuación, también se llama ecuación canónica de la hipérbola.

Segundo caso: Eje focal el eje y.

La ecuación canónica de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



f. Ecuaciones de las asíntotas

Caso 1: Eje focal, eje x

Ecuación de la asíntota L

$$y-b=\frac{b+b}{a+a}(x-a)$$

$$y-b=\frac{b}{a}(x-a)$$

$$y-b=\frac{b}{a}x-\frac{b\cdot \cancel{a}}{\cancel{a}}$$

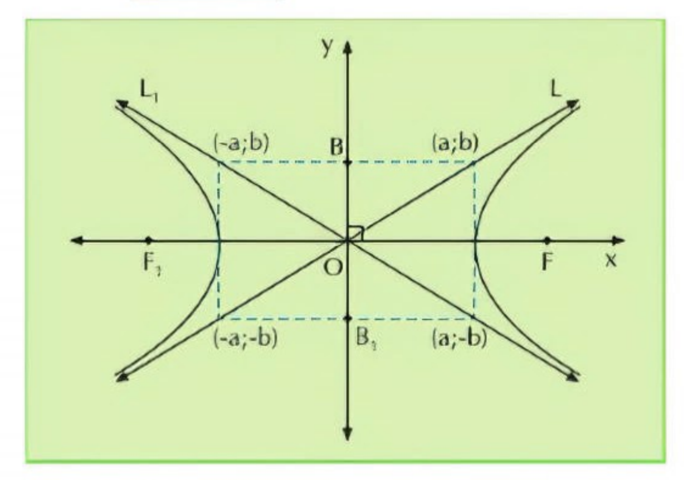
$$y-\cancel{b}=\frac{b}{a}x-\cancel{b} \quad \therefore \quad \boxed{y=\frac{b}{a}x}$$

Ecuación de la asíntota L_1

$$y-b=\frac{b+b}{-a-a}(x+a)$$

$$y-\cancel{b}=-\frac{b}{a}x-\frac{\cancel{b}\cdot \cancel{a}}{\cancel{a}}$$

$$\therefore \quad \boxed{y=-\frac{b}{a}x}$$



Caso 2: Eje focal, eje y

Ecuación de la asíntota L

$$y-a=\frac{a+a}{b+b}(x-b)$$

$$y-a=\frac{2a}{2b}(x-b)$$

$$y-\cancel{a}=\frac{b}{a}x-\frac{\cancel{a}\cdot \cancel{b}}{\cancel{b}}$$

$$\therefore \quad \boxed{y=\frac{a}{b}x}$$

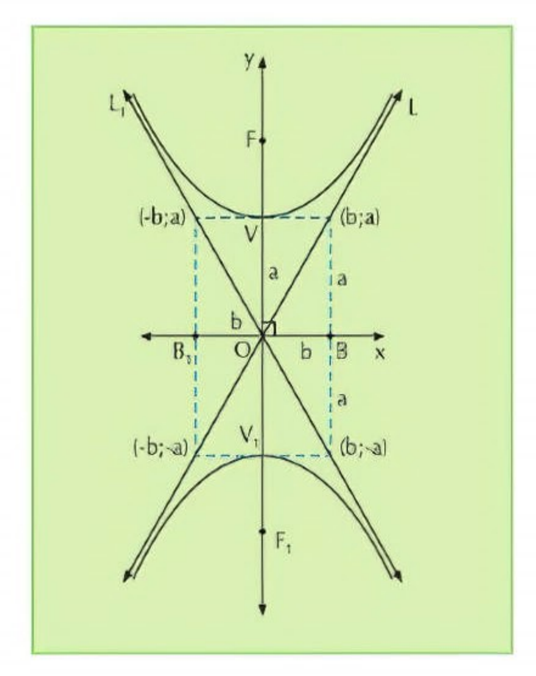
Ecuación de la asíntota L_1

$$y-a=\frac{a+a}{-b-b}(x+b)$$

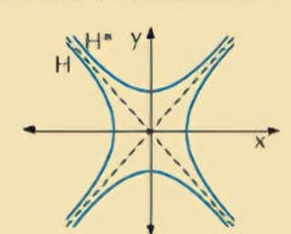
$$y-a=\frac{2a}{-2b}(x+b)$$

$$y-\cancel{a}=-\frac{a}{b}x-\frac{\cancel{a}\cdot \cancel{b}}{\cancel{b}}$$

$$\therefore \quad \boxed{y=-\frac{b}{a}x}$$







Se llaman hipérbolas conjugadas aquellas en que el eje focal de una es el eje secundario de la otra.

$$\boxed{H:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad \boxed{H^*:\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

Si a = b, la ecuación de la hipérbola se reduce a: $x^2-y^2=a^2$, que corresponde a la ecuación de una hipérbola equilátera, donde:

$$\boxed{c=a\sqrt{2}} \quad y \quad \boxed{e=\sqrt{2}}$$

En la hipérbola equilátera, las ecuaciones de las asíntotas son: $\boxed{y=x}$ e $\boxed{y=-x}$

Problemas resueltos SOBRE HIPÉRBOLA

1 Determina los elementos (focos, eje transverso, eje conjugado, lado recto, excentricidad, vértices y asíntotas) de la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

Resolución:

La ecuación dada $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{8^2}-\frac{y^2}{6^2}=1$ es de la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Comparando las dos ecuaciones se deduce que:

$a^2=8^2 \quad \Rightarrow \quad a=8$

$b^2=6^2 \quad \Rightarrow \quad b=6$

Se sabe que: $c^2=a^2+b^2$

$c^2=8^2+6^2 \quad \Rightarrow \quad c=10$

Los elementos de la hipérbola son:

Eje focal: Es el eje x.

Focos: $F(c;0)=F(10;0)$

$F_1(-c;0)=F(-10;0)$

Eje transverso: $2a=2\cdot 8=16$

Eje conjugado: $2b=2\cdot 6=12$

Lado recto: $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 6^2}{8}=9$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

Vértices: $V(a;0)=V(8;0)$

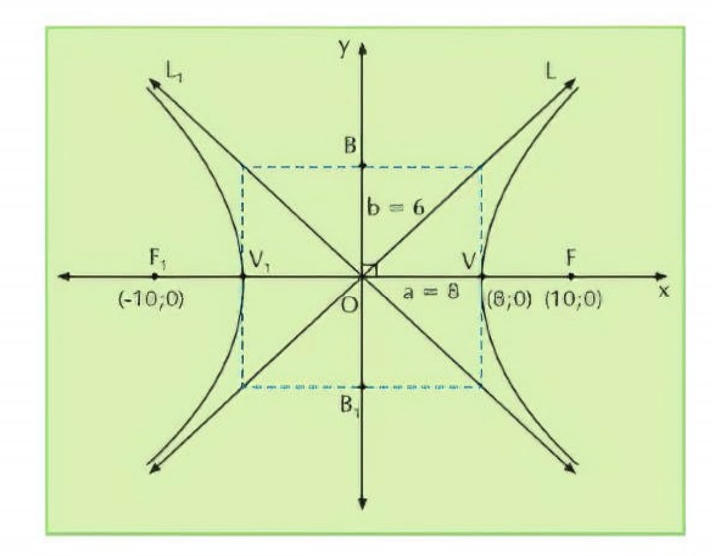
$V_1(-a;0)=V(-8;0)$

Ecuación de las asíntotas:

Asíntota $\overleftrightarrow{L}$: $y=\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\frac{6}{8}x \Rightarrow y=\frac{3}{4}x$

Asíntota $\overleftrightarrow{L_1}$: $y=-\frac{b}{a}x \Rightarrow y=-\frac{6}{8}x \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x$

Graficando la hipérbola



2 Determina los elementos (focos, eje transverso, eje conjugado, lado recto, excentricidad, vértices, asíntotas) de la hipérbola cuya ecuación es $16y^2 - 9x^2 = 144$.

Resolución:

La ecuación $16y^2 - 9x^2 = 144$ se le puede escribir de la siguiente forma: $\frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = \frac{144}{144}$, resultando $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$, es decir $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$ que es la ecuación de la forma $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, el eje focal es paralelo al eje y.

Entonces: $a^2 = 3^2 \Rightarrow$ $a = 3$

$b^2 = 4^2 \Rightarrow$ $b = 4$

Se sabe que: $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow$ $c = 5$

Los elementos de la hipérbola son:

Eje focal: es el eje y

Focos: $F(0;c) = F(0;5)$

$F(0;-c) = F(0;-5)$

Eje transverso: $2a = 2 \cdot 3 = 6$

Eje conjugado: $2b = 2 \cdot 4 = 8$

Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 4^2}{3} = \frac{32}{3}$

Exentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

Vértices: $V(0;a) = V(0;3)$

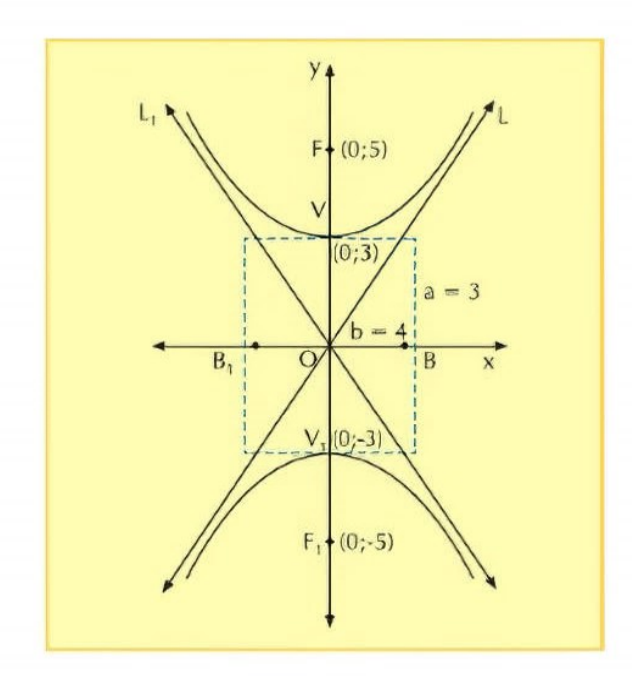
$V_1(0;-a) = V_1(0;-3)$

Ecuación de las asíntotas:

Asíntota $\overleftrightarrow{L}$: $y = \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$

Asíntota $\overleftrightarrow{L_1}$: $y = -\frac{a}{b}x \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$

Graficando la hipérbola



G. Ecuación de la hipérbola de centro (h;k), eje focal paralelo a los ejes coordenados

Primer caso: eje focal paralelo al eje x.

Por definición:

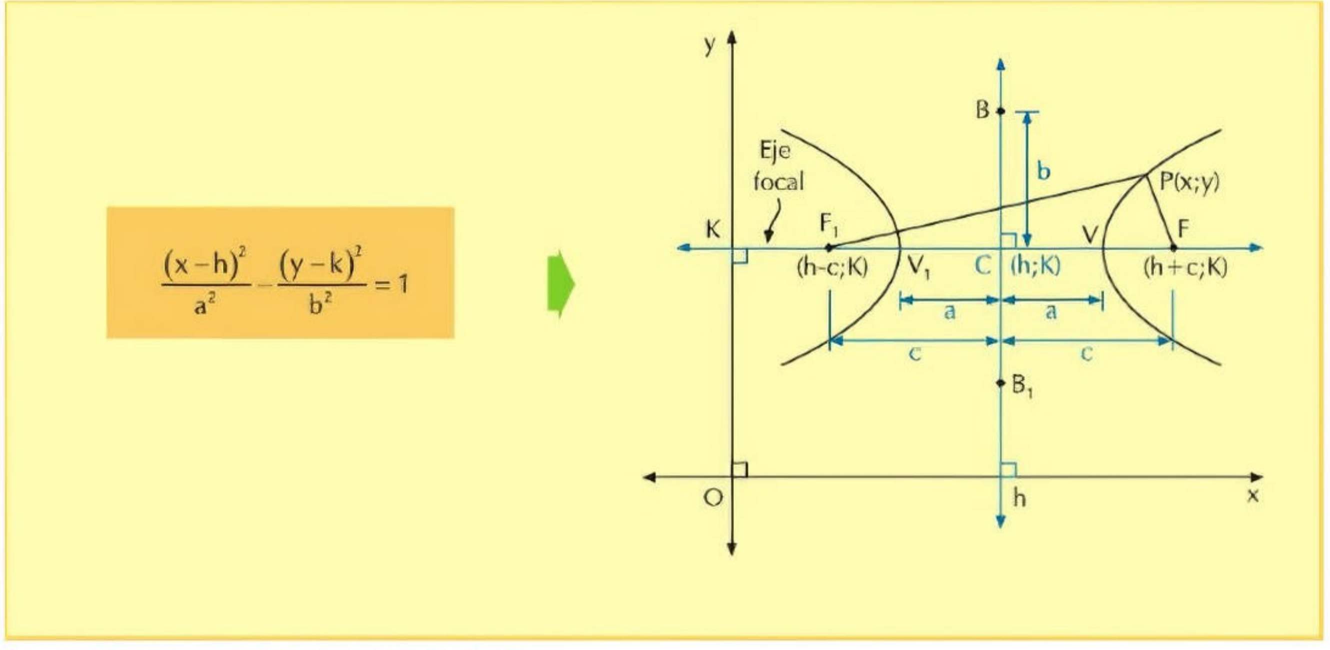
$d(P;F) - d(P:F_1) = -2a$

$$\sqrt{(h+c-x)^2+(k-y)^2}-\sqrt{(h-c-x)^2+(k-y)^2}=-2a$$

$$\sqrt{\left[-((x-h)-c)\right]^2+(-(y-k))^2}-\sqrt{\left[-((x-h)+c)\right]^2+(-(y-k))^2}=-2a$$

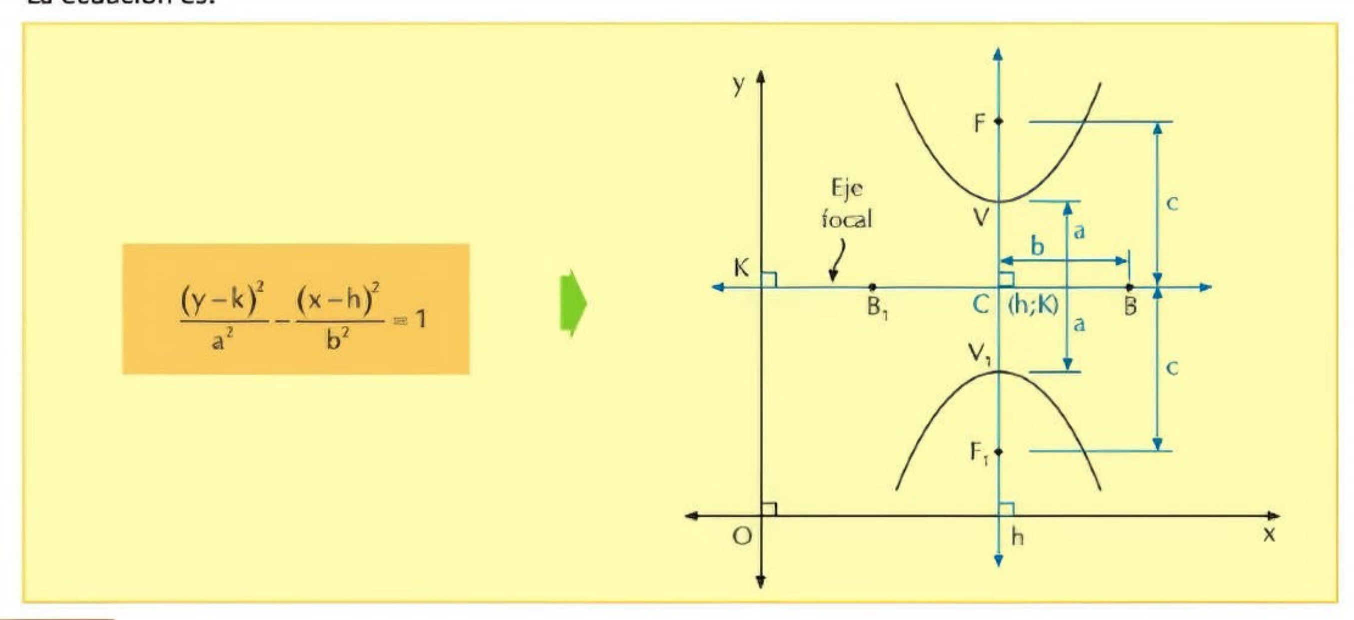
$$\sqrt{((x-k)-c)^2+(y-k)^2}-\sqrt{((x-h)+c)^2+(y-k)^2}=-2a$$

Trasponiendo términos, elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que $c^2 = a^2 + b^2$ se logra:



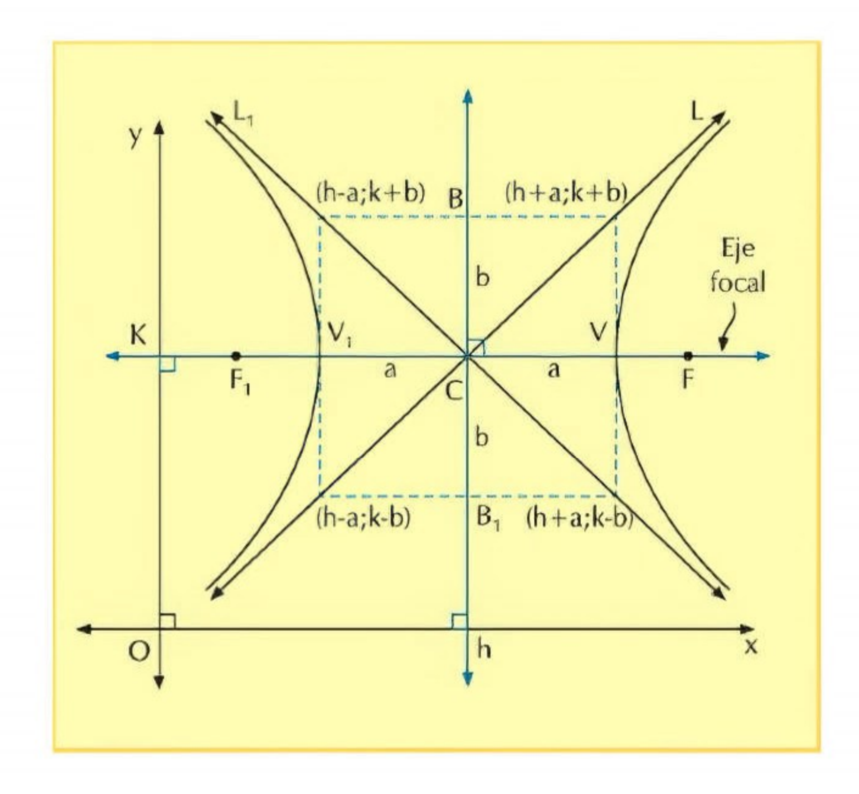
Segundo caso: eje focal paralelo al eje y.

La ecuación es:



H. Ecuación de las asíntotas

Caso 1: Eje focal paralelo al eje x.



Ecuación de la asíntota L

$$y-(k+b)=\frac{(k+b)-(k-b)}{(h+a)-(h-a)}(x-(h+a))$$

$$(y-k)-b=\frac{\cancel{k}+b-\cancel{k}+b}{\cancel{h}+a-\cancel{h}+a}((x-h)-a)$$

$$(y-k)-b=\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a}((x-h)-a)$$

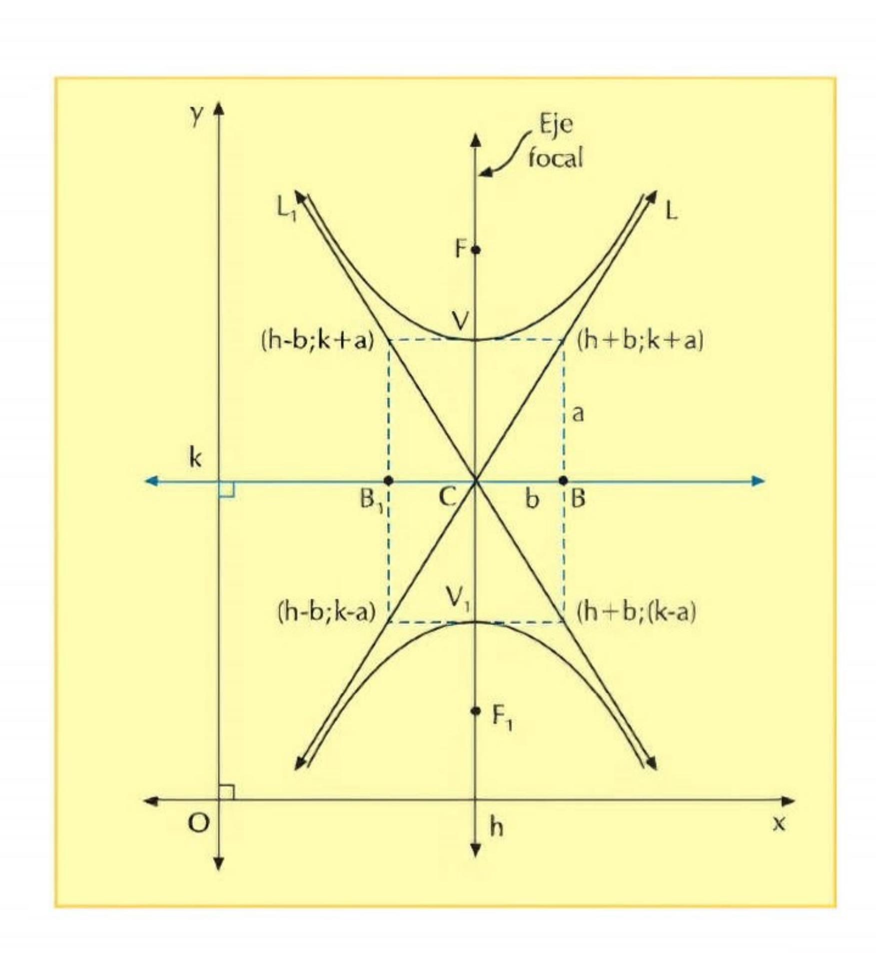
$$(y-k)-\cancel{b}=\frac{b}{a}(x-h)-\frac{\cancel{b}\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}}$$

$$\therefore\quad y-k=\frac{b}{a}(x-h)$$

Ecuación de la asíntota L_1

$$y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$$

Caso 2: Eje focal paralelo al eje y.



Ecuación de la asíntota L

$$y-(k+a)=\frac{(k+a)-(k-a)}{(h+b)-(h-b)}(x-(h+b))$$

$$(y-k)-a=\frac{\cancel{k}+a-\cancel{k}+a}{\cancel{h}+b-\cancel{h}+b}((x-h)-b)$$

$$(y-k)-a=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}b}((x-h)-b)$$

$$(y-k)-\cancel{a}=\frac{a}{b}(x-h)-\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{b}}{\cancel{b}}$$

$$\therefore\quad y-k=\frac{a}{b}(x-h)$$

Ecuación de la asíntota L_1

$$y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$$

Problemas resueltos

1 Determina la ecuación de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

Resolución:

Ordenando la ecuación para completar cuadrados:

$(9x^2 + 90x) - (16y^2 - 32y) = 367$

$9(x^2 + 10x) - 16(y^2 - 2y) = 367$

$9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 - 2y + 1) = 367 + 225 - 16$

$9(x + 5)^2 - 16(y - 1)^2 = 576$

$$\frac{9(x+5)^2}{576} - \frac{16(y-1)^2}{576} = \frac{576}{576}$$

$$\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{(x+5)^2}{8^2} - \frac{(y-1)^2}{6^2} = 1}$$

Comparando con la ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

se tiene que: $h = -5$, $k = 1$, $a = 8$, $b = 6$

Encontramos c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow \boxed{c = 10}$$

Los elementos de la hipérbola son:

Eje focal: Paralelo al eje x

Centro: $C(h;k) = C(-5;1)$

Focos: $F(10-5;1) = F(5;1)$

$F_1(-10-5;1) = F_1(-15;1)$

Eje transverso: $2a = 2 \cdot 8 = 16$

Eje conjugado: $2b = 2 \cdot 6 = 12$

Lado recto: $LR = \dfrac{2 \cdot b^2}{a} = \dfrac{2 \cdot 6^2}{8} = 9$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

Vértices: $V(8-5;1) \Rightarrow V(3;1)$

$V_1(-5-8;1) \Rightarrow V_1(-13;1)$

Ecuación de las asíntotas

Asíntota $\overleftrightarrow{L}$: $y - k = \dfrac{b}{a}(x - h)$

$$y - 1 = \frac{6}{8}(x + 5)$$

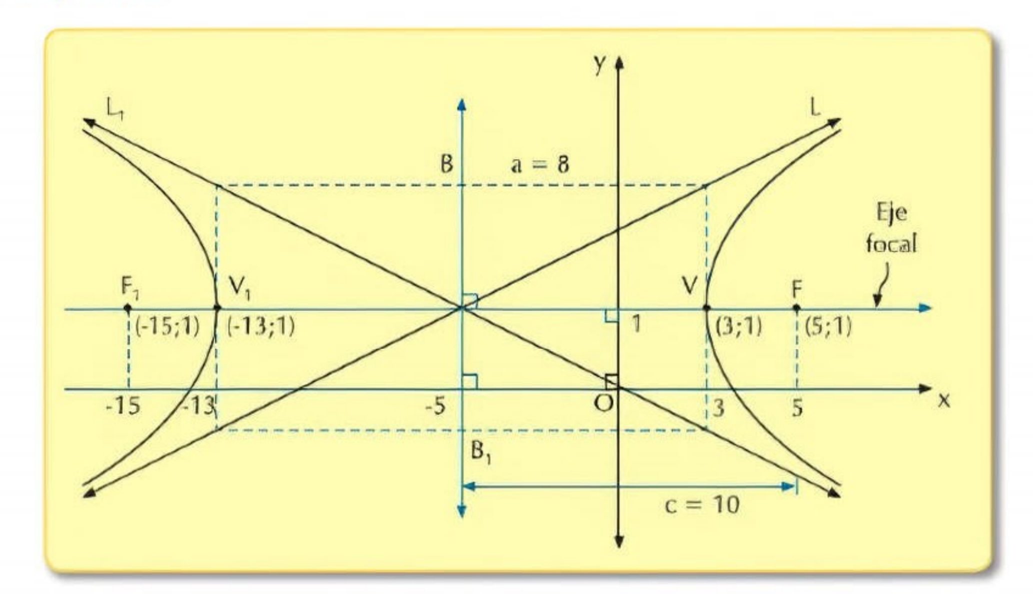
$\therefore$ $\boxed{3x - 4y + 19 = 0}$

Asíntota $\overleftrightarrow{L_1}$: $y - k = -\dfrac{b}{a}(x - h)$

$$y - 1 = -\frac{6}{8}(x + 5)$$

$\therefore$ $\boxed{3x + 4y + 1 = 0}$

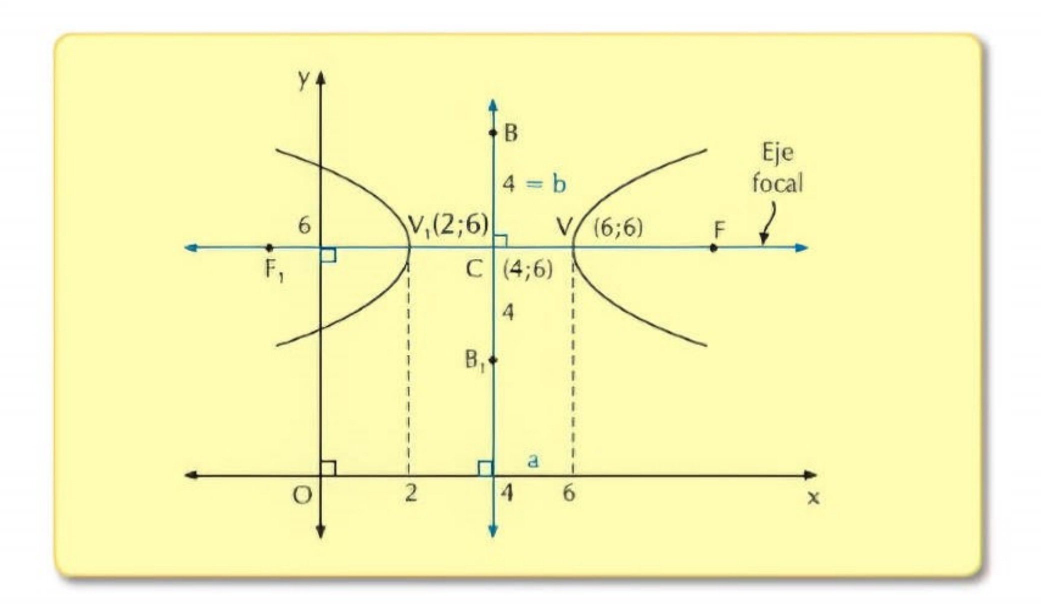
Gráfica de la hipérbola



2 Determinar la ecuación de la hipérbola de centro el punto (4;6), uno de sus vértices es el punto (6;6) y el eje conjugado es igual a 8.

Resolución:

Gráfica de la hipérbola



De acuerdo a los datos y la figura se deduce que:

$a = 6 - 4 \Rightarrow a = 2$

$b = 2$

$h = 4$

$k = 6$

La hipérbola es de la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Entonces: $\dfrac{(x-4)^2}{2^2} - \dfrac{(y-6)^2}{4^2} = 1$

$4(x-4)^2 - (y-6)^2 = 16$

$4(x^2 - 8x + 16) - (y^2 - 12y + 36) = 16$

$4x^2 - 32x + 64 - y^2 + 12y - 36 = 16$

$\therefore \quad 4x^2 - y^2 - 32x + 12y + 12 = 0$

Amplía tus conocimientos

Antenas parabólicas:



Es un tipo de antena que se caracteriza por llevar un reflector parabólico.Las antenas parabólicas pueden ser usadas como antenas transmisoras o como antenas receptoras. En las antenas parabólicas transmisoras el reflector parabólico refleja la onda electromagnética generada por un dispositivo radiante que se encuentra ubicado en el foco del reflector parabólico, y los frentes de ondas que genera salen de este reflector en forma más coherente que otro tipo de antenas; mientras que en las antenas receptoras, el reflector parabólico concentra la onda incidente en su foco donde también se encuentra un detector. Normalmente estas antenas en redes de microondas operan en forma full duplex, es decir, trasmiten y reciben simultáneamente.

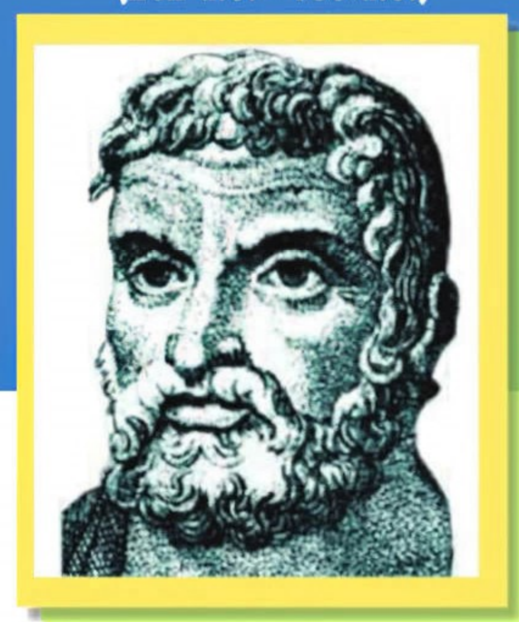
Las antenas parabólicas suelen ser utilizadas a frecuencias altas y tienen una ganancia elevada.

www.satfix.net

Apolonio de Pérgamo

(262 a.C. - 180 a.C.)

Personaje de la Matemática



Matemático griego. Conocido con el sobrenombre del Gran Geómetra, sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas, de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Acuñó los términos elipse, hipérbola y parábola, que responden a las respectivas propiedades matemáticas de estas tres funciones. También explicó el movimiento de los planetas según la teoría de los epiciclos.

Apolonio vivió largo tiempo en Alejandría, primero como discípulo y más tarde como profesor en la escuela de los sucesores de Euclides, escuela que recibió nuevo impulso del mismo Apolonio. Realizó numerosos viajes y residió también durante algún tiempo en Éfeso y en Pérgamo, a cuyo rey Atalo I (224-197) dedicó el cuarto libro de su tratado sobre las figuras cónicas.

Apolonio hizo con respecto a las figuras cónicas lo que Euclides había hecho un siglo antes en cuanto al círculo, y fue él quien dio a las secciones del cono las denominaciones todavía en uso: parábola, hipérbola, elipse. Aunque sólo cuatro de los ocho libros de que estaba compuesto hayan llegado a nosotros en la lengua original (poseemos otros tres en idioma árabe), el tratado es tan completo que habían de pasar siglos antes de que pudiera añadirse algo sobre el tema.

Ya antes de Apolonio, las cónicas y sus propiedades eran conocidas por los griegos, según lo atestiguan la obra de Menecmo, *Los lugares sólidos de Aristeo y muchos pasajes de Euclides y Arquímedes*. Apolonio generalizó y extendió las investigaciones. Partiendo de un cono cualquiera, cortándolo con un plano cualquiera, llega a obtener las tres especies de cónicas que antes de él se consideraban como secciones del cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo.

Los primeros cuatro libros del tratado Las cónicas han llegado a nosotros en su texto original porque probablemente eran libros de texto en las escuelas griegas y alejandrinas. Los tres siguientes se conservaron durante el medioevo en una traducción árabe, y sólo el octavo libro, que según las declaraciones de Apolonio contenía la solución de los problemas concernientes a la materia tratada en el libro anterior, se ha perdido. El famoso astrónomo Halley, en la edición hecha por él de las obras de Apolonio (1710), se basó en las informaciones contenidas en los "lemas" dejados por Pappo en suColección para dar una relación aproximada de este libro desaparecido.

En conjunto, los libros sobre las cónicas pueden considerarse como una introducción a la geometría superior, porque en ellos encontramos nociones modernísimas como son los principios de la teoría de las polares o la generación de una cónica mediante haces de rayos proyectados (teorema de Steiner). La importancia de las cónicas en el sistema universal creció mucho con el descubrimiento de Kepler, según el cual las órbitas planetarias son elípticas, ocupando el sol uno de los focos de la elipse. La obra de Apolonio, al reexaminarse hace tres siglos, dio origen a un gran desenvolvimiento de la geometría moderna.

Además de este libro, escribió otras obras sobre matemáticas: han llegado a nosotros, en versión árabe, dos libros sobre divisiones de las proporciones, una obra sobre tangencias y dos libros sobre Lugares planos. Entre los escritos perdidos se conocen los títulos de una obra sobre Resolución rápida y otra sobre espejos ustorios. Después de Arquímedes, Apolonio de Perga es el más profundo y original de todos los matemáticos griegos. Los antiguos le atribuyeron la invención de una forma especial de reloj solar y descubrimientos astronómicos precursores.

Investiga:



1. Opina sobre el trabajo científico de Apolonio.
2. ¿Cuál es la importancia de éste estudio en la actualidad?



Estadística y probabilidad

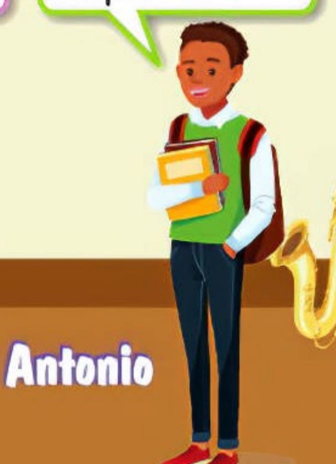


Corita, los consumos de luz de mi casa en los últimos cuatro meses son: S/50; S/60; S/84; S/90 y el consumo promedio es S/71. Las desviaciones de los consumos con respecto al consumo promedio son: –21; –11; +13 ; +19, lo que da una aparente desviación media igual a cero. ¿Por qué?

Memo, la suma de las desviaciones de cada dato con respecto a la media aritmética siempre es cero; entonces se tienen que sumar los valores absolutos de dichas desviaciones:
$|-21|+|-11|+|+13|+|+19|=64$.
La desviación media es $\frac{64}{4}$, esto es 16.

¿Por qué la suma de las desviaciones de cada dato con respecto a la media aritmética siempre es cero?





Competencia	Temas
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Medidas de dispersión o variabilidad. Rango o recorrido. La Desviación media. La varianza. La Desviación típica o estándar. El coeficiente de variación. Comparación de las dispersiones relativas de dos conjuntos de datos.
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Probabilidad condicional. Probabilidad compuesta. Diagrama del árbol para experimentos aleatorios compuestos. Teorema de Bayes. La esperanza matemática.

ENFOQUE BÚSQUEDA DE LA EXCELENCIA

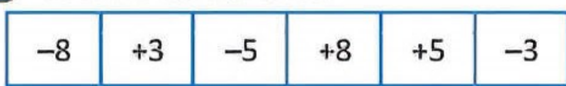
Valor	Actitudes que suponen
Superación personal	Disposición a adquirir cualidades que mejorarán el propio desempeño y aumentarán el estado de satifacción consigo mismo y con las circunstancias.



Recupera saberes previos

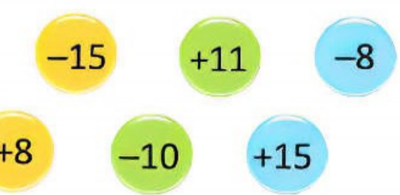
Desarrolla en tu cuaderno las siguientes actividades:

1 Observa los números.



¿Cuánto suman?

2 ¿Cuál es la media aritmética de los números que se presentan?



3 Observa los números.

–32	+13	–25
+25	–13	+32

¿Cuánto suman sus valores absolutos?

4 Observa la tabla.

x_i	f_i
–12	3
–5	2
+5	2
+12	3

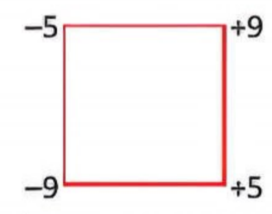
a. ¿Cuál es el total de datos?
b. ¿Cuánto suman todos los datos?

5 Observa la tabla.

x_i	f_i
–10	3
–6	5
+6	5
+10	4

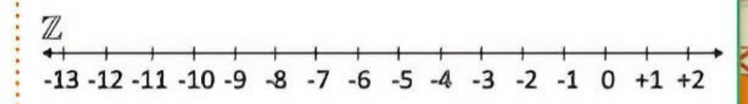
a. ¿Cuál es el total de datos?
b. ¿Cuánto suman todos los datos?

6 Observa la figura.



a. ¿Cuál es la suma de los cuatro números?
b. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de los números?

7 Observa la recta numérica de los enteros.



a. ¿Cuál es la distancia de –13 a –6?
b. ¿Cuál es la distancia de –2 a –11?
c. ¿Cuál está más cerca de –8, el número –12 o –3?

8 Los sueldos de 5 trabajadores, en soles, son: 930; 950; 1 100; 1 200; 1 500.

a. ¿Cuál de ellos está más cerca del sueldo promedio?
b. ¿Cuál de ellos está más lejos del sueldo promedio?

9 Los pesos, en kilogramos, de 6 estudiantes son los siguientes: 56; 60; 62; 65; 69; 70.

a. ¿Cuál de ellos está más cerca del peso promedio?
b. ¿Cuál de ellos está más lejos del peso promedio?

10 Tres hermanos aportaron dinero para comprar un televisor; la tabla muestra sus aportes.

Hermanos	Aportes
Francisco	400
Melisa	800
Ricardo	500

a. ¿Cuál es el promedio de los aportes?
b. ¿Qué tanto por ciento del precio del televisor es el aporte de cada hermano?

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Representa la dispersión de un conjunto de edades con la desviación media, que es la dispersión en promedio de las edades con respecto a su media aritmética.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	El proceso para obtener la varianza de un conjunto de datos lo presenta en una tabla o cuadro de trabajo, y extrae la raíz cuadrada para conseguir la desviación típica.

Medidas de dispersión o variabilidad

Así como las medidas de tendencia central (media aritmética, mediana, moda, etc.) representan, por sí solas, a un conjunto de datos, también hay otras medidas que indican que tan alejados o concentrados están los datos con respecto a un valor central o de referencia, estas son las medidas de dispersión o variabilidad.

Las medidas de dispersión, con las medidas de tendencia central y las de posición, ayudan a describir y analizar mejor a un conjunto de datos.

Las medidas de dispersión que más se utilizan son las siguientes:

a) El rango o recorrido (R)

b) La desviación media (D.M.)

c) La varianza (V(x) o S^2)

d) La desviación típica o estándar (S)

e) El coeficiente de variación (C.V.)

Rango o recorrido

El rango de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor y el menor dato.

Rango = dato mayor - dato menor

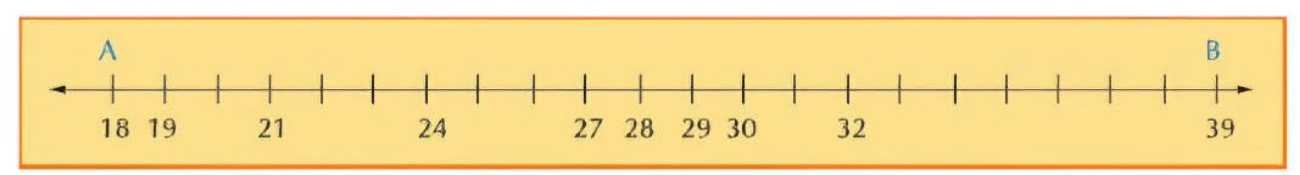
Ejemplo 1

Consideremos las edades, en años, de 10 personas: 28; 19; 30; 27; 24; 21; 29; 32; 39; 18

Se observa que el dato mayor es 39 y el dato menor es 18, por lo que el rango es **39 – 18 = 21.**

Los datos ordenados de menor a mayor son: 18; 19; 21; 24; 27; 28; 29; 30; 32; 39

Si, ahora, ubicamos los datos ordenados en un eje coordenado, tendremos:

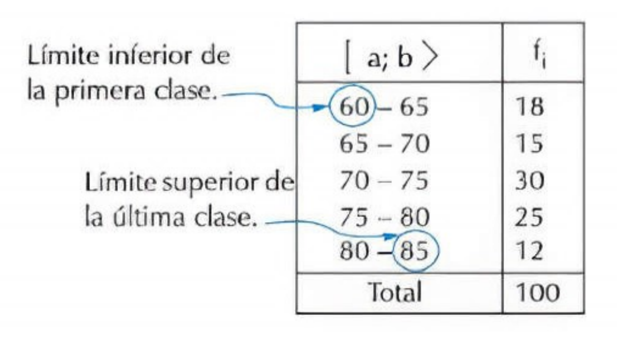


La distancia entre los puntos A y B es 39 – 18 = 21, por lo cual afirmamos que:

El rango es la distancia entre el mayor y el menor dato, nos dice que tan alejado está el menor dato del mayor dato; como los otros valores de la variable **edades** se encuentran comprendidos entre los datos menor y mayor, al rango también se le llama **recorrido de la variable**.

Ejemplo 2

Si se trata de un conjunto de datos agrupados en intervalos de clase, como el siguiente:



[a; b ⟩	f_i
60 – 65	18
65 – 70	15
70 – 75	30
75 – 80	25
80 – 85	12
Total	100

el rango se obtiene restando el límite superior de la última clase menos el límite inferior de la primera clase, es decir:

$$\text{Rango} = 85 - 60 = \boxed{25}$$



El rango no es una buena medida de la dispersión de los datos, pues solo considera los valores extremos y no dice nada sobre los valores intermedios. Se usa cuando se quiere tener, de forma inmediata, el alejamiento o separación entre los datos inferior y superior. En el rango no se utiliza un valor de referencia para medir la dispersión de los datos.

Desviación media

La desviación media es una medida de la dispersión de un conjunto de datos, con respecto a su media aritmética. De esto se deduce que, lo primero que se debe hacer es calcular la media aritmética del conjunto de datos y el proceso completo lo veremos en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 

Halla la desviación media de los datos siguientes:

8; 11; 13; 17; 21

los cuales son las edades, en años, de 5 varones.

Procedimiento:

a) Cálculo de la media aritmética ($\bar{x}$) del conjunto de datos:

$$\bar{x} = \frac{8+11+13+17+21}{5} = \frac{70}{5} = \boxed{14}$$

b) Las desviaciones (d_i) de los datos, con respecto a su media aritmética, son:

$$d_1 = 8 - 14 = -6 \qquad d_4 = 17 - 14 = 3$$
$$d_2 = 11 - 14 = -3 \qquad d_5 = 21 - 14 = 7$$
$$d_3 = 13 - 14 = -1$$

Tomamos los valores absolutos de las desviaciones **$|d_i|$** para que los alejamientos o distancias de los datos, con respecto a su media aritmética, sean positivos.

$$|d_1| = |-6| = 6 \qquad |d_4| = |3| = 3$$
$$|d_2| = |-3| = 3 \qquad |d_5| = |7| = 7$$
$$|d_3| = |-1| = 1$$

c) Entonces, el promedio de los valores absolutos de las desviaciones es:

$$\frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + |d_4| + |d_5|}{5} = \frac{6+3+1+3+7}{5} = \frac{20}{5} = \boxed{4}$$

y este resultado es la "Desviación media" del conjunto de datos.

Interpretación:

Las edades, en años, de los cinco varones, se dispersan en promedio 4 años con respecto a su media aritmética.

Definición:

La desviación media **(D.M)** de un conjunto de datos es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de todos los datos, con respecto a su media aritmética.

Para n datos tendremos que:

$$D.M = \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + \ldots + |d_n|}{n}$$

En forma abreviada se puede expresar así:

$$D.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i|}{n}$$

Donde:

D.M: Desviación media.

$\sum$: Suma o sumatoria.

d_i: Desviación de cada dato.

n: Número total de datos.

Si los datos son: $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$, las desviaciones con respecto a la media aritmética (x) son:

$$d_1 = x_1 - \bar{x}$$
$$d_2 = x_2 - \bar{x}$$
$$d_3 = x_3 - \bar{x}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$d_n = x_n - \bar{x}$$

Y para un dato cualquiera (x_i) su desviación con respecto a la media aritmética se representa así:

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

Entonces, la fórmula de la desviación media también puede expresarse así:

$$D.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$ donde $x_i - \bar{x}$ es igual a d_i

Ejemplo 2

Halla la desviación media de los datos siguientes:

10; 13; 14; 15; 23

los cuales son las edades, en años, de 5 mujeres.

Procedimiento:

a) Cálculo de la media aritmética (x) del conjunto de datos:

$$\bar{x} = \frac{10+13+14+15+23}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

b) Cálculo de la desviación media (**D.M**):

$$D.M = \frac{|10-15| + |13-15| + |14-15| + |15-15| + |23-15|}{5}$$

$$D.M = \frac{|-5| + |-2| + |-1| + |0| + |8|}{5} = \frac{5+2+1+0+8}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\therefore \quad D.M = 3,2$$

Interpretación:

Las edades, en años, de las cinco mujeres, se dispersa en promedio 3,2 años con respecto a su media aritmética.

Ejemplo 3

Halla la desviación media del siguiente conjunto de datos:

Peso (en kg)	Número de personas
48	8
52	6
60	4
75	2

Procedimiento:

a) Vemos que:

el peso "48 kg" se repite o presenta 8 veces.
el peso "52 kg" se repite o presenta 6 veces.
el peso "60 kg" se repite o presenta 4 veces.
el peso "75 kg" se repite o presenta 2 veces.
Total = 20 pesos

por lo que la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{48(8) + 52(6) + 60(4) + 75(2)}{20} = \frac{1\,086}{20}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = 54,3 \text{ kg}$$

b) Cálculo de la desviación media.

El peso "48 kg" se repite 8 veces, entonces el valor absoluto de su desviación debe multiplicarse por 8; lo mismo debe hacerse para los pesos "52 kg" "60 kg" y "75 kg".

$$D.M = \frac{|48-54,3| \cdot 8 + |52-54,3| \cdot 6 + |60-54,3| \cdot 4 + |75-54,3| \cdot 2}{20}$$

$$D.M = \frac{6,3 \cdot 8 + 2,3 \cdot 6 + 5,7 \cdot 4 + 20,7 \cdot 2}{20} = \frac{128,4}{20}$$

$$\therefore \quad D.M = 6,42 \text{ kg}$$

Interpretación:

Los 20 pesos se dispersan, en promedio 6,42 kg de su media aritmética.

El proceso para obtener la desviación media del conjunto de datos se puede presentar en una tabla o cuadro de trabajo como el siguiente:

x_i	f_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert \cdot f_i$
48	8	-6,3	6,3	$6,3 \cdot 8 = 50,4$
52	6	-2,3	2,3	$2,3 \cdot 6 = 13,8$
60	4	5,7	5,7	$5,7 \cdot 4 = 22,8$
75	2	20,7	20,7	$20,7 \cdot 2 = 41,4$
Total	20			128,4

$$\sum_{i=1}^{4} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i$$



$$D.M = \frac{\sum_{i=1}^{4} |x_i - x| \cdot f_i}{n} = \frac{128,4}{20}$$

$\therefore$ $D.M = 6,42$ kg

Ejemplo 4 Halla la desviación media de los ingresos semanales de 13 trabajadores, agrupados en intervalos de clase, como muestra la tabla siguiente:

Ingresos semanales (en S/) [a; b ⟩	Número de trabajadores
120 – 160	5
160 – 200	4
200 – 240	3
240 – 280	1
Total	13

Procedimiento:

a) Cada intervalo debe ser reemplazado por su marca de clase (M_i), que es el promedio de los límites inferior y superior.

$$M_1 = \frac{120 + 160}{2} = 140$$

$$M_2 = \frac{160 + 200}{2} = 180$$

$$M_4 = \frac{240 + 280}{2} = 260$$

$$M_3 = \frac{200 + 240}{2} = 220$$

Ahora, la tabla es la siguiente:

Marcas de clase: M_i	Número de trabajadores: f_i
140	5
180	4
220	3
260	1
Total	13

b) Calculamos la media aritmética del conjunto de datos, trabajando con las marcas de clase:

$$\overline{x} = \frac{140(5) + 180(4) + 220(3) + 260(1)}{13} = \frac{S/\ 2\ 340}{13}$$

$$\overline{x} = S/\ 180$$

c) El cuadro de trabajo es el siguiente:

M_i	f_i	$d_i = M_i - \overline{x}$	$\lvert M_i - \overline{x}\rvert$	$\lvert M_i - \overline{x}\rvert \cdot f_i$
140	5	-40	40	$40 \cdot 5 = 200$
180	4	0	0	$0 \cdot 4 = 0$
220	3	40	40	$40 \cdot 3 = 120$
260	1	80	80	$80 \cdot 1 = 80$
Total	13			400

$$D.M = \frac{\sum_{i=1}^{4} |M_i - \overline{x}| \cdot f_i}{n} = \frac{S/\ 400}{13}$$

$D.M = S/\ 30,77$

Interpretación: Los ingresos semanales de los 13 trabajadores se dispersan, en promedio, S/ 30, 77 de su media aritmética.

Varianza

La varianza es otra medida de dispersión que también toma como referencia a la media aritmética para calcular las desviaciones de los datos. Se denota V(x) o S^2.

A diferencia de la desviación media (D.M) que para evitar operar con desviaciones negativas, toma los valores absolutos de las desviaciones, la varianza [V(x)] para evitar operar con las desviaciones negativas, eleva las desviaciones al cuadrado.

Definición:

La varianza de un conjunto de datos es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de todos los datos, con respecto a su media aritmética.

Para n datos tendremos que:

$$V(x) = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2}{n}$$

En forma abreviada se puede expresar así:

Donde:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}$$

V(x): Varianza.

Σ : Suma o sumatoria.

d_i: Desviación de cada dato

n: Número total de datos.

Como $d_i = x_i - x$, entonces la fórmula de la varianza también se puede expresar de la manera siguiente:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2}{n}$$

donde $x_i - \bar{x}$ es igual a d_i

Ejemplo 1 Halla la varianza de los datos siguientes: 8; 11; 13; 17; 21 los cuales son las edades, en años, de 5 varones.

Procedimiento:

a) Cálculo de la media aritmética ($\bar{x}$) del conjunto de datos:

$$x = \frac{8+11+13+17+21}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

b) Cálculo de la varianza V(x):

$$V(x) = \frac{(8-14)^2 + (11-14)^2 + (13-14)^2 + (17-14)^2 + (21-14)^2}{5}$$

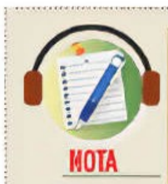
$$V(x) = \frac{(-6)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (7)^2}{5}$$

$$V(x) = \frac{36+9+1+9+49}{5} = \frac{104}{5}$$

$V(x) = 20{,}8$ años^2

Interpretación:

Las edades de los varones se dispersan, en promedio, 20,8 años al cuadrado con respecto a su media aritmética.



La varianza tiene como unidad años^2 porque las desviaciones que tienen como unidad años se han elevado al cuadrado.

Ejemplo 2 Halla la varianza del siguiente conjunto de datos:

Peso (en kg)	Número de personas
48	8
52	6
60	4
75	2

Procedimiento:

a) Cálculo de la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{48(8)+52(6)+60(4)+75(2)}{20} = \frac{1086}{20}$$

$\therefore \bar{x} = 54{,}3$ kg

b) Cálculo de la varianza:
El peso "48 kg" se repite 8 veces, entonces el cuadrado de su desviación debe multiplicarse por 8; lo mismo debe hacerse para los pesos "52 kg", "60 kg" y "75 kg".

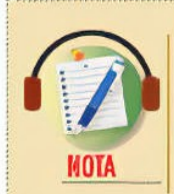
$$V(x)=\frac{(48-54,3)^2\cdot 8+(52-54,3)^2\cdot 6+(60-54,3)^2\cdot 4+(75-54,3)^2\cdot 2}{20}$$

$$V(x)=\frac{(-6,3)^2\cdot 8+(-2,3)^2\cdot 6+(5,7)^2\cdot 4+(20,7)^2\cdot 2}{20}$$

$$V(x)=\frac{317,52+31,74+129,96+856,98}{20}=\frac{1336,2}{20}$$

$\therefore$ $V(x) = 66,81\ kg^2$

Interpretación:
Los pesos de las 20 personas se dispersan, en promedio, 66,81 kg al cuadrado con respecto a su media aritmética.



La varianza tiene como unidad kg^2 porque las desviaciones, que tienen como unidad kg, se han elevado al cuadrado.
El proceso para obtener la varianza del conjunto de datos se puede presentar en una tabla como la siguiente:

x_i	f_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
48	8	-6,3	39,69	317,52
52	6	-2,3	5,29	31,74
60	4	5,7	32,49	129,96
75	2	20,7	428,49	856,98
Total	20			1336,20

$1336,20 \leftarrow \sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i$

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i}{20}=\frac{1336,20}{20}$$

$\therefore$ $V(x) = 66,81\ kg^2$

Ejemplo 3 Halla la varianza de los ingresos semanales de 13 trabajadores, agrupados en intervalos de clase, como muestra la tabla siguiente:

Ingreso semanales (en S/) [a; b ⟩	Número de trabajadores
120 - 160	5
160 - 200	4
200 - 240	3
240 - 280	1
Total	13

Procedimiento:

a) Cada intervalo debe ser reemplazado por su marca de clase (M_i), que es el promedio de los límites inferior y superior.

$$M_1=\frac{120+160}{2}=140 \qquad M_3=\frac{200+240}{2}=220$$

$$M_2=\frac{160+200}{2}=180 \qquad M_4=\frac{240+280}{2}=260$$

Ahora la tabla es la siguiente:

Marcas de clase: M_i	Número de trabajadores: f_i
140	5
180	4
220	3
260	1
Total	13

b) Calculamos la media aritmética del conjunto de datos, trabajando con las marcas de clase:

$$\bar{x}=\frac{140(5)+180(4)+220(3)+260(1)}{13}=\frac{S/\ 2\,340}{13}$$

$\therefore$ $\bar{x} = S/\ 180$

c) El cuadro de trabajo es el siguiente:

M_i	f_i	$d_i = M_i - \bar{x}$	$(M_i - \bar{x})^2$	$(M_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
140	5	-40	1 600	8 000
180	4	0	0	0
220	3	40	1 600	4 800
260	1	80	6 400	6 400
Total	13			19 200

$19\,200 \leftarrow \sum_{i=1}^{4}(M_i-\bar{x})^2\cdot f_i$

$$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{4}(M_i-\bar{x})^2\cdot f_i}{13}=\frac{19\,200}{13}$$

$\therefore$ $V(x) = 1\,476,92$ soles al cuadrado.

Interpretación:
Los ingresos semanales de los 13 trabajadores se dispersan, en promedio, 1 476,92 soles al cuadrado con respecto a su media aritmética.

Desviación típica o estándar

La varianza [V(x)] para evitar operar con las desviaciones negativas, eleva las desviaciones al cuadrado, pero al hacer esto los valores de las desviaciones cambian, por lo cual se pensó en extraer la raíz cuadrada de la varianza para obtener una mejor medida de la dispersión de los datos; esa medida se denomina Desviación típica o estándar, se denota S y es la más utilizada.

Definición:

La desviación típica o estándar de un conjunto de datos es la raíz cuadrada de la varianza.

Entonces, la desviación típica o estándar es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto a su media aritmética.

$$S = \sqrt{V(x)}$$

Donde:
S: Desviación típica o estándar
V(x): Varianza

6 $$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Donde:

$$V_{(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$ (es la varianza V(x).)

Ejemplo 1 Halla la desviación típica de los datos siguientes: 8; 11; 13; 17; 21 los cuales son las edades, en años, de 5 varones.

Procedimiento:

Al calcular la varianza de este conjunto de datos se obtuvo $V(x) = 20,8 \text{ años}^2$, entonces la desviación típica es:

$$S = \sqrt{V(x)} = \sqrt{20,8 \text{ años}^2} = 4,56 \text{ años}$$

Interpretación:
Las edades de los varones se dispersan, en promedio, 4,56 años con respecto a su media aritmética.

Ejemplo 2 Halla la desviación típica del siguiente conjunto de datos:

Peso (en kg)	Número de personas
48	8
52	6
60	4
75	2

Procedimiento:

Al calcular la varianza de este conjunto de datos se obtuvo $V(x) = 66,81 \text{ kg}^2$, entonces la desviación típica es:

$$S = \sqrt{V(x)} = \sqrt{66,81 \text{kg}^2} = 8,17 \text{ kg}$$

Interpretación:
Los pesos de las 20 personas se dispersan, en promedio, 8,17 kg con respecto a su media aritmética.

Ejemplo 3 Halla la desviación típica de los ingresos semanales de 13 trabajadores, agrupados en intervalos de clase, como muestra la tabla siguiente:

Ingresos semanales (en S/) [a – b⟩	Número de trabajadores
120 – 160	5
160 – 200	4
200 – 240	3
240 – 280	1
Total	13

Procedimiento:

Al calcular la varianza de este conjunto de datos se obtuvo V(x) = 1 476, 92 nuevos soles al cuadrado, entonces la desviación típica es:

$$S = \sqrt{(Vx)} = \sqrt{1\,476,92(\text{soles})^2} = 38,43 \text{ soles}$$

Interpretación:
Los ingresos semanales de los 13 trabajadores se dispersan, en promedio, 38,43 soles con respecto a su media aritmética.

Coeficiente de variación

El coeficiente de variación (C.V) es una medida de la dispersión relativa de los datos, ya que es el cociente de dividir la desviación típica de un conjunto de datos entre su media aritmética.

$$C.V = \frac{\text{Desviación típica}}{\text{Media aritmética}} \qquad C.V = \frac{S}{\bar{x}}$$

Matemáticamente se trata de una razón geométrica que compara la desviación típica con la media aritmética e indica el número de veces que la desviación típica contiene a la media aritmética. Se acostumbra expresar en porcentaje.

Como la desviación típica y la media aritmética se expresan en las mismas unidades, al dividirlas se obtiene un cociente sin unidad; por esta razón se dice que el coeficiente de variación no tiene unidad.

El coeficiente de variación es útil cuando se trata de comparar las dispersiones de dos o más conjuntos de datos, no importando que los datos en dichos conjuntos estén expresados en la misma unidad o en diferentes unidades (kg y m, años y kg, años y soles, soles y km/h, etc).

Ejemplo A cinco personas se les ha preguntado su edad y peso, obteniéndose los dos conjuntos de datos que se muestran:

Edades (en años):	22	25	26	30	34
Pesos (en kilogramos):	60	70	72	73	74

¿En cuál de los conjuntos de datos existe mayor dispersión relativa?

Resolución:

I. Coeficiente de variación del conjunto de edades.

a) $\bar{x} = \frac{22+25+26+30+34}{5} = 27{,}4 \text{ años}$

b) $S = \sqrt{\frac{(22-27{,}4)^2+(25-27{,}4)^2+(26-27{,}4)^2+(30-27{,}4)^2+(34-27{,}4)^2}{5}}$

$S = 4{,}176 \text{ años}$

c) $C.V \text{ (edades)} = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{4{,}176 \text{ años}}{27{,}4 \text{ años}} = 0{,}1524 = 15{,}24\%$

II. Coeficiente de variación del conjunto de pesos.

a) $\bar{x} = \frac{60+70+72+73+74}{5} = 69{,}8 \text{ kg}$

b) $S = \sqrt{\frac{(60-69{,}8)^2+(70-69{,}8)^2+(72-69{,}8)^2+(73-69{,}8)^2+(74-69{,}8)^2}{5}}$

$S = 5{,}075 \text{ kg}$

c) $C.V \text{ (pesos)} = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{5{,}075 \text{ kg}}{69{,}8 \text{ kg}} = 0{,}0727 = 7{,}27\%$

$\therefore$ Existe mayor dispersión relativa en el conjunto de edades.

Si comparamos las desviaciones típicas (S) hay mayor dispersión en el conjunto de pesos, por lo cual se prefiere comparar los coeficientes de variación para decidir en cuál de los conjuntos de datos o, si se trata de distribuciones de frecuencias, en cuál de las distribuciones de frecuencias existe mayor dispersión de los datos con respecto a su media aritmética.

Amplía tus conocimientos



Sociedad Matemática Peruana



La Sociedad Matemática Peruana fue creada en 1957 por un grupo de matemáticos de la UNMSM, a iniciativa de José Tola quien convocó a grupo de matemáticos de San Marcos, entre ellos, Francisco Miró Quesada, Rafael Dávila, Flavio Vega, Hernando Vásquez, José Ampuero, José Reátegui, Óscar Valdivia, César Carranza, Roberto Velásquez y otros, a una sesión que se realizó en el salón de grados de la Facultad de Ciencias de San Marcos.

El primer presidente fue José Tola, quien fijó los principales lineamientos de trabajo de la institución, poniendo especial atención en el perfeccionamiento de los profesores universitarios, luego de los profesores de educación secundaria y primaria.

En 1983 se realizó el Primer Coloquio con las características mencionadas y se eligió a Luis Romero Grados, profesor de la UNMSM, como el primer presidente de esta nueva etapa, quien gobernó durante los años (1983 -1984), luego fueron elegidos rotativamente presidentes de la PUCP y de la UNI.

En septiembre de 1987, durante la realización del Coloquio Nacional de Matemática en la ciudad del Cusco, se firmó un convenio entre las Sociedades Matemáticas del Perú y Brasil, representados por sus presidentes: César Carranza de la PUCP y César Camacho, matemático peruano, exalumno del bachillerato de la UNI, quien actualmente es director del Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Río de Janeiro (IMPA) y líder de la línea de investigación en Sistemas Dinámicos Complejos.

Como consecuencia de todo este trabajo se creó, en la UNI, a fines de 1998, El Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA) que en cierto modo reemplazó al desaparecido IMUNI en 1969.

El IMCA se inició con una nueva visión del futuro, gracias al gran apoyo del Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Río de Janeiro (IMPA) y de un Convenio con la PUCP para auspiciarlo académica y económicamente, gracias a esta unión de instituciones internacionales de carácter estatal y privado; en la actualidad el IMCA se ha convertido en el mejor centro de investigación del país y, a partir del 2003, ha iniciado el primer programa de doctorado en matemática.

Reflexiona y responde:

1. Te parece importante que en el Perú existan estos centros de investigación, ¿por qué?
2. Conoces algún otro centro de investigación en el Perú, comenta.

Lewis Carrols

(1832 - 1898)

Personaje de la Matemática



Nació en Dareshury (Cheshire), Inglaterra, el 27 de enero de 1832, su nombre verdadero fue Charles Lutwidge Dodgson, era el mayor de 11 hijos: cuatro varones y siete mujeres. A la edad de 18 años, ingresó a la Universidad de Oxford, entidad en la que permaneció cerca de 50 años, y en la que obtuvo el grado de Bachiller y se recibió de preceptor. Tuvo pocos amigos en la plenitud de su desarrollo y crecimiento, y como era tímido, se retrajo de los adultos y creó sus amistades entre los niños, especialmente entre los niños pequeños; los comprendía perfectamente. Escribía para los niños miles de cartas, ejercicios de fantasía adornados en muchos casos con pequeños bocetos.

Es así como Morten N. Cohen y Roger L. Green la recopilaron y publicaron con el título de *Cartas de Lewis Carrol* en 1879, y en dos volúmenes. Se ordenó de diácono en la iglesia Anglicana y enseñó matemáticas a tres generaciones de jóvenes estudiantes de Oxford. Es autor de varios tratados de matemáticas, entre los que destaca *Euclides y sus modernos rivales* (1879). En el año 1865 publicó con su seudónimo *Alicia en el País de las Maravillas*, la Alicia real y verdadera era la hija de su amigo el diácono Henry George Liddell. Tras su publicación, los relatos, ilustrados por el dibujante inglés Sir John Tenniel, se hizo famoso de inmediato como libro infantil. En su época fue una obra de implacable didactícismo de los libros infantiles, Alicia fue el primer personaje de la literatura infantil que mostro la hipocresía y la presuntuosidad didáctica delmundo de los adultos. Su continuación *A través del espejo y lo que Alicia encontró allí*, se publicó en el año 1872, utilizó un idioma brillante e ingenioso, con frecuentes onomatopeyas y juegos de palabras. Los cuentos de Alicia hizo que Carroll adquiriera celebridad en todo el mundo y a sido traducida en numerosas lenguas.

Otras publicaciones de Lewis Carroll son *La casa de Snark* (1876), y una novela, *Silvia y Bruno* en dos volúmenes, el atractivo de estos relatos para los adultos resulta la ingeniosa mezcla de fantasía y realidad, suave sátira, absurdidad y lógica. Poco hay que decir, a parte de estos hechos, acerca del Reverendo Dodgson, tuvo una vida tranquila, el trabajo y la ocupación de su vida, así como su diversión favorita, fueron las matemáticas.

Padeció de insomios durante toda su existencia, pasaba muchas noches despierto, con los arduos problemas matemáticos dando vueltas en su cabeza, y tratando de descifrarlos. Murió en Guilford (Surrey), el 14 de enero de 1898 a los 66 años de edad.

Investiga:



1. ¿Cuál crees que fué el aporte principal de Lewis Carrols?
2. Construye un organizador visual de la vida y obra de Lewis Carrols.

Propósito de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Dibuja un diagrama de Venn con dos circunferencias secantes que corresponden a eventos A y B, para calcular p(B/A) y escribe $p(B/A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$.
	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Emplea el diagrama del árbol para representar experimentos aleatorios compuestos y escribe la probabilidad correspondiente a cada ramificación.

Probabilidad condicional

En el experimento aleatorio:

Se lanza un dado y cuando se detiene se observa el número de puntos de su cara superior.

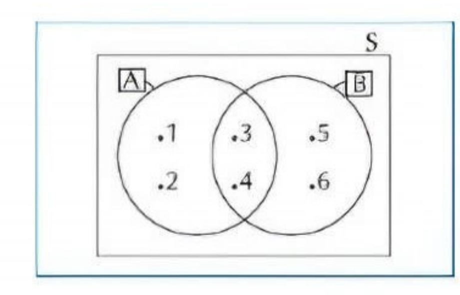
El espacio muestral asociado a este experimento es S = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Consideremos los eventos:

A = {el número de puntos es menor que 5} = {1; 2; 3; 4}

B = {el número de puntos es mayor que 2} = {3, 4; 5; 6}

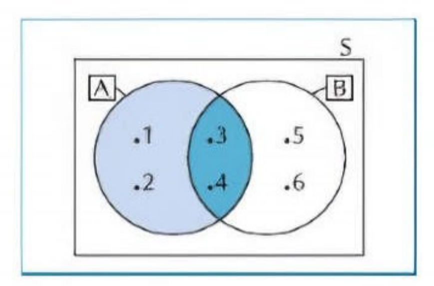
El diagrama de Venn correspondiente es:



Pero, ¿cuál es la probabilidad de que el número de puntos sea mayor que 2, si se sabe que es menor que 5?

De otro modo, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra B, dado que ya ocurrió A?

Como ya ocurrió el evento A, en el diagrama de Venn pintamos A y en los elementos de A buscamos los casos a favor de B.



Se observa que los casos a favor de B se encuentran en B ∩ A.

Si denotamos "la probabilidad de que ocurra B, dado que ya ocurrió A" por p(B/A), tenemos que:

$$p(B/A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} \quad \text{.......} \quad (1)$$

$$\text{entonces } p(B/A) = \frac{2}{4} = \boxed{0{,}5}$$

Vemos que el espacio muestral S se ha reducido al evento A porque se trata de una probabilidad condicional.

La probabilidad condicional se presenta cuando se trata de calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento, sabiendo que antes ha ocurrido otro evento, correspondiendo ambos eventos a un mismo espacio muestral.

Ahora, si al numerador y denominador de la expresión ❶ los dividimos entre n(S), tenemos lo siguiente:

$$p(B/A)=\frac{\dfrac{n(B\cap A)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}$$

$$\therefore\quad \boxed{\mathbf{p(B/A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}}}$$



1. Para calcular la p(B/A) tenemos dos fórmulas:

(I) $p(B/A)=\dfrac{n(B\cap A)}{n(A)}$ (II) $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}$

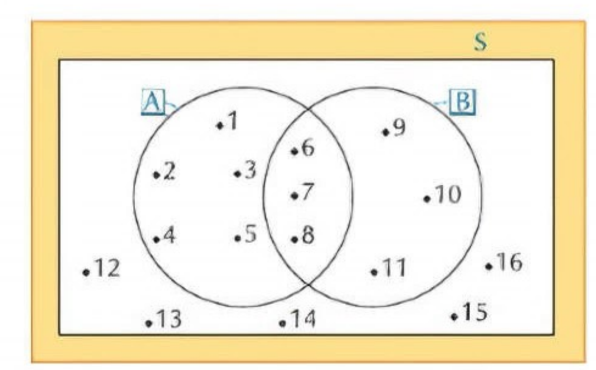
El uso de una de ellas depende de la información que proporcione el enunciado del problema.

2. Debe notar que $p(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{6}=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

y $p(B/A)=\dfrac{n(B\cap A)}{n(A)}=\dfrac{2}{4}=\boxed{0,5}$

Son diferentes.
Si **p(B/A) = p(B)** entonces los eventos **A** y **B** son **independientes**, es decir, la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia del otro.

❶ Considere los eventos A y B del diagrama de Venn siguiente:



Calcule:

a) p(A) b) p(B) c) p(B/A) d) p(A/B)

e) ¿Los eventos A y B son dependientes o independientes? Justifique su respuesta.

Resolución

a) $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{8}{16}=\boxed{0,5}$

b) $p(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{6}{16}=\boxed{0,375}$

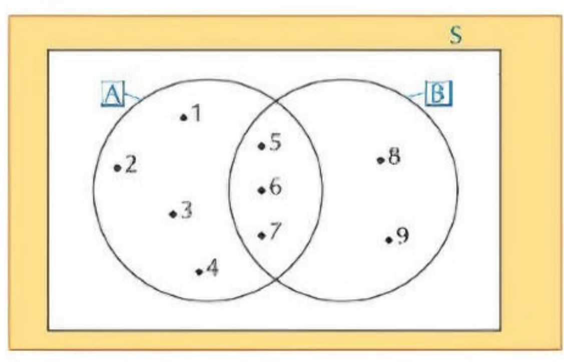
c) $p(B/A)=\dfrac{n(B\cap A)}{n(A)}=\dfrac{3}{8}=\boxed{0,375}$

d) $p(A/B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{3}{6}=\boxed{0,5}$

e) $p(B/A)=0,375$ y $p(B)=0,375$

como p(B/A) = p(B), los eventos B y A son independientes.

❷ Considere los eventos A y B del diagrama de Venn siguiente:



Calcule:

a) p(A) b) p(B) c) p(B/A) d) p(A/B)

e) ¿Los eventos A y B son dependientes o independientes? Justifique su respuesta.

Resolución

a) $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{7}{9}$

b) $p(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{5}{9}$

c) $p(B/A)=\dfrac{n(B\quad A)}{n(A)}=\dfrac{3}{7}$

d) $p(A/B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{3}{5}$

e) $p(B/A)=\dfrac{3}{7}$ y $p(B)=\dfrac{5}{9}$

como $p(B/A) \neq p(B)$, los eventos B y A no son independientes.

3 En un taller de confección el 80% de los trabajadores hacen pantalones y el 16% son trabajadores que hacen pantalones y también camisas. Si se escoge un trabajador al azar y éste hace pantalones, ¿cuál es la probabilidad de que haga camisas?

Resolución

Sean los eventos:

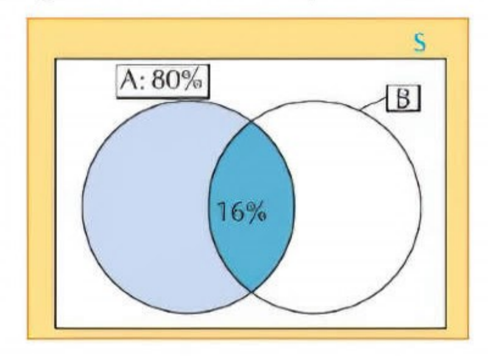
A = {trabajadores que hacen pantalones} → $p(A) = 80\% = 0{,}80$

B = {trabajadores que hacen camisas}

$A \cap B$ = {trabajadores que hacen pantalones y camisas} →

$p(A \cap B) = 16\% = 0{,}16$

El diagrama de Venn correspondiente es:



Se escoge un trabajador al azar y éste hace pantalones, entonces la probabilidad de que haga camisas es:

$$p(B/A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{0{,}16}{0{,}80}=0{,}20$$

$$\boxed{p(B/A) = 0{,}20}$$

∴ La probabilidad de que haga camisas, dado que hace pantalones, es 0,20.

Rpta.



$p(A\cap B) = 16\%$ es la probabilidad de $(A\cap B)$ con respecto al espacio muestral S; pero ese 16% es la quinta parte del 80%, es decir, es el 20% del espacio muestral reducido que es el evento A.

4 En las elecciones para presidente hay dos candidatos: Ricardo Pineda y Juan Carlos Velásquez.

Se realizó una encuesta a 1 200 electores y se averiguó lo siguiente:

> 700 dijeron que iban a votar por Ricardo Pineda.
> 500 dijeron que iban a votar por Juan Carlos Velásquez.

De los que iban a votar por Juan Carlos Velásquez, 20 eran analfabetos.

Si se elige un elector al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea analfabeto, dado que piensa votar por Juan Carlos Velásquez?

Resolución

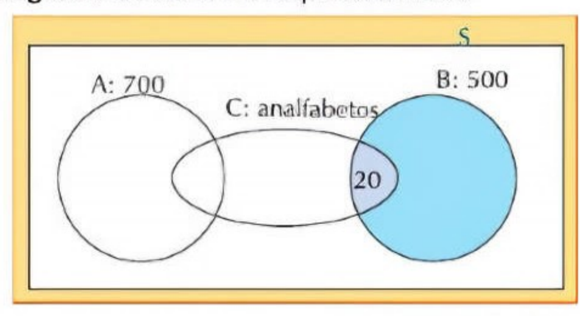
Sean los eventos:

A = {electores que iban a votar por Ricardo Pineda}

B = {electores que iban a votar por Juan Carlos Velásquez}

C = {electores que son analfabetos}

El diagrama de Venn correspondiente es:



Se elige un elector al azar y manifiesta que piensa votar por Juan Carlos Velásquez, entonces la probabilidad de que sea analfabeto es:

$$p(C/B) = \frac{n(C \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{500} = 0{,}04$$

$\boxed{p(C/B) = 0{,}04}$

∴ La probabilidad de que sea analfabeto, dado que piensa votar por Juan Carlos Velásquez, es 0, 04.

Rpta.

5 Al concluir el primer grado de secundaria, en un colegio nacional,
el 20% de los alumnos desaprobaron Matemática,

El 12% de los alumnos desaprobaron Comunicación, y el 8% de los alumnos desaprobaron Matemática y comunicación.

Se elige un alumno al azar,
a) Si desaprobó Comunicación, ¿cuál es la probabilidad de que desaprobara Matemática?
b) Si desaprobó Matemática, ¿cuál es la probabilidad de que desaprobara Comunicación?

Resolución

Sean los eventos:

M={alumnos que desaprobaron Matemática}

→ p(M) = 20% = 0,20

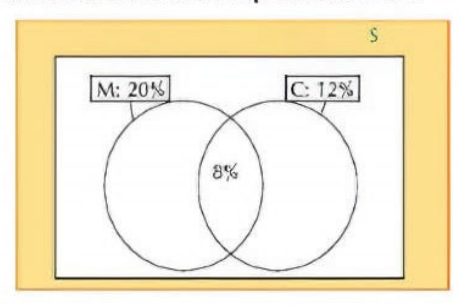
C={alumnos que desaprobaron Comunicación}

→ p(C) = 12% = 0, 12

M ∩ C = {alumnos que desaprobaron Matemática y Comunicación}

→ p(M∩C) = 8% = 0,08

El diagrama de Venn correspondiente es:



a) $p(M/C) = \frac{p(M \cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}08}{0{,}12} = \boxed{0{,}67}$

∴ La probabilidad de que desaprobara Matemática, dado que desaprobó Comunicación, es 0,67 aproximadamente.

b) $p(C/M) = \frac{p(C \cap M)}{(M)} = \frac{0{,}08}{0{,}20} = \boxed{0{,}4}$

∴ La probabilidad de que desaprobara Comunicación, dado que desaprobó Matemática, es 0,4.

Rpta.

6 Se lanzan a rodar dos dados normales. Cuando se detienen se observan sus caras superiores. Si la suma de sus puntos es 8, ¿cuál es la probabilidad de que una de las caras muestre 3 puntos?

Resolución

Sean los eventos:

A = {la suma de sus puntos es 8} =

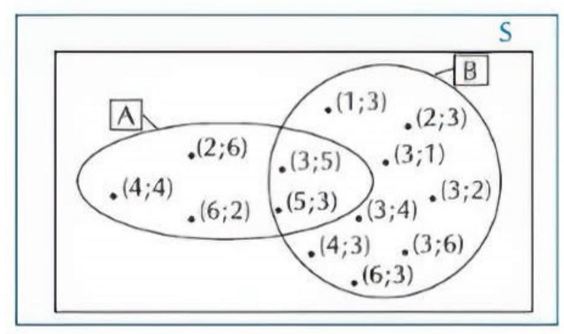
{(2; 6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2)}

B = {una de las caras muestra 3 puntos} =

{(1; 3), (2;3), (3;1), (3;2), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 3), (5; 3), (6; 3)}

A ∩ B = {(3; 5), (5; 3)}

El diagrama de Venn correspondiente es el siguiente:



Como la suma de sus puntos es 8, la probabilidad de que una de las caras muestre 3 puntos es:
es 0, 4.

$$p(B/A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{2}{5} = \boxed{0{,}4}$$

∴ La probabilidad de que una de las caras muestre 3 puntos, dado que la suma de sus puntos es 8, es 0, 4.

Rpla.

Probabilidad compuesta

Dados los eventos A y B subconjuntos del espacio muestral Ω de cierto experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra B después de haber sucedido A está expresada en la siguiente ley de la probabilidad compuesta:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

P(B/A) es la probabilidad de B después de ocurrido A. P (B/A) se lee «probabilidad de B dado A»



En aquellos casos en que P(B/A) = P(B), es decir, que la ocurrencia de B no está condicionada por la ocurrencia del evento A, se dice que los eventos A y B son independientes.

A y B son independientes $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejemplo 1 Se lanza un dado dos veces en forma sucesiva. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos resultados sean 3?

Resolución:

- Sean los eventos:

  A: Sale el 3 en el primer tiro,
  B: Sale el 3 en el segundo tiro.
  A ∩ B: Sale el 3 en el 1er y 2do tiro.

$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{36}$



P(B/A) es la probabilidad que salga 3 en el segundo tiro del dado, dado que en el primer tiro ha salido el 3. Como la ocurrencia de A no afecta a la ocurrencia de B, entonces:

P(B/A) = P(B) = 1/6

Ejemplo 2 De una baraja de 52 cartas se extraen dos de ellas, una tras otra. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Dos ases
b) "As" en la primera y una carta distinta en la segunda extracción
c) Ningún "as"
d) Algún "as"

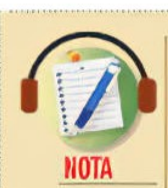
Resolución:

Se trata de dos extracciones consecutivas sin reposición. Sean los eventos:

A: La primera carta es un "as"
B: La segunda carta es un "as"
A': La primera carta no es un "as"
B': La segunda carta no es un "as"

a) Por la ley de la probabilidad compuesta:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$



En una baraja de 52 cartas, hay 4 ases, entonces:

$P(A) = \frac{4}{52}$

Si la 1era carta extraída fue «as» y no se repone al conjunto de cartas, entonces quedan 3 ases de un total de 51 cartas. Luego hay la probabilidad de que la segunda carta extraída sea «as», dado que la primera fue «as»:

$P\left(B/A\right) = \frac{3}{51}$

$P(A \cap B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$ $\therefore$ $P(A \cap B) = \frac{1}{221}$ **Rpta.**

b) $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B'/A)$

$= \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} = \frac{16}{221}$ **Rpta.**

c) $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B'/A')$

$= \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} = \frac{188}{221}$ **Rpta.**

d) Algún "as"

= («as» y «as») o («as» y no «as») o (no «as» y «as»)

$$(A \cap B) \quad (A \cap B') \quad (A' \cap B)$$

P(algún "as")

$$= P(A \cap B) + P(A \cap B') + P(A' \cap B)$$

$$= P(A) \cdot P(B/A) + P(A)\,P(B'/A) + P(A') \cdot P(B/A')$$

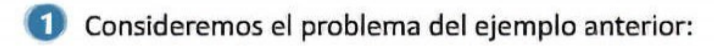
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{396}{2\,652}$$

$$P(\text{algún "as"}) = \frac{33}{221}$$ **Rpta.**

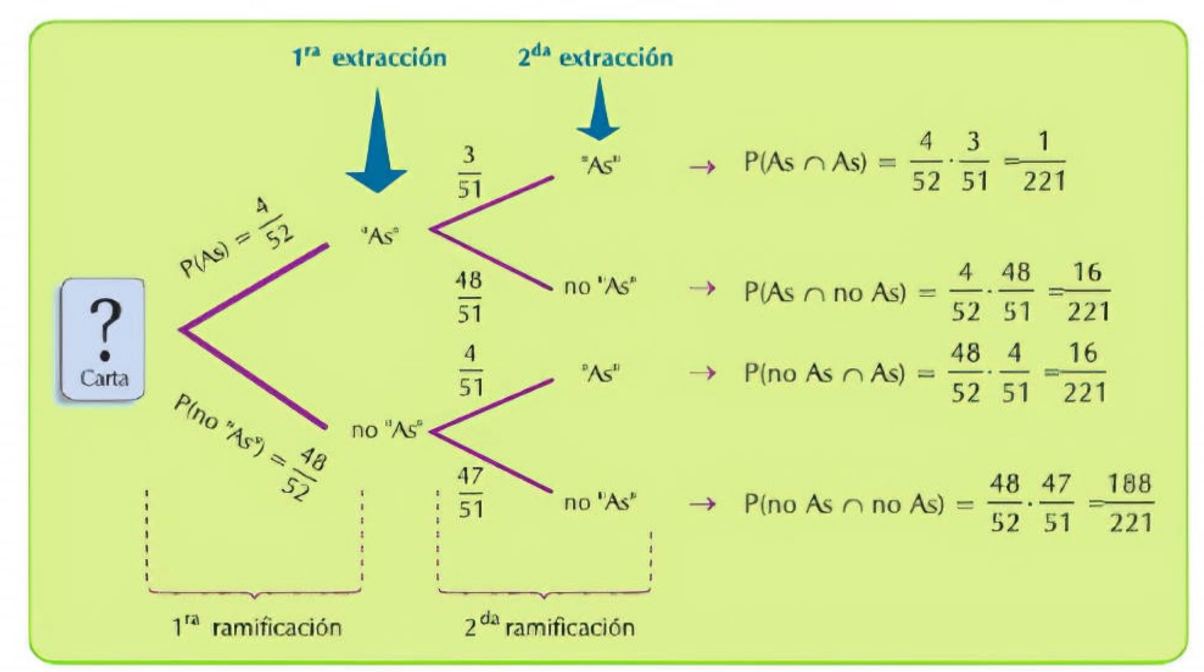
Diagrama del árbol para experimentos aleatorios compuestos

Un experimento aleatorio es compuesto cuando consta de dos o más partes. En estos casos, resulta más cómodo resolver el problema mediante un diagrama del árbol.

Problemas resueltos — SOBRE PROBABILIDADES



1 Consideremos el problema del ejemplo anterior:





1. Las probabilidades correspondientes a cada ramificación siempre suman 1, así:
   - En la 1ra ramificación: $\frac{4}{52} + \frac{48}{52} = 1$
   - En la 2da ramificación las probabilidades suman 1 en cada diversificación, así:

   $$\frac{3}{51} + \frac{48}{51} = 1 \; ; \; \frac{4}{51} + \frac{47}{51} = 1$$

2. La probabilidad de cada resultado, es el producto de las probabilidades de las ramas que conducen a ese resultado.

Ejemplos: (1ra extracción, 2da extracción)

a) $P(\text{As y As}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$

b) $P(\text{As y no As}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} = \frac{16}{221}$

c) $P(\text{ningún As}) = P(\text{no As y no As}) = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} = \frac{188}{221}$

d) $P(\text{algún As}) = 1 - P(\text{ningún As}) = 1 - \frac{188}{221} = \frac{33}{221}$

Es lo mismo la notación:

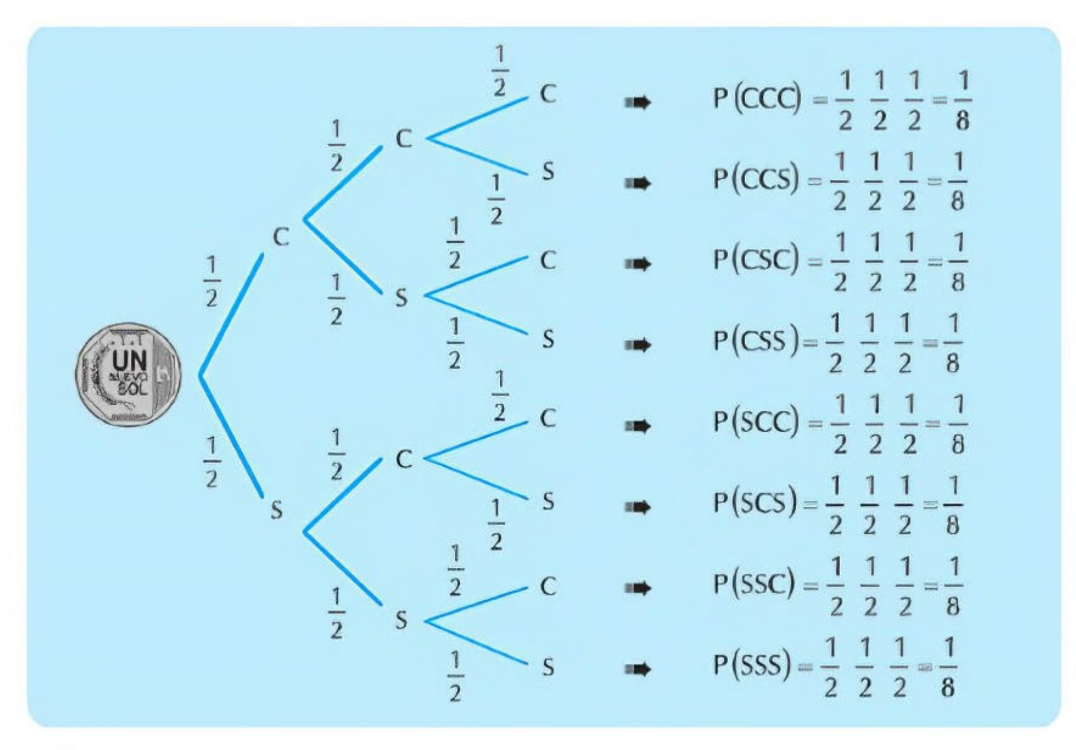
P(As y As) = P(As ∩ As) = P(As As)

2 Se lanza una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de obtener:

a) Cara en la 1era, sello en la 2da y cara en la 3ra
b) Dos caras
c) Ninguna cara
d) Al menos un sello
e) Dos caras o dos sellos

Resolución:

Diagrama del árbol



a) $P(C\,S\,C) = \frac{1}{8}$ **Rpta.**

b) $P(2\text{ caras}) = P(CCS) + P(C\,S\,C) + P(S\,CC)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ **Rpta.**

c) $P(\text{ninguna cara}) = P(SSS) = \frac{1}{8}$ **Rpta.**

d) $P(\text{al menos 1 sello}) = 1 - P(\text{ningún sello})$

$= 1 - P(CCC) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ **Rpta.**

e) $P(2C \text{ o } 2S) = P(2\text{ caras}) + P(2\text{ sellos})$

$= P(CCS) + P(CSC) + P(SCC) + P(CSS) + P(SCS) + P(SSC)$

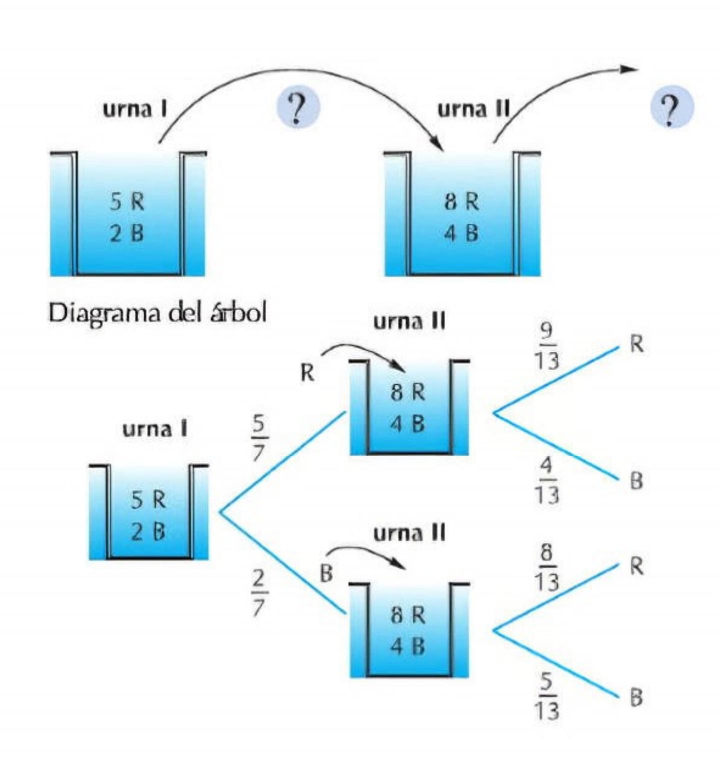
$\rightarrow$ $P(2C \text{ o } 2S) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ **Rpta.**

3 Una urna contiene 5 bolas rojas y 2 blancas; otra urna contiene 8 bolas rojas y 4 blancas. Se extrae una bola de la primera urna y sin ver su color se introduce en la segunda urna; luego se extrae una bola de la segunda urna. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que la bola extraída de ambas urnas sea roja.
b) Que la bola extraída de la primera sea roja y de la segunda sea blanca.
c) Que la bola extraída de la primera sea blanca y de la segunda sea roja.
d) Que la bola extraída de ambas urnas sean blancas.
e) Que la bola extraída de la segunda urna sea roja.
f) Que la bola extraída de la segunda urna sea blanca.

Resolución:

Diagrama del árbol



a) $P(RR) = \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{13} = \frac{45}{91}$

b) $P(RB) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{13} = \frac{20}{91}$

c) $P(BR) = \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{13} = \frac{16}{91}$

d) $P(BB) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{13} = \frac{10}{91}$

e) $P(\text{urna II roja}) = P(RR) + P(BR) = \frac{45}{91} + \frac{16}{91} = \frac{61}{91}$

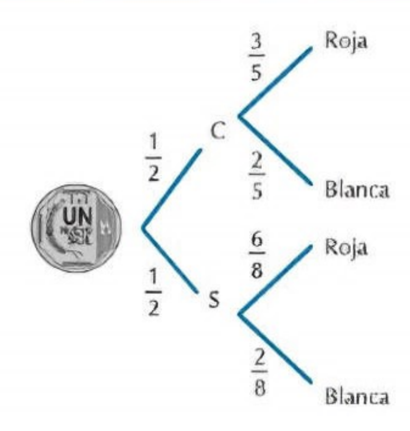
f) $P(\text{urna II blanca}) = P(RB) + P(BB) =$

$\frac{20}{91} + \frac{10}{91} = \frac{30}{91}$

4 Se lanza una moneda. Si sale cara, se extrae una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas y dos blancas. Si sale sello, se extrae una bola de otra bolsa en la que hay 6 rojas y 2 blancas. Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la bolsa sea blanca.

Resolución

Realizamos un diagrama del árbol que nos describa el espacio muestral:



Luego:

$P(\text{blanca}) = P(c, \text{blanca}) + P(s, \text{blanca})$

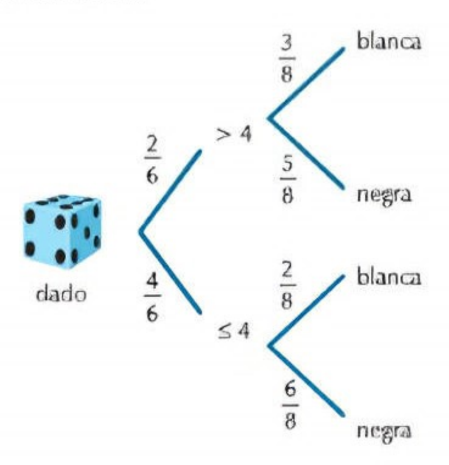
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8}$

$= \frac{13}{40}$ **Rpta.**

5 Se lanza un dado. Si sale un número mayor que 4, se extrae una bola de una caja que contiene 3 blancas y 5 negras. En caso contrario, se extrae una bola de otra caja en la que hay 2 blancas y 6 negras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener finalmente una bola negra?

Resolución

Diagrama del árbol.



Para que salga finalmente una bola negra puede ocurrir que:

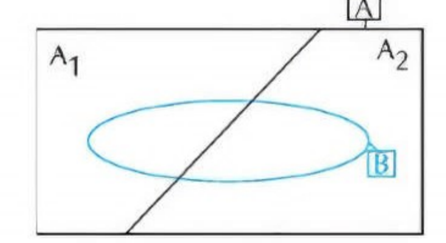
Salga un # mayor que 4 y bola negra , o un # menor o igual que cuatro y bola negra, luego:

$P(\text{negra}) = P(>4, \text{negra}) + P(\leq 4, \text{negra})$

$P(\text{negra}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{17}{24}$ **Rpta.**

Teorema de Bayes

En el diagrama de Venn siguiente:



A_1, A_2 es una partición de A, y B es un subconjunto de A.

Si nos informan que el evento B ha ocurrido, entonces:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que ocurra el evento A_1?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que ocurra el evento A_2?

Dicho de otra manera, nos están preguntando por:

a) $p(A_1/B)$, que es la probabilidad de que ocurra el evento A_1 dado que ha ocurrido el evento B.

b) $p(A_2/B)$, que es la probabilidad de que ocurra el evento A_2 dado que ha ocurrido el evento B.

Para responder estas preguntas recurrimos al Teorema de Bayes que afirma lo siguiente:

La probabilidad de que ocurra el evento A_1, dado que ha ocurrido el evento B, se obtiene con la siguiente fórmula:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B)}$$

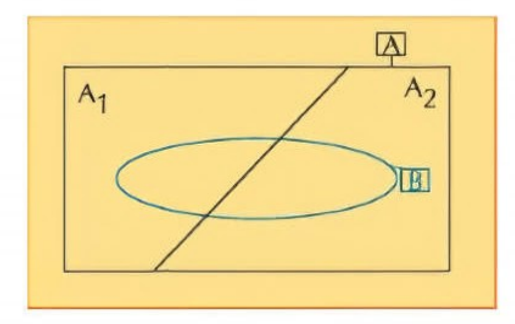
Esta es la expresión matemática del teorema del clérigo inglés Tomás Bayes cuando la partición está formada por dos eventos.

Demostración:

Como $p(A_1/B)$ es una probabilidad condicional,podemos afirmar lo siguiente:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} \quad \ldots \text{❶}$$

Pero, observando el diagrama de Venn:



$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$

Entonces:

$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) \ldots$ ❷

porque $(A_1 \cap B)$ y $(A_2 \cap B)$ son eventos mutuamente excluyentes.

Si en la expresión ❶, en lugar de p(B) se escribe la expresión ❷ tendremos que:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B)}$$



Sabemos que:

$$p(A_1 \cap B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1)$$
$$p(A_2 \cap B) = p(A_2) \cdot p(B/A_2)$$

Si hacemos estos dos cambios, la expresión toma la forma siguiente:

$$P(A_1/B) = \frac{p(A_1) \cdot p(B/A_1)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2)}$$

Es la forma usual como se presenta al Teorema de Bayes, pero preferimos la forma anterior porque los alumnos la pueden recordar con facilidad. Ambas formas conducen al mismo resultado.

1 En una fábrica el 70% de los trabajadores son hombres. El 36% de los trabajadores hombres y el 15% de las trabajadoras mujeres tienen una antiguedad mayor a 5 años.

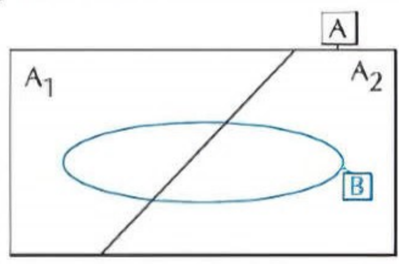
Si se selecciona, al azar, a un trabajador y tiene una antiguedad mayor a 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

A) 0,58 B) 0,75 C) 0,81
D) 0,85 E) 0,67

Resolución:

Llamemos:

A_1 = evento que el trabajador sea hombre.
A_2 = evento que el trabajador sea mujer.
B = evento que el trabajador tiene una antiguedad mayor a 5 años.



Del enunciado del problema se deduce que:

$p(A_1) = 70\% = 0{,}70$

$p(B/A_1) = 36\% = 0{,}36$

$p(A_2) = 30\% = 0{,}30$

$p(B/A_2) = 15\% = 0{,}15$

Queremos :

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B)} \quad ... \ (1)$$

Donde:

$$p(A_1 \cap B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) = 0{,}70 \cdot 0{,}36 \ ... \ (2)$$
$$p(A_2 \cap B) = p(A_2) \cdot p(B/A_2) = 0{,}30 \cdot 0{,}15 \ ... \ (3)$$

Haciendo los cambios (2) y (3) en (1), tenemos:

$$p(A_1/B) = \frac{0{,}70 \cdot 0{,}36}{0{,}70 \cdot 0{,}36 + 0{,}30 \cdot 0{,}15} = \frac{0{,}252}{0{,}252 + 0{,}045}$$

$$= \frac{0{,}252}{0{,}297} = 0{,}8484 \ ...$$

$p(A_1/B) = 0{,}85$

∴ La probabilidad de que sea hombre, ya que tiene una antiguedad mayor a 5 años, es 0,85.

Rpta. D

2 En una urbanización, el 45% de los propietarios forma el grupo Ornato; El 55%, el grupo Seguridad. En las elecciones para presidente de la junta directiva se presentaron dos candidatos: Sergio Rodriguez y Juan Carlos Beltrán.

Se sabe que:

El 68% del grupo Ornato y
El 12% del grupo Seguridad

Votaron por Sergio Rodriguez.

Si se elige un elector al azar y dice que votó por Sergio Rodriguez, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo Ornato?

A) 0,79 B) 0,82 C) 0,67
D) 0,91 E) 0,85

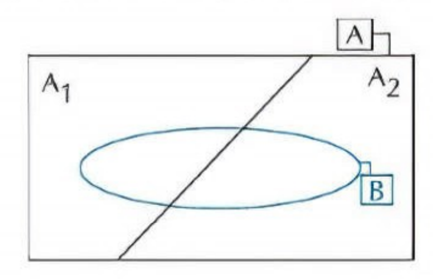
Resolución:

Llamemos:

A_1 = {propietarios del grupo Ornato}

A_2 = {propietarios del grupo seguridad}

B = {propietarios que votaron por Sergio Rodriguez}



Del enunciado del problema se deduce que:

$p(A_1) = 45\% = 0,45$

$p(B/A_1) = 68\% = 0,68$

$p(A_2) = 55\% = 0,55$

$p(B/A_2) = 12\% = 0,12$

Queremos :

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B)} \; \ldots \text{❶}$$

Donde:

$p(A_1 \cap B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) = 0,45 \cdot 0,68$ ... ❷

$p(A_2 \cap B) = p(A_2) \cdot p(B/A_2) = 0,55 \cdot 0,12$ ... ❸

Haciendo los cambios ❷ y ❸ en ❶, tenemos:

$$p(A_1/B) = \frac{0,45 \cdot 0,68}{0,45 \cdot 0,68 + 0,55 \cdot 0,12} = \frac{0,306}{0,306 + 0,066} = \frac{0,306}{0,372}$$

$p(A_1/B) = 0,82$

∴ La probabilidad de que sea hombre, ya que tiene una antiguedad mayor a 5 años, es 0,85.

Rpta. B

❸ El Centro Preuniversitario Albert Einstein piensa realizar un simulacro de examen de admisión.

Se sabe que:

La probabilidad de que el simulacro tenga éxito es 0,85, si el Centro Preuniversitario Isaac Newton no realiza su propio simulacro; y es 0,25 si el Centro Preuniversitario Isaac Newton realiza su simulacro.

Además, el Centro Preuniversitario Albert Einstein sabe que la probabilidad de que el Centro Preuniversitario Isaac Newton realice su simulacro es 0,35. Como el simulacro del Centro Preuniversitario Albert Einstein fue exitoso, ¿cuál es la probabilidad de que el Centro Preuniversitario Isaac Newton haya realizado su simulacro?

A) 0,14 B) 0,12 C) 0,15 D) 0,28 E) 0,54

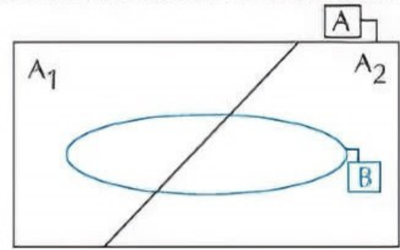
Resolución:

Llamemos:

A_1 = Isaac Newton realiza su simulacro.

A_2 = Isaac Newton no realiza su simulacro.

B = El simulacro de Albert Einstein tuvo éxito.



Del enunciado del problema se deduce que:

$p(A_1) = 0,35$ $p(B/A_1) = 0,25$

$p(A_2) = 0,65$ $p(B/A_2) = 0,85$

Queremos :

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B)} \; \ldots \text{❶}$$

donde:

$p(A_1 \cap B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) = 0,35 \cdot 0,25$ ...❷

$p(A_2 \cap B) = p(A_2) \cdot p(B/A_2) = 0,65 \cdot 0,85$ ...❸

Haciendo los cambios ❷ y ❸ en ❶, tenemos:

$$p(A_1/B) = \frac{0,35 \cdot 0,25}{0,35 \cdot 0,25 + 0,65 \cdot 0,85} = \frac{0,0875}{0,0875 + 0,5525} = \frac{0,0875}{0,64} = 0,136$$

$p(A_1/B) = 0,14$

∴ La probabilidad de que el Centro Preuniversitario Isaac Newton haya realizado su simulacro, ya que el simulacro del centro preuniversitario Albert Einstein fue exitoso, es 0,14.

Rpta. E

4 En un instituto superior tecnológico se sabe que:

> El 60 % estudia Enfermería.
> El 15 % estudia Farmacia.
> El 25 % estudia Laboratorio clínico.

Además, se conoce que:

> El 14 % de los que estudian Enfermería,
> El 10 % de los que estudian Farmacia y
> El 12 % de los que estudian Laboratorio clínico
> son menores de edad.

Se elige en estudiante al azar y es menor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Enfermería?

A) 0,62 B) 0,48 C) 0,45 D) 0,56 E) 0,65

Resolución:

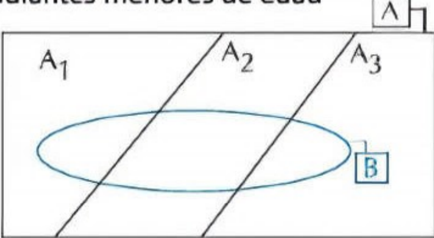
Llamemos:

A_1 = Estudiantes de Enfermería

A_2 = Estudiantes de Farmacia

A_3 = Estudiantes de Laboratorio clínico

B = Estudiantes menores de edad



Del enunciado del problema se deduce que:

$p(A_1) = 60\% = 0,60$

$p(B/A_1) = 14\% = 0,14$

$p(A_2) = 15\% = 0,15$

$p(B/A_2) = 10\% = 0,10$

$p(A_3) = 25\ \% = 0,\ 25$

$p(B/A_3) = 12\ \% = 0,\ 12$

Queremos $p(A_1/B)$ y para esto aplicamos el teorema de Bayes:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B)} \ \ldots \ \textbf{1}$$

donde:

$p(A_1 \cap B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) = 0,60 \cdot 0,14 = 0,\ 084$ ... **2**

$p(A_2 \cap B) = p(A_2) \cdot p(B/A_2) = 0,15 \cdot 0,10 = 0,015$ ... **3**

$p(A_3 \cap B) = p(A_3) \cdot p(B/A_3) = 0,25 \cdot 0,12 = 0,03$ ... **4**

Haciendo los cambios **2**, **3** y **4** en **1**, tendremos:

$$p(A_1/B) = \frac{0,084}{0,084 + 0,015 + 0,03}$$

$$= \frac{0,084}{0,129} = 0,65$$

$p(A_1/B) = 0,65$

∴ La probabilidad de que estudie Enfermería, sabiendo que es menor de edad, es 0,65.

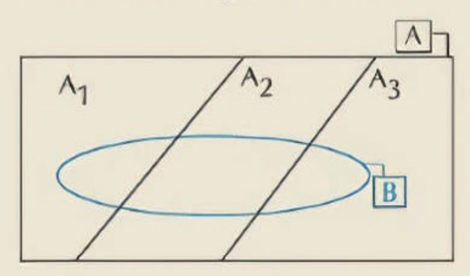
Rpta. E



Como $p(A_1/B)$ es una probabilidad condicional, podemos afirmar lo siguiente:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} \ \ldots \ \textbf{1}$$

Pero, observando el diagrama de Venn:



$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$

entonces:

$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B)$ ... **2**

porque $(A_1 \cap B)$, $(A_2 \cap B)$ y $(A_3 \cap B)$ son eventos mutuamente excluyentes.

Si en la expresión **1**, en lugar de p(B) se escribe la expresión **2** tendremos que:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \quad B)}$$

Además, sabemos que:

$p(A_1 \cap B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1)$

$p(A_2 \cap B) = p(A_2) \cdot p(B/A_2)$

$p(A_3 \cap B) = p(A_3) \cdot p(B/A_3)$

Si hacemos estos tres cambios, la expresión toma la forma siguiente:

$$p\left(\frac{A_1}{B}\right)=\frac{p(A_1)\cdot p\left(\frac{B}{A_1}\right)}{P(A_1)\cdot p\left(\frac{B}{A_1}\right)+p(A_2)\cdot p\left(\frac{B}{A_2}\right)+p(A_3)\cdot p\left(\frac{B}{A_3}\right)}$$

Es la forma usual como se presenta al Teorema de Bayes, cuando la partición está formada por tres eventos. Es fácil deducir la forma que tomará la expresión cuando esté formada por cuatro o más eventos.

Esperanza Matemática

El informe del supervisor de una fábrica indica lo siguiente:

Artículos buenos	: 92%
Artículos defectuosos	: 8%

La ganancia que produce la venta de cada artículo bueno es S/ 48.

Se pierde S/ 12 por cada artículo defectuoso producido.

Con la información proporcionada se puede averiguar cuál es la ganancia promedio por artículo fabricado.

En la producción de 100 artículos la ganancia G es:

$$G = S/\ 48 \cdot 92 + (-S/\ 12)\cdot 8$$

La ganancia g en cada artículo es:

$$g = \frac{G}{100}$$

$$g = S/\ 48\cdot\frac{92}{100} + (-S/\ 12)\cdot\frac{8}{100}$$

$$g = S/\ 48\cdot 0{,}92 + (-S/\ 12)\cdot 0{,}08$$

$$g = S/\ 43,20$$

∴ El resultado obtenido es la esperanza matemática o valor esperado de la ganancia por artículo.



Si en la expresión que da la ganancia:

$$g = \underset{x_1}{S/\ 48}\cdot \underset{p_1}{0{,}92} + \underset{x_2}{(-S/\ 12)}\cdot \underset{p_2}{0{,}08}$$

reconocemos los valores de la variable aleatoria y las probabilidades respectivas, tendremos lo siguiente:

$$g = x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2$$

Se deduce que el valor esperado de la ganancia en cada artículo es igual a la suma de los productos de los valores de la variable aleatoria por sus respectivas probabilidades.

Definición

Si X es una variable aleatoria de valores:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

cuyas respectivas probabilidades son:

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

Entonces, la **esperanza matemática de X o valor esperado de X, E (X)** es:

$$E(X) = x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + x_3\cdot p_3 + \dots + x_n\cdot p_n$$

o, en forma abreviada:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot p_i$$

Donde:

$E(X)$: Esperanza matemática de X.

$\sum_{i=1}^{n}$: Suma o sumatoria.

x_i : valores de la variable.

p_i : Probabilidades de la variable

1 Una lotería electrónica realiza su sorteo los domingos al mediodía. El premio principal lo pueden ganar 0, 1, 2,3, 4, personas y sus respectivas probabilidades son:

0,80	0,07	0,06	0,04	0,03

¿Cuál es el número esperado de ganadores en dicho sorteo?

A) 0,34 B) 0, 43 C) 0,52 D) 0,28 E) 0,36

Resolución:

Sea X la variable aleatoria. La tabla siguiente muestra los valores que puede tomar. X con sus respectivas probabilidades. (Note que la suma de probabilidades es 1).

x	0	1	2	3	4
p(x)	0,80	0,07	0,06	0,04	0,03

Para responder a la pregunta debemos calcular la esperanza matemática:

$$E(X) = 0(0{,}80) + 1(0{,}07) + 2(0{,}06) + 3(0{,}04) + 4(0{,}03)$$

$$E(X) = 0 + 0{,}07 + 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}12$$

$$\boxed{E(X) = 0{,}43}$$

∴ El número esperado de ganadores en dicho sorteo es 0,43 y esto se interpreta así: El número esperado de ganadores en 100 sorteos es 43.

Rpta. B

2 Se lanza un dado equilibrado, una vez, ¿cuál es el valor esperado del número de puntos de su cara superior, cuando se detiene?

A) 2,6 B) 3,8 C) 3,5 D) 4,2 E) 2,8

Resolución:

Llamemos X a la variable aleatoria que da el número de puntos de cada cara del dado.
Los valores de la variable y sus respectivas probabilidades se presentan en la siguiente tabla. (Note que la suma de probabilidades es 1).

x	1	2	3	4	5	6
p(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$\boxed{E(X) = 3{,}5}$ **Rpta. C**



El valor esperado 3,5 no coincide con ninguno de los valores que toma la variable aleatoria.

Además, en el proceso para calcular E(X) llegamos a lo siguiente:

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \bar{x}$$

$$E(X) = \bar{x}$$

Significa que el valor esperado de la variable aleatoria X es el promedio de los valores que toma dicha variable aleatoria.

3 Un vendedor vende x automóviles por mes, donde x puede valer de 1 a 4.
La probabilidad de vender x automóviles esta dada por la expresión $\frac{a \cdot 4^x}{x^4}$; cada automóvil se vende a S/ 40 000. ¿Cuál es el valor esperado de su venta mensual?

A) S/ 64 247,34 B) S/ 29 938,45 C) S/ 59 248,25
D) S/ 84 625,72 E) S/ 72 872,73

Resolución:

I. Calculemos las probabilidades para los diferentes valores que puede tomar x:

$$x = 1 \rightarrow p = \frac{a \cdot 4^1}{1^4} = \boxed{4a}$$

$$x = 2 \rightarrow p = \frac{a \cdot 4^2}{2^4} = \boxed{a}$$

$$x = 3 \rightarrow p = \frac{a \cdot 4^3}{3^4} = \boxed{\frac{64}{81}a}$$

$$x = 4 \rightarrow p = \frac{a \cdot 4^4}{4^4} = \boxed{a}$$

La suma de probabilidades debe ser 1, entonces:

$$4a + a + \frac{64}{81}a + a = 1$$

$$\frac{550}{81}a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{81}{550}}$$

II. Cálculo de la esperanza matemática.

x	1	2	3	4
p(x)	4 a	a	$\frac{64}{81}$a	a

La esperanza matemática es:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i$$

$$E(X) = 1(4a) + 2(a) + 3\left(\frac{64}{81}a\right) + 4(a) = \frac{334}{27}a$$

En lugar de a colocamos su valor:

$$E(X) = \frac{334}{27}\left(\frac{81}{550}\right)$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1002}{550}}$$

Este es el valor esperado de su venta mensual de automóviles; como cada automóvil se vende a S/ 40 000, entonces:

$$\frac{1002}{550}(S/\ 40\ 000) = \boxed{S/\ 72\ 872,\ 73}$$

es el valor esperado de su venta mensual, en soles.

Rpta. E

Amplía tus conocimientos



BEBIDAS Y REFRESCOS GASIFICADOS



Un grupo de investigadores de la Universidad de Minnesota ha analizado a más de 60.000 personas durante 14 años. Con los 140 casos de cáncer de páncreas que se detectaron entre su muestra durante ese período, determinaron que la mayoría de los procesos cancerígenos se produjeron entre personas que consumían bebidas gaseosas de forma habitual.

Ya en 2004, un estudio estadounidense aseguraba que las bebidas gaseosas azucaradas son la principal causa de la obesidad y de la diabetes.

El estudio abarcó 91.000 enfermos de ambos sexos entre 1977 y 1997, investigando la relación entre el consumo de bebidas gaseosas azucaradas y la diabetes.

Se observó una correlación entre el consumo de bebidas gaseosas (que en ese período aumentó en un 61% entre los adultos, y se duplicó entre los niños), con la diabetes, la obesidad adulta y el sobrepeso infantil.

Un estudio publicado en 2007 afirma que los refrescos con gas, aunque sean *light*, están relacionados con un incremento de factores de riesgos asociados a enfermedades coronarias y diabetes.

Según este estudio, los adultos que consumen una lata de refresco con gas al día, tienen un 50% más de riesgo (que aquellos que no consumen este tipo de bebidas) de desarrollar un síndrome metabólico con factores de riesgo como un incremento de grasa en la cintura, una disminución del colesterol bueno, tensión arterial alta, y otros síntomas.

Y este efecto tiene lugar, ya sea el refresco normal, ó *light*...

La típica lata de refrescos contiene el equivalente a 7 cucharaditas de azúcar y a 5 sobres de azúcar de las cafeterías.

Por otro lado, un estudio de la Universidad de Harvard había observado que todas las adolescentes que toman bebidas con gas tienen un riesgo de sufrir una fractura multiplicada por 3, en comparación con las que no consumen estos refrescos.



La Universidad de Loyola (EEUU) demostró, en otro estudio, que las mujeres que beben dos ó más latas de refrescos con gas al día tienen el doble de riesgo de sufrir enfermedades renales. Si el 11% de la población padece de albuminuria, entre aquellos que beben dos ó más latas de refrescos diariamente, el porcentaje aumenta hasta el 17%.

Florence Nightingale

(1820 - 1910)

Personaje de la Matemática



Destacada mujer que luchó por la profesión de enfermera de tal manera que está considerada por muchos autores como la pionera de la enfermería moderna.

Florence Nightingale nació en Florencia (ciudad de la que toma su nombre) el 12 de mayo del año 1820 en el seno de una adinerada familia inglesa. Desde muy pequeña tuvo vocación de enfermera pero en aquella época no estaba bien visto que las mujeres adineradas se dedicaran a cuidar enfermos. Florence luchó contra las tradiciones victorianas de la época, se formó y estudió para ser enfermera a pesar de la oposición de sus padres. Visitó un gran número de hospitales, recopiló datos y aprendió mucho sobre la profesión de enfermera, la asistencia médica y los sistemas hospitalarios.

El mayor reconocimiento, vino por su labor en la Guerra de Crimea. Florence, como responsable de un grupo de 38 enfermeras, fue enviada al campo de batalla para atender a los heridos. Fue la primera vez que el ejército británico envió mujeres a un conflicto bélico. Su dedicación fue impresionante, atendió a más de 5000 heridos, denunció a las autoridades las pésimas condiciones higiénicas en las que se encontraban los enfermos, recopiló datos estadísticos y empezó a cambiar el sistema de atención médica que hasta aquel momento se daba a los heridos. Cuidaba a los enfermos durante el día y la noche. Por la noche, siempre se dejaba ver atendiendo a los enfermos acompañada de un pequeño farolillo turco, y fue por ello que comenzaron a llamarla La Dama de la Lámpara, término que más tarde inmortalizaría el poeta americano Henry Wadsworth Longfellow (1807 –1882) en su poema *Santa Filomena*

Al volver de la Guerra de Crimea, Florence fue recibida como una heroína nacional, condecorada por la Reina Victoria. Fundó, en 1860, la Escuela de Entrenamiento y Hogar Nightingale para Enfermeras en el Hospital de St. Thomas gracias a la aportación económica de la misma Reina Victoria. Esta escuela contaba con un método teórico-práctico de la enseñanza y un marco ético conceptual muy bien definido.

Florence Nightingale también destacó en el terreno de la estadística, campo en el que su padre era un experto. Fue pionera en la representación visual de la información, usando, entre otras herramientas, diagramas e histogramas circulares. En el Diagrama Nightingale o Diagrama de Área Polar, que envió a la Reina Victoria en 1858, mostró las causas de la mortalidad del ejército inglés y reflejó toda la información que recopiló durante su estancia en Crimea. Florence fue la primera mujer nombrada miembro de la *Royal Statistical Society* y también formó parte de la *American Statistical Association*.

Desde 1896 hasta la fecha de su muerte en 1910, Florence cayó enferma y tuvo que permanecer postrada en cama. Su estado de salud no le impidió continuar investigando y escribió cerca de doscientos libros e informes que tuvieron importantes repercusiones en la sanidad militar, la asistencia social, los hospitales civiles, las estadísticas médicas y la asistencia a los enfermos. El Día Internacional de la Enfermera se celebra todos los años el 12 de mayo, aniversario del nacimiento de esta mujer.

Florence murió a los 90 años, el 13 de agosto de 1910: se había convertido en una de las mujeres más famosas y de mayor influencia del siglo XIX. Su obra sigue siendo, aun hoy en día, una referencia para enfermeras, administradores y planificadores de instituciones sanitarias.



Investiga:

1. Opina sobre la participación de la mujer en la labor científica.
2. ¿Conoces alguna mujer peruana destacada en la ciencia?

BIBLIOGRAFÍA

- Albertí, M. (2014). El mosaico sin fin. Teselaciones y dibujos sobre el plano. Madrid: EDITEC.
- Amster, P. (2007). Fragmentos de un discurso matemático. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- Arroyo, E. (2014). Un viaje matemático de la partícula al todo. Madrid: EDITEC.
- Asociación ADUNI (2004). Trigonometría plana y esférica e introducción al cálculo. Lima: Lumbreras Editores S.R.L.
- Asociación Fondo de Investigadores y Editores. (2008). Geometría, una visión de la planimetría. Lima: Editorial Lumbreras Editores.
- Ávila, R. (1990). Estadística elemental. Lima: Ediciones R.A.
- Bunch, B. (2002). Matemática insólita. Paradojas y Paralogismos. Barcelona: Editorial Reverté S.A.
- Dávila, F. (1980). Matemática Financiera. Lima: Editorial Sudamérica S.A.
- Dolciani, M. , y otros. (1969). Introducción al análisis moderno. México D.F.: Publicaciones Cultural S.A.
- Granville, W. (1959). Trigonometría plana y esférica. México D.F.: Editorial UTEHA.
- Hall, H. , y Knight, S. (1956). Álgebra Superior. México D.F.: Editorial UTEHA.
- Instituto de Ciencias y Humanidades. (2011). Álgebra. Tomo II. Lima: Editorial Lumbreras Editores.
- Instituto de Ciencias y Humanidades. (2012). Geometría, una visión de la estereometría. Lima: Editorial Lumbreras Editores.
- Kalnin, R. (1988). Álgebra y Funciones elementales. Moscú: Editorial MIR.
- Kaufmann, J. , y Schwitters, K. (2000). Álgebra intermedia México D.F.: International Thomson Editores.
- Lehmann, C. (1965). Álgebra. México D.F.: Editorial Limusa - Wiley S.A.
- Lidski, V. , y otros. (1983). Problemas de matemáticas elementales. Moscú: Editorial MIR.
- Luque, B. , y Parrondo, J. (2016). Las leyes del azar. Madrid: Editorial Bonalletra Alcompas S.L.
- Moya, R. , y Saravia, G. (1988). Probabilidad e inferencia estadística. Lima: Editorial San Marcos.
- Moya, R. (1991). Estadística descriptiva. Conceptos y aplicaciones. Lima: Editorial San Marcos.
- Nielsen, K. (1984). Trigonometría moderna. México D.F.: Compañía Editorial Continental S.A. de C.V.
- Palacio, J. (2003). Didáctica de la matemática: búsqueda de relaciones y contextualización de problemas. Lima: Fondo editorial del Pedagógico San Marcos.
- Piscoya, L. (2009). Retos de la matemática. Lima: Fondo Editorial UCH.
- Portus, L. (1985). Matemáticas Financieras. México D.F.: McGRAW-HILL.
- Santos, L. (2007). La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México D.F.: Editorial Trillas S.A. de C.V.
- Smith, S. , y otros. (1998). Álgebra, Trigonometría y Geometría analítica. México D.F.: Addison Wesley Longman.
- Tipe, J. , y otros. (2010). IV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática 2007. Lima: Editorial Lumbreras Editores.
- Tipe, J. , y Espinoza, C. (2011). V Olimpiada Nacional Escolar de Matemática 2008. Lima: Editorial Lumbreras Editores.
- Valqui, H. (2009). Jaquemática. Volumen II. Lima: Fondo Editorial de la Universidad de Ciencias y Humanidades.